

Краевая научно-практическая конференция  
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическая модель движения нескольких тел в порождаемом ими  
гравитационном поле**

Рябуха Власта Павловна,  
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,  
Никитюк Александр Сергеевич,  
учитель информатики.

Пермь. 2015.

## Оглавление

Введение .....	3
Обзор литературы .....	5
Содержательная постановка задачи .....	6
Концептуальная постановка задачи .....	7
Математическая постановка задачи .....	8
Методы решения .....	10
Выводы .....	13
Список литературы .....	14

## Введение

Огромной и, наверно, самой загадочной тайной для науки и человечества является космос. В целом космос – бесконечное пространство, включающее в себя галактики, различные небесные тела, космическую пыль и другие объекты. Можно встретить большое количество определений слова «космос», зависящих от науки, в которой рассматривается термин, но чаще под космосом понимают Вселенную. Изучают Вселенную такие науки как астрономия и астрофизика.

Одной из важнейших астрофизических задач является задача о движении тел в гравитационных полях. Решение данной проблемы необходимо при описании движения как различных планет в планетных системах, так и галактик или их скоплений. Кроме того, задача движения тел в создаваемом ими гравитационном поле используется для описания движения в сверхсильных гравитационных полях нейтронных звезд, черных дыр и крупномасштабной структуры Вселенной.

Рассмотрение поведения трех тел в рамках данной задачи не имеет точного аналитического решения. Поэтому для исследования задачи применяется математическое (точнее, численное) моделирование. В основе данной задачи лежит учет гравитационного взаимодействия всех тел друг с другом. Такой метод является наиболее простым для понимания и реализации. Но самое главное, он обеспечивает наилучшую точность вычисления гравитационной силы. Сложность метода заключается в том, что он требует больших машинных ресурсов, поскольку каждое тело взаимодействует с каждым. Исходя из этого, такой подход можно использовать в качестве «модели-теста», целью которой является проверка наиболее важных и принципиальных результатов наблюдений. Преимущество модели этого типа связано с возможностью определять силы с такой же точностью, что и арифметическая точность вычислительной системы.

Модельную задачу о движении тел в гравитационных полях использовало международное научное объединение Консорциум Девы. Оно занималось моделированием космологических процессов. С помощью суперкомпьютеров они провели N-частичное моделирование с целью изучения формирования крупномасштабной структуры Вселенной в стандартной космологической модели, названное моделированием «Миллениум».

Термин «крупномасштабная структура Вселенной» введён для обозначения строения Вселенной в масштабах от нескольких мегапарсек до нескольких сотен мегапарсек. Иначе говоря, он обозначает структуру распределения вещества во Вселенной на самых больших наблюдаемых масштабах.

Результаты моделирования проекта «Миллениум» используются для сравнения с наблюдательными данными и как граничные условия для более подробных моделирований меньших объёмов Вселенной [3].

Цель данной работы заключается в исследовании движения нескольких тел в порождаемом ими гравитационном поле на основе метода N-частичного моделирования.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить основные закономерности движения нескольких тел в слабых и сильных (в которых существенны эффекты общей теории относительности) гравитационных полях.
2. Выполнить содержательную, концептуальную и математическую постановку на основе изученной информации.
3. Провести качественный анализ математической постановки, проверить её корректность.
4. Выбрать метод решения задачи, обосновать сделанный выбор, решить задачу.
5. Проверить адекватность созданной математической модели.
6. На основе выполненного решения произвести моделирование:
  - a) ряда задач в системе трех тел в слабом гравитационном поле,
  - b) движения одного и двух тел в гравитационном поле сверхмассивной черной дыры,
  - c) движения тела малой массы в поле двойной черной дыры.

## Обзор литературы

Все тела изучаемого физикой мира находятся в одной огромнейшей среде. Для описания этой среды вводится такое понятие, как пространственно-временной континуум, или, иными словами, пространство-время. Это понятие не является точным описанием действительности, но, возможно, оно создает наиболее приближенную к реальности теоретико-физическую конструкцию, позволяющую рассматривать и изучать астрономические тела. Пространство-время – это физическая модель, которая дополняет трёхмерное пространство четвертым – временным – измерением, таким же равноправным, как и три пространственных. Все измерения связаны между собой, а их взаимодействие с физическими телами происходит через гравитацию.[6]

Гравитационное поле – это один из видов физических полей, через которое осуществляется гравитационное взаимодействие тел (притяжение). Иначе его называют полем тяготения. В основном именно гравитационное поле определяет законы движения тел в масштабах от десятков тысяч километров до размеров наблюдаемой Вселенной. Изучая и описывая взаимодействие различных объектов (планет, звезд, небесных тел) в планетных системах, где поля тяготения и скорости движения малы, достаточно пользоваться механикой Ньютона. Ньютоновская механика дает точные результаты в относительно слабых гравитационных полях. Так, она применима, например, для движения тел в Солнечной системе. Однако помимо слабых полей, существуют сильные. Примером тела с сильным полем тяготения в Солнечной системе является ближайшая к Солнцу планета – Меркурий. Прецессия его перигелия (смещение ближайшей к Солнцу точки его орбиты) составляет 43 угловых секунды в столетие и не может быть объяснена ньютоновской механикой. У остальных ближайших к Солнцу планет этот эффект практически невозможно измерить, во-первых, из-за большего расстояния до Солнца, и во-вторых, из-за того, что орбита Меркурия обладает ярко выраженной эллиптичностью, а орбиты Земли и Венеры почти круговые.

Рассмотрение движения в сильных гравитационных полях массивных тел (таких, как нейтронные звезды и черные дыры) требует учет эффектов общей теории относительности (ОТО). Согласно ОТО, гравитация (тяготение) обусловлена не силовым взаимодействием тел, находящихся в пространстве-времени, а деформацией самого пространства-времени (то есть его искривлением). Чем больше масса тела, тем сильнее она искривляет пространство. Точное решение уравнений теории относительности является очень трудоемкой задачей, поэтому для рассмотрения движения тел в полях очень массивных тел применяются некоторые приближения так называемого

потенциала взаимодействия. Он характеризует потенциальную энергию взаимодействия тел.

Одним из таких наиболее удачных приближений потенциала взаимодействия является потенциал Пачиньского-Виита [4] :

$$U(R) = -G \frac{mM}{R - r_g} \quad (1)$$

### **Содержательная постановка задачи**

На основании поставленных цели и задач и обзора литературы формируется следующая содержательная постановка: разработать математическую модель движения нескольких тел в порождаемом ими гравитационном поле.

Модель должна позволять:

- определять траектории движения тел.

Исходные данные модели:

- количество тел;
- начальные координаты и массы тел.

## Концептуальная постановка задачи

Для решения задачи примем следующие гипотезы:

- Объектом моделирования является гравитационное взаимодействие  $N$  небесных тел, массы и размер которых известны.
- Задача рассматривается с точки зрения звездной динамики.
- На первом этапе работы рассмотрим простейший случай, когда  $N = 2$ , то есть взаимодействие происходит между двумя небесными телами.
- Первое тело имеет массу  $m_1$ ; масса второго тела -  $m_2$ ;
- При описании взаимодействия тел учитываются только их гравитационные радиусы  $r_g$ . Гравитационный радиус – это величина, используемая для учета теории относительности. Гравитационный радиус тела зависит от его массы, он равен:

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2} \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света и  $G$  – гравитационная постоянная. При рассмотрении и изучении астрономических тел, имеющих достаточно большие размеры, гравитационный радиус этих тел будет ничтожно мал по сравнению с их действительными масштабами. Вследствие этого, небесные тела рассматриваются как материальные точки, положение которых определяется их центром масс. Гравитационные радиусы тел считаем одинаковыми.

- Тела находятся друг от друга на расстоянии  $R$ . Расстояние от первого тела до второго обозначаем как  $R_{12}$ , тогда расстояние от второго до первого -  $R_{21}$ .
- Тела взаимодействуют друг с другом и передвигаются исключительно за счет гравитационных сил.
- Гравитационные взаимодействия тел описывает потенциал межчастичного взаимодействия.
- Прочими воздействиями окружающей среды пренебрегаем.

В соответствии с изложенными гипотезами, в качестве параметров, описывающих гравитационное взаимодействие двух тел, используются массы тел  $m_1$  и  $m_2$ , их гравитационные радиусы  $r_g$ , расстояние  $R$  между телами и их начальные координаты. Тогда для определения траектории движения тел

необходимо получить законы движения центров масс двух тел из потенциала межчастичного взаимодействия.

С учётом вышеизложенного, можно сформулировать концептуальную постановку задачи о гравитационном взаимодействии в следующем виде:

Определить закон движения двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$  и гравитационными радиусами  $r_g$ , которые находятся на расстоянии  $R$  относительно друг друга.

### Математическая постановка задачи

Введем основные обозначения:

$U$  – потенциал взаимодействия ;

$m_1$  – масса первого тела;

$m_2$  – масса второго тела;

$R$  – расстояние между телами;

$G$  – гравитационная постоянная;

$\overline{F}_{12}$  – сила, действующая на второе тело со стороны первого;

$\overline{F}_{21}$  – сила, действующая на первое тело со стороны второго;

$\overline{a}_1$  – ускорение первого тела;

$\overline{a}_2$  – ускорение второго тела;

$r_g$  – гравитационный радиус;

В соответствии с изложенными гипотезами рассмотрим простейшую постановку, в которой гравитационное взаимодействие происходит между двумя телами. (Рис. 1)

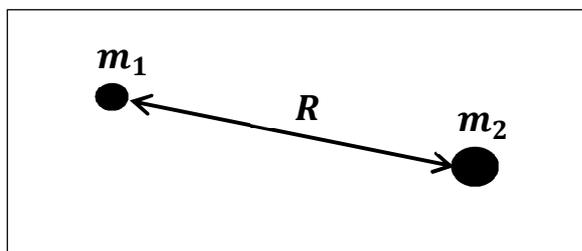


Рис. 1 Потенциал межатомного взаимодействия

где  $R$  – расстояние между телами,  $m_1, m_2$  – их массы.

Тогда взаимодействие этих тел будет описывать потенциал Пачиньского-Вииты из уравнения (1):

$$U(R) = -G \frac{m_1 m_2}{R - r_g} \quad (3)$$

Обозначим на рисунке силу взаимодействия тел (рис. 2):

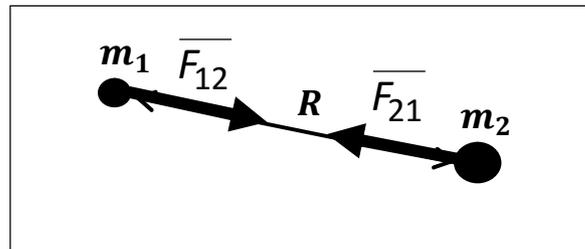


Рис. 2. Силы взаимодействия

Сила взаимодействия определяется дифференцированием потенциала по расстоянию между телами:

$$\bar{F} = -\frac{dU(R)}{dR} \quad (4)$$

По второму закону Ньютона сила равна:

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad (5)$$

Где ускорение тела  $\mathbf{a}$  определяется производной второй степени координаты тела  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}'' \quad (6)$$

Таким образом, получим уравнение движения тела при гравитационном взаимодействии:

$$m\mathbf{x}'' = \frac{dU(R)}{dR} \quad (7)$$

Дополняя уравнение (7) начальными условиями, задающими начальные координаты и начальные скорости небесных тел, получаем математическую постановку задачи.

## Методы решения

Рассмотрим метод решения уравнения (7). Взаимодействие небесных тел описывается через потенциал для каждого тела отдельно:

Для первого тела:

$$U(R_{12}) = -G \frac{m_1 m_2}{R_{12} - r_g} \quad (8)$$

где  $R_{12}$  – расстояние от первого тела до второго.

Записываем уравнение потенциала для второго тела:

$$U(R_{21}) = -G \frac{m_1 m_2}{R_{21} - r_g} \quad (9)$$

где  $R_{21}$  – расстояние от второго тела до первого.

Сила, действующая на каждое тело, равна производной потенциала, поэтому:

$$\overline{F}_{12} = -\frac{dU(R_{12})}{dR_{12}} = \left(-G \frac{m_1 m_2}{R_{12} - r_g}\right)' \quad (10)$$

$$\overline{F}_{21} = -\frac{dU(R_{21})}{dR_{21}} = \left(-G \frac{m_1 m_2}{R_{21} - r_g}\right)' \quad (11)$$

Применяем Второй закон Ньютона (0.5) :

$$\overline{F} = m\overline{a} \quad (12)$$

Для каждого тела:

$$F_{12} = m_1 a_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (13)$$

$$F_{21} = m_2 a_2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (14)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – координаты тел.

Приравняем выражения (10) и (13) получим уравнение для первого тела:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \left(-G \frac{m_1 m_2}{R_{12} - r_g}\right)' \quad (15)$$

Из (9) и (14) выражений соответственно получаем уравнение для второго тела:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \left(-G \frac{m_1 m_2}{R_{21} - r_g}\right)' \quad (16)$$

Раскрываем производные:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \left(-G \frac{m_1 m_2}{R_{12} - r_g}\right)' = -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{R_{12} - r_g}\right)' = -G m_1 m_2 \left((R_{12} - r_g)^{-1}\right)' \\ &= G m_1 m_2 (R_{12} - r_g)^{-2} (R_{12} - r_g)' = G m_1 m_2 (R_{12} - r_g)^{-2} = G \frac{m_1 m_2}{(R_{12} - r_g)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Соответственно для второго тела получим:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (18)$$

Из уравнений (17) и (18) получаем вид уравнений (15) и (16):

$$m_1 x_1'' = G \frac{m_1 m_2}{(R_{12} - r_g)^2} \quad (19)$$

$$m_2 x_2'' = G \frac{m_1 m_2}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (20)$$

Для нахождения координаты разделим уравнения (19) и (20) на массу рассматриваемого тела и получим:

$$x_1'' = G \frac{m_2}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (21)$$

$$x_2'' = G \frac{m_1}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (22)$$

Данные уравнения имеют вид задачи Коши второго порядка. Задача Коши - одна из основных задач теории дифференциальных уравнений, которая состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным данным. [5]

Чтобы привести постановку к задаче Коши первого порядка, введем переменную  $T$ :

$$T = x_1'$$

Тогда уравнение (1.4) получит следующий вид:

$$T' = G \frac{m_2}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (23)$$

Введем аналогичную замену  $P$  для координаты второго тела:

$$P = x_2'$$

И тогда уравнение (1.4.1) будет выглядеть следующим образом:

$$P' = G \frac{m_1}{(R_{21} - r_g)^2} \quad (24)$$

## **Выводы**

Проведен обзор литературы, из которого мы выясняли некоторые явления космической природы и причины движения тел в полях тяготения, а также определили закон, которым будет описываться это движение. Выполнена содержательная, концептуальная и математическая постановки задачи о движении двух тел при гравитационном взаимодействии, которое описывает потенциал Пачиньского-Виита. Рассмотрен метод решения поставленной задачи, заключающийся в приведении дифференциального уравнения второй степени к задаче Коши первого порядка и последующем решении этой задачи.

## Список литературы

1. Зельдович Я.Б. Теория расширяющейся Вселенной, созданная А.А Фридманом. УФН. 1963. 357-390 с.
2. Сажин М.В. Современная космология в популярном изложении. - М.: Едиториал УРСС. 2002. 240 с.
3. Свободная общедоступная мультиязычная универсальная интернет-энциклопедия [<https://ru.wikipedia.org>] - URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Консорциум\\_Девы](https://ru.wikipedia.org/wiki/Консорциум_Девы)
4. Лежкин К.В., Чернягин С.А. Использование переменных действия ньютоновской задачи в численном решении задачи N тел // XI конф. мол. уч. фундаментальные и прикладные космические исследования: сб. трудов, 9-11 апреля 2014 г., Москва. – С. 69-76.
5. Свободная общедоступная мультиязычная универсальная интернет-энциклопедия [<https://ru.wikipedia.org>] - URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача\\_Коши](https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_Коши)
6. Словарная энциклопедия Академик [<http://dic.academic.ru>] – URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/81097>