

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Нормальное распределение Гаусса. Доска Гальтона

Соколова Дарья Витальевна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Любимова Нина Юрьевна,
старший преподаватель ПНИПУ.

Пермь. 2015.

Введение

Вся жизнь человека – это череда случайных событий, но даже эти самые случайности подчиняются законам, формулам, и могут быть описаны целыми теоремами. Именно поэтому мне стала интересна тема нормального распределения, которому подчиняются разнообразные случайные величины.

Цель: исследовать поведение гистограммы в доске Гальтона, в зависимости от изменений условий засыпания зерна. Подтвердить связь между вариационной кривой и графиком функции Гаусса.

Теоретическая часть

Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, занимает центральное место в теории и практике вероятностно-статистических исследований. Оно является наиболее общим распределением, которому подчиняются самые разнообразные случайные величины, самой разнообразной физической природы. В одномерном случае данное распределение задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где параметр μ — математическое ожидание (среднее значение), медиана и мода распределения, а параметр σ — среднеквадратическое отклонение (σ^2 — дисперсия) распределения.

Важное значение нормального распределения во многих областях науки (например, в математической статистике и статистической физике) вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей. Если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то при увеличении числа слагаемых распределение централизованного и нормированного результата стремится к нормальному. Этот закон теории вероятностей имеет следствием широкое распространение нормального распределения, что и стало одной из причин его наименования.

Нормальное распределение часто встречается в природе. Например, следующие случайные величины хорошо моделируются нормальным распределением:

- отклонение при стрельбе.
- погрешности измерений (однако погрешности некоторых измерительных приборов имеют не нормальные распределения).

-некоторые характеристики живых организмов в популяции.

Такое широкое распространение этого распределения связано с тем, что оно является бесконечно делимым непрерывным распределением с конечной дисперсией. Поэтому к нему в пределе приближаются некоторые другие, например, биномиальное и пуассоновское.

Многомерное нормальное распределение используется при исследовании многомерных случайных величин (случайных векторов). Одним из многочисленных примеров таких приложений является исследование свойств личности человека в психологии и психиатрии.

Доска Гальтона

Доска Гальтона – это устройство, позволяющее получить гистограмму (столбчатую диаграмму) форма которой весьма близка к распределению Гаусса. Изобрёл её английский учёный Фрэнсис Гальтон, для демонстрации центральной предельной теоремы. Первый экземпляр был изготовлен в 1873 году, затем устройство было описано Гальтоном в книге *Natural inheritance*, изданной в 1889 году.

Доска Гальтона представляет собой ящик с прозрачной передней стенкой. В заднюю стенку в шахматном порядке вбиты штырьки, образующие треугольник. Сверху в ящик через воронку (выход из которой расположен ровно посередине между левой и правой стенками) кидаются шарики. В идеальном случае сталкиваясь со штырьком, шарик каждый раз с одинаковой вероятностью может повернуть либо направо, либо налево. Нижняя часть ящика разделена перегородками (число которых равно числу штырьков в нижнем ряду), в результате чего шарики, скатываясь на дно ящика, образуют столбики, которые тем выше, чем ближе к середине доски (при достаточно большом числе шариков внешний вид столбиков приближается к кривой нормального распределения).

Если нарисовать на задней стенке треугольник Паскаля, то можно увидеть, сколькими путями можно добраться до каждого из штырьков (чем ближе штырёк к центру, тем больше число путей).

В некоторых настольных играх, а также игровом автомате Патинко, используется доска Гальтона или схожие с ней устройства.

Модификационная изменчивость

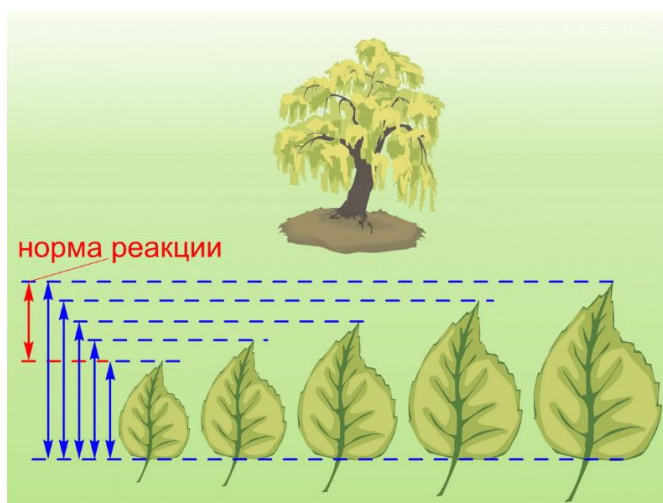
В биологии есть такое понятие, как модификационная изменчивость организма – это изменение фенотипа, как реакция на изменения среды, происходящее в пределах нормы реакции. Норма реакции – это предел изменчивости признака, обусловленный генотипом. Норма реакции может быть широкой или узкой. Модификации образуют вариационный ряд – это ряд изменчивости признаков организма в пределах нормы реакции. Графическое выражение характера изменчивости признака называется вариационной кривой, она показывает размах вариации и частоту встречаемости признака.

Изменчивость многих признаков поддаётся количественному изучению. При исследовании количественных признаков из наблюдаемых объектов составляют вариационный ряд. При его составлении изучаемые объекты располагают друг за другом в порядке возрастания или убывания признака.

Варианта – величина изучаемого признака.

Частота встречаемости варианты – это число объектов, соответствующих каждой варианту.

При построении вариационной кривой для объекта с большим количеством вариантов график схож с графиком нормального распределения. Из кривой видно, что наиболее распространены средние варианты проявления признака. Причиной этого, по-видимому, является действие факторов окружающей среды на ход онтогенеза. Некоторые факторы подавляют экспрессию генов, другие же, наоборот, усиливают. Почти всегда эти факторы, одновременно действуя на онтогенез, нейтрализуют друг друга, то есть ни уменьшения, ни увеличения значения признака не наблюдается. Это и является причиной, по которой особи с крайними выражениями признака встречаются в значительно меньшем количестве, чем особи со средней величиной.



Экспериментальная часть

Проектирование и создание доски Гальтона

Чтобы собственными глазами увидеть доску Гальтона в действии и продемонстрировать нормальное распределение, было решено создать её собственными руками, используя при этом доску, гвозди и оргстекло. Предварительно был начерчен план и указаны все величины (ширина, длина, высота, глубина и т.п.).

На рис.1 представлено получившееся устройство.

На рис.2 видна гистограмма, полученная в ходе эксперимента, которая соответствует нормальному распределению.



Рис.1



Рис.2

Если наклонить воронку под углом (рис.3), то можно пронаблюдать два случая: в первом, если засыпать зёрнышки пшеницы в воронку медленно, гистограмма не изменится, во втором, если начать сыпать зёрнышки быстрее, то воронка станет для некоторых из них «трамплином», они начнут перелетать первый гвоздь, не падая на все остальные, и попадать в крайнюю ячейку. (рис.4)



Рис.3

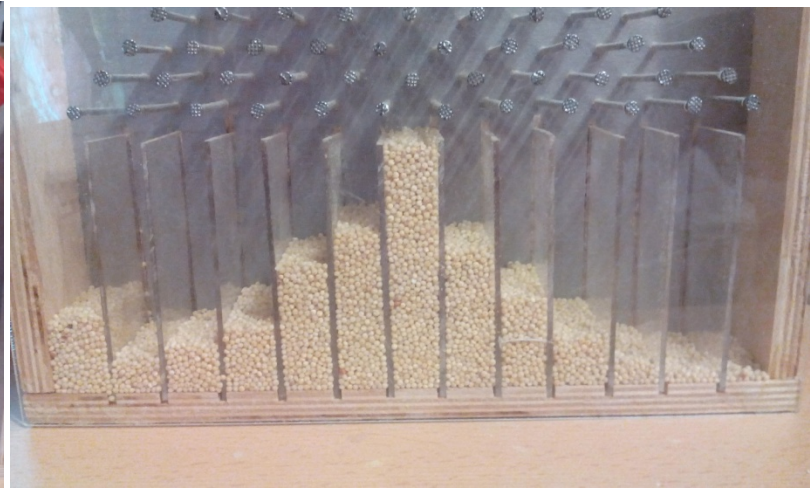


Рис.4

Если же доску наклонить назад, гистограмма сохранится, просто зёрнышки будут оседать на задней стенке (рис.5), совсем не соприкасаясь с передней. Соответственно если наклонить вперёд, зёрнышки будут оседать на передней прозрачной стенке.

Если наклонить доску вправо, то ячейкой с наибольшим числом зёрнышек по-прежнему останется центральная, но остальные ячейки справа от неё будут содержать большее количество зёрнышек, чем те, что справа (рис.5).



Рис.5



Рис.5

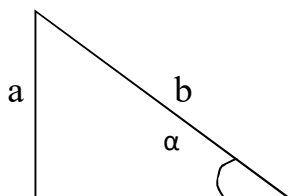
Если поставить доску на вращающуюся поверхность, гистограмма сохранится, но в крайних трёх ячейках, как слева, так и справа, будет примерно равное количество зёрен.

Зависимость вида гистограммы от угла наклона доски Гальтона

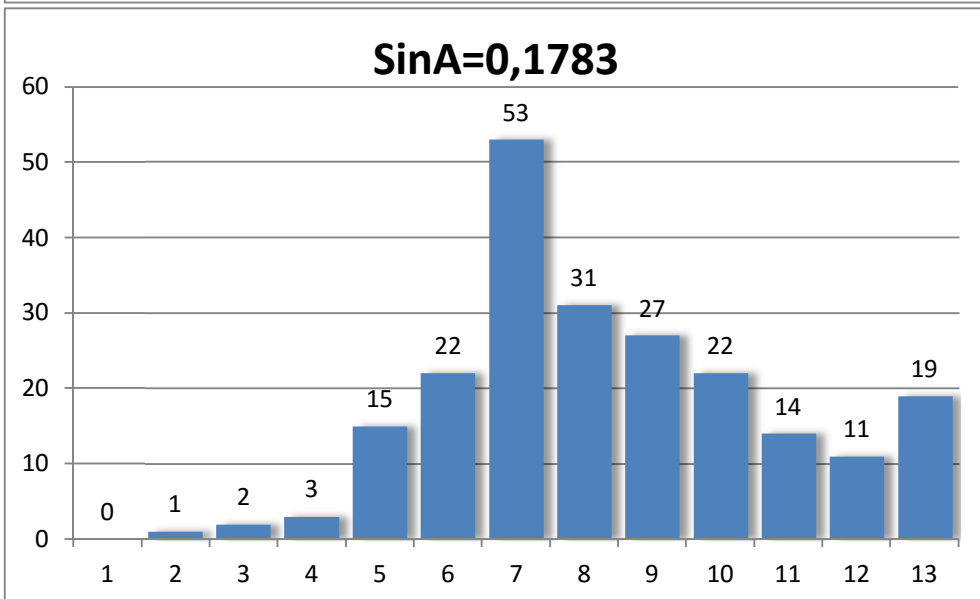
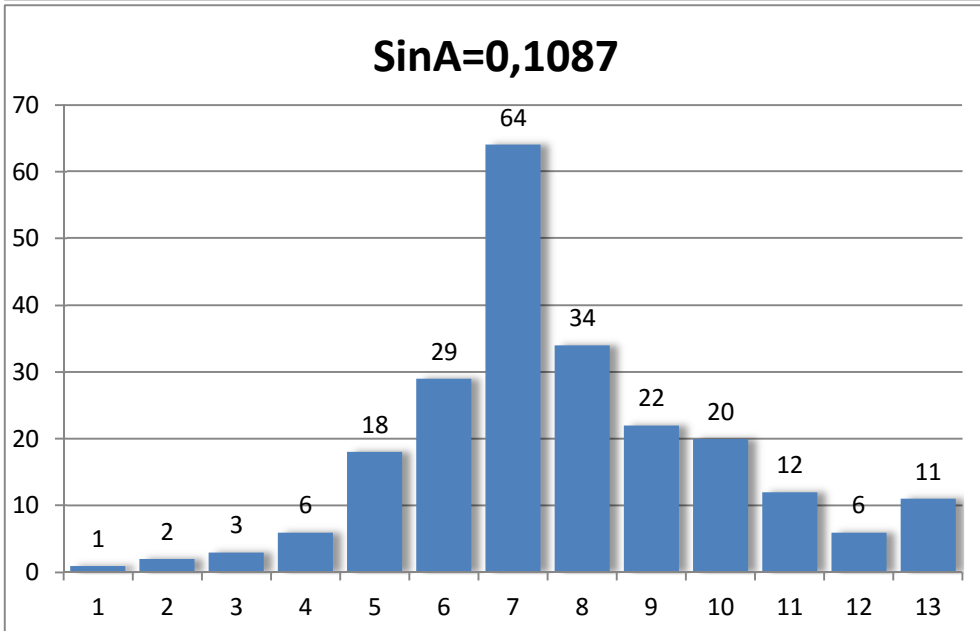
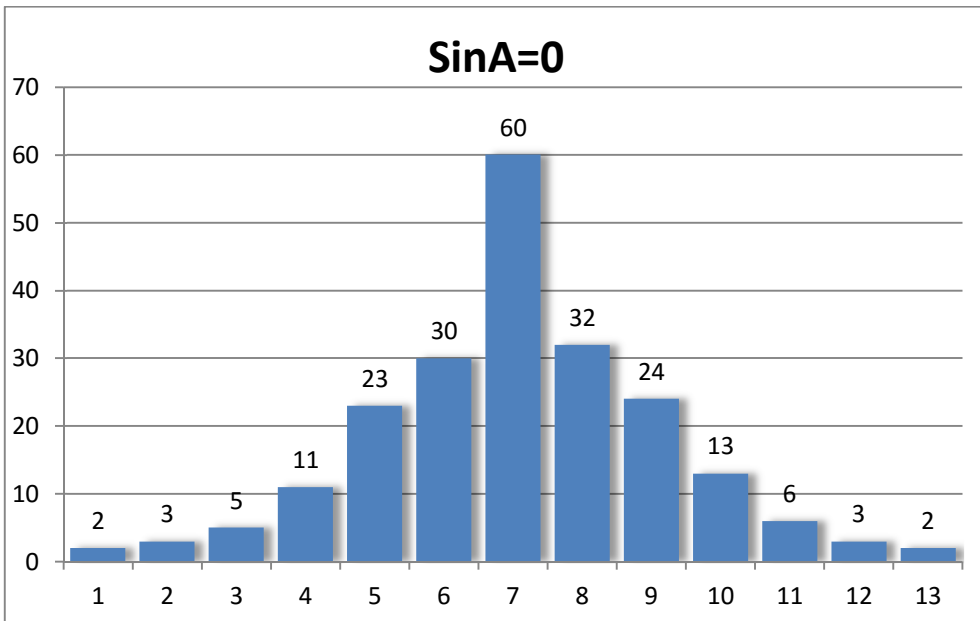
Из-за столь сильного влияния наклона доски на характер гистограммы, выявленного в ходе эксперимента, можно проследить зависимость. Будем

изменять угол наклона, и прослеживать высоту столба зёрен в каждой ячейке. Угол будем находить через функцию синус в треугольнике, образованном частью дна доски (b - гипотенуза), столом и высотой опоры (a - противолежащий катет).

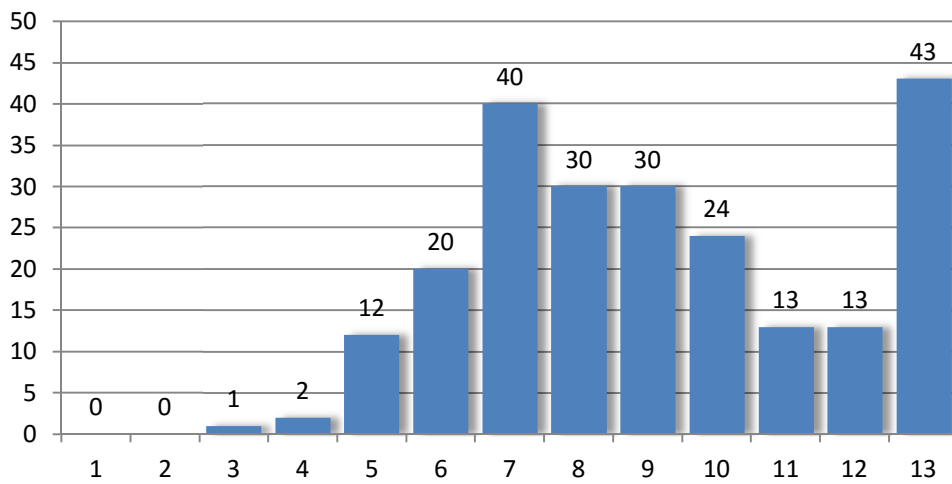
$$\text{Тогда } \sin\alpha = \frac{a}{b}$$



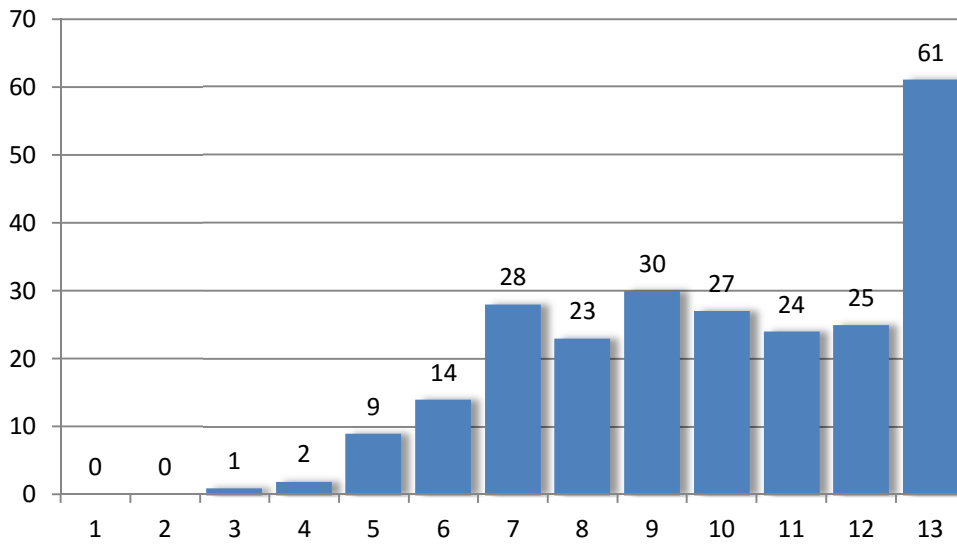
Для демонстрации представлены следующие гистограммы:



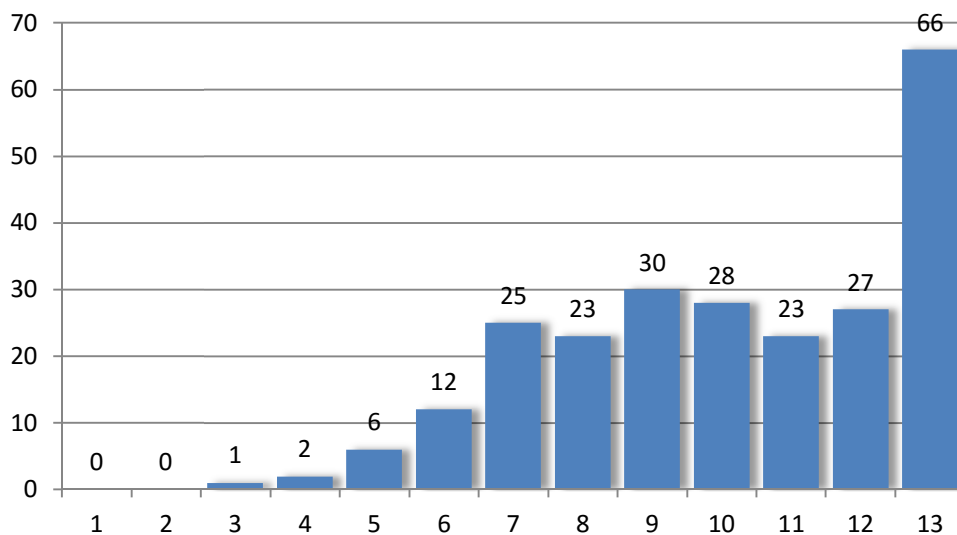
SinA=0,2739



SinA=0,3348



SinA=0,3756



Также, для удобства сравнения представлена таблица:

№	Угол	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1)	0°	2	3	5	11	23	30	60	32	24	13	6	3	2
2)	6°	1	2	3	6	18	29	64	34	22	20	12	6	11
3)	10°	0	1	2	3	15	22	53	31	27	22	14	11	19
4)	15°	0	0	1	2	12	20	40	30	30	24	13	13	43
5)	19°	0	0	1	2	9	14	28	23	30	27	24	25	61
6)	22°	0	0	1	2	6	12	25	23	30	28	23	27	66

Угол найден через синус по таблице Брадиса.

Из наблюдений видно, что при увеличении угла наклона, столбик зёрен в ячейках с 1 по 7 (включительно) постепенно уменьшается. При этом «главный» столбик, тот который содержит большее число зёрен, из 7 ячейки переходит в 13.

Построение вариационной кривой

В роли изучаемого объекта я выбрала два разных комнатных растения: фиалку(1) и алоэ(2). Признак, поддающийся модификационной изменчивости – длина листа. Я измерила длину каждого листка растения и составила таблицу, в которой каждой длине соответствует количество(Q) листов этой длины. Из-за погрешности измерений и малого количества листков на растении я объединяла некоторые близкие значения длины.

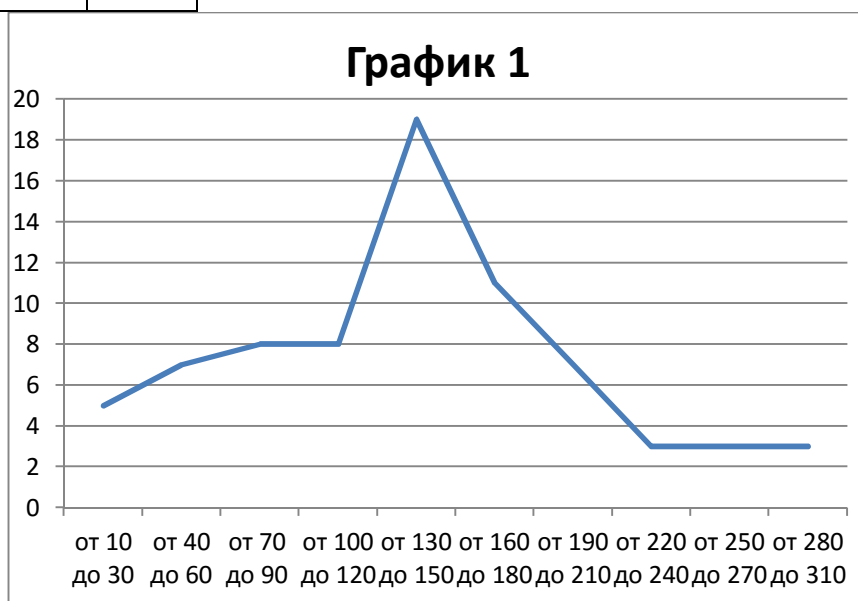


L,мм	Q,шт
5	2
11	2
16	3
25	4
27	13
31	15
35	8
37	3
40	2



На графике 1 представлена вариационная кривая показывающая изменчивость длины листа фиалки.

L,мм	Q,шт
10-30	3
40-60	6
70-90	7
100-120	8
130-150	19
160-180	11
190-210	7
220-240	3
250-270	3
280-310	2



На графике 2 представлена вариационная кривая показывающая изменчивость длины листа алоэ. Причём значение длин сгруппировано, значения указаны включительно. Явно видна схожесть вариационной кривой с функцией Гаусса, причём, чем больше число объектов отличающихся изучаемым признаком, тем заметнее связь.

Заключение

В данной работе достигнуты все поставленные цели. Подробно описана, создана и изучена доска Гальтона, а также исследован график

функции Гаусса. Существует перспектива развития работы в изучении зависимости графика от каких-либо факторов.

Список литературы

1. Нормальное распределение Гаусса
https://ru.wikipedia.org/wiki/Нормальное_распределение
2. Доска Гальтона
https://ru.wikipedia.org/wiki/Доска_Гальтона
3. Модификационная изменчивость
Учебник по биологии 10-11 класс В. И. Сивоглазов, И. Б. Агафонова, Е.Т. Захарова (2010)