Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников по политехническим, естественнонаучным, математическим дисциплинам для учащихся 9-11 классов

Моделирование экологических процессов

Выполнила: Седова Лилия Вячеславовна
211 класс
Научный руководитель:
Сидорова Ирина Борисовна

Пермь 2016

Оглавление:

Annotation

The theme of my research is "Modeling of ecological processes." The goal of my research - to build a mathematical model that reflects the epidemic, using differential equations. This model will reveal the character of the epidemic and approximate date of completion. In my work I used such research methods as an analysis of the literature on differential equations, the study of methods for constructing mathematical models, searching necessary demographic and statistical data, as well as the construction of their mathematical models. The following results were obtained on the basis of the research: constructed mathematical model of influenza corresponds to the statistics in 2015, identified the dependence of the epidemic and the nature of its flow from a variety of environmental factors.

Введение

В последнее время из средств массовой информации всё чаще можно услышать об изменениях, которые происходят на нашей планете. Неиссякаемые потребности человечества в пище, строительных материалах и энергии направлены на бесконтрольное использование ограниченных природных ресурсов. В результате деятельности человека расходуются естественные богатства в виде минерального сырья, почв, водных ресурсов, загрязняется среда, вырубаются тысячи гектаров леса, наблюдается сокращение популяций редких особей, изменение климатических норм, а также возникновение новых эпидемий, которые стремительно распространяются по всему миру. Поэтому в настоящее время является актуальным создание математических моделей, помогающих выработать стратегию поддержания устойчивости окружающей среды, прогнозирования возможных изменений в численности популяций, оценке ущерба, который может быть нанесен природе в процессе эксплуатации среды, а также вычислении пика эпидемии, её продолжительности и степени её угрозы для населения.

Я выбрала данную тему, так как мне стало интересно узнать, как с помощью математических расчетов и вычислений можно построить модель, описывающую тот или иной экологический процесс. Процесс, который я решила анализировать, – скорость распространения эпидемии. Математическая модель является приближенным описанием какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Она позволяет выявить динамику роста эпидемии с течением времени. В этом случае применяются дескриптивные(описательные) математические модели в виде дифференциальных уравнений(или систем дифференциальных уравнений).

Цель моей работы – провести анализ реальных процессов математическими методами, построить математическую модель развития эпидемии. Задачи, которые мне необходимо выполнить в процессе работы, – изучить теоретическую основу дифференциальных уравнений и процесс построения математических моделей, и с их помощью составить свою модель на основе изученного материала.

В своей учебно-исследовательской работе я использовала такие методы исследования, как анализ литературы по дифференциальным уравнениям, изучение процесса построения математических моделей, сбор необходимых демографических и статистических данных и моделирование: составление своих моделей, соответствующих выбранной теме.

Глава 1. Математическое моделирование

§1. Понятие модели и моделирования.

Модель в широком смысле - это любой образ, аналог мысленный или установленный изображение, описание, схема, чертеж, карта и т. п. какого либо объема, процесса или явления, используемый в качестве его заменителя или представителя. Сам объект, процесс или явление называется оригиналом данной модели.

Моделирование - это исследование какого-либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей.

На идее моделирования базируется любой метод научного исследования, при этом в теоретических методах используются различного рода знаковые, абстрактные модели, в экспериментальных - предметные модели. Любая математическая модель описывает реальный объект, явление или процесс с некоторой степенью приближения к действительности.

Математическое моделирование общественных, экономических, биологических и физических явлений, объектов, систем и различных устройств является одним из важнейших средств познания природы и проектирования самых разнообразных систем и устройств.

Основная задача исследователя - предсказывать характер явления и ход процесса.

§2. Классификация математических моделей.

Математические модели могут быть **детерминированными** и **стохастическими**

Детерминированные модели - это модели, в которых установлено взаимно-однозначное соответствие между переменными описывающими объект или явления.

Такой подход основан на знании механизма функционирования объектов. Часто моделируемый объект сложен и расшифровка его механизма может оказаться очень трудоемкой и длинной во времени. В этом случае поступают следующим образом: на оригинале проводят эксперименты, обрабатывают полученные результаты и, не вникая в механизм и теорию моделируемого объекта с помощью методов математической статистики и теории вероятности, устанавливают связи между переменными, описывающими объект. В этом случае получают **стохастическую** модель. В **стохастической** модели связь между переменными носит случайный характер, иногда это бывает принципиально. Воздействие огромного количества факторов, их сочетание приводит к случайному набору переменных, описывающих объект или явление.

По характеру режимов модели бывают **статистическими** и **динамическими**.

Статистическая модель включает описание связей между основными переменными моделируемого объекта в установившемся режиме без учета изменения параметров во времени.

В **динамической** модели описываются связи между основными переменными моделируемого объекта при переходе от одного режима к другому.

Модели бывают **дискретными** и **непрерывными**, а также смешанного типа. В **непрерывных** моделях переменные принимают значения из некоторого промежутка, а в **дискретных** переменные принимают изолированные значения.

Линейные модели - все функции и отношения, описывающие модель линейно зависят от переменных и не линейные в противном случае.

§3. Математическое моделирование в экологии.

Системы, которые изучает экология – популяции, биоценозы, экосистемы, – чрезвычайно сложны. В них возникает множество взаимосвязей, сила и постоянство которых непрерывно меняются. Одни и те же внешние воздействия могут привести к различным, иногда прямо противоположным результатам, в зависимости от того, в каком состоянии находилась система в момент воздействия.

Предвидеть ответные реакции системы на действие конкретных факторов можно лишь через анализ существующих в ней количественных взаимоотношений и закономерностей, поэтому в экологии широкое распространение получил метод математического моделирования как средство изучения и прогнозирования природных процессов.

Расчетные методы в случае правильно построенной модели помогают увидеть то, что трудно или невозможно проверить в эксперименте, позволяют воспроизводить такие процессы, наблюдение которых в природе потребовало бы много сил и больших промежутков времени. Математические модели дают возможность лучше понять механизмы, действующие в природных условиях.

Глава 2. Классификация дифференциальных уравнений.

§1. Понятие дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее между собой независимую переменную x (или несколько переменных), искомую функцию и её производную различных порядков. Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком производной, входящей в данное уравнение.

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать так:

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$— неизвестная функция, зависящая от независимой переменной x.
Обыкновенные дифференциальные уравнения – это дифференциальные уравнения, содержащие лишь одну независимую переменную.
Дифференциальные уравнения в частных производных – это дифференциальные уравнения, в которых содержится две и более независимых переменных.
Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.
Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y(x)$, которая будучи подставленной в уравнение, обращает его в тождество.
График решения дифференциального уравнения называют **интегральной кривой** этого уравнения.

§2. Виды дифференциальных уравнений.

1)Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и производную первого порядка искомой функции.
Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$.

Общее и частное решение

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C)$, зависящее от одной произвольной постоянной C, придавая конкретное значение которой $C = C_0$, можно получить решение $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющее любому заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.
Равенство вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.
Заметим, что в практике чаще всего бывает нужным не общее решение, а так называемое **частное решение**, отвечающее определенным начальным условиям, вытекающим из условия данной конкретной задачи.
Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$,если в последнем произвольной постоянной C придать определенное значение $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом.
С геометрической точки зрения общее решение уравнения первого порядка представляет собой семейство кривых на плоскости xOy, зависящее от одной произвольной постоянной C. Эти кривые называются **интегральными**

кривыми данного дифференциального уравнения.

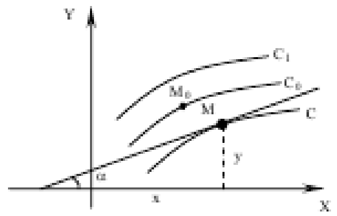

Рис.1

На рис.1 изображено семейство кривых, т.е. совокупность линий соответствующих различным значениям постоянных C. Интегральные кривые обладают свойством, что в каждой их точке $M(x, y)$ наклон касательной удовлетворяет условию: $tg\alpha = f(x, y)$.

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то из бесконечного семейства интегральных кривых выделяется одна интегральная кривая, которая соответствует частному решению дифференциального уравнения. Это означает наличие начального условия $y = y_0$ при $x = x_0$.
Для известного общего решения $y = \varphi(x, C)$, можно найти $y = \varphi(x, C_0)$, что позволяет определить C и найти частное решение.
Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши.**
Если решение дифференциального уравнения не может быть получено из общего ни при каких начальных условиях оно называется **особым**.
Решить или **проинтегрировать** данное дифференциальное уравнение это значит:
а) найти его общее решение или общий интеграл, если не заданы начальные условия,
или
б) найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1.1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальные уравнения $f(y)dy = g(x)dx$ называют уравнениями с **разделенными переменными**, где множителем при dx является функция, зависящая только от x, а множителем при dy - функция, зависящая только от y.
Общее решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными можно найти, проинтегрировав обе части равенства:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, где правая часть представляет собой произведение двух функций, из которых одна не зависит от x, а вторая не зависит от y, называется уравнением **с разделяющимися**

переменными.

Запишем производную в виде отношения дифференциалов: $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$ и разнесем в разные части выражения, содержащие x и y. Мы получим равенство двух дифференциалов: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)\cdot dx$. После интегрирования правой части по x, а левой – по y мы получим слева функцию, зависящую от y, а справа – функцию, зависящую от x, отличающуюся на константу: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\cdot dx+C\cdot$

Уравнение вида $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ является дифференциальным уравнением с **разделяющимися переменными**, записанным в форме дифференциалов. Оно так же сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого уравнение делим на $f_2(x)\cdot g_1(y)$:

$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)}+\frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}=0$.

Интегрируя, получим:

$\int\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)}+\int\frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}=C$.

1.3.Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Так называется дифференциальное уравнение вида $y'=a(x)y+b(x)$. Здесь сама функция и ее производная связаны линейно. Решать уравнение будем методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Для этого сначала решим соответствующее уравнение с нулевым свободным членом, называемое **линейным однородным** уравнением:

$$y'=a(x)y.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение

$$y=C\cdot e^{\int a(x)dx}.$$

Теперь мы будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y=C(x)\cdot e^{\int a(x)dx}.$$

Найдем неизвестный множитель $C(x)$, подставив y в указанном виде в заданное уравнение.

Мы получим

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx}+C(x)\cdot a(x)e^{\int a(x)dx}=C(x)\cdot a(x)e^{\int a(x)dx}+b(x).$$

После взаимного уничтожения одинаковых слагаемых в левой и правой частях придем к соотношению

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx}=b(x).$$

Отсюда мы найдем $C'(x)$, а затем и $C(x)$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

§3. Системы дифференциальных уравнений.

Для описания некоторых процессов и явлений требуется несколько функций. Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.
Рассматриваем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x; y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x; y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases},$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – функции от x, которые следует найти.
Систему, когда в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правая часть не содержит производных, называется **нормальной системой дифференциальных уравнений.** Ее решение составляет набор из функций, которые удовлетворяют всем уравнениям системы.
Начальные условия (задача Коши) для нормальной системы имеет вид:

$$y_1(x_0) = y_{10}; y_2(x_0) = y_{20}; ... y_n(x_0) = y_{n0},$$

где $x_0, y_0, ..., y_{n0}$ - заданные числа, называемые начальными данными.
Сведение нормальной системы дифференциальных уравнений к интегрированию одного уравнения высшего порядка является одним из основных методов интегрирования таких систем.
В прикладных задачах (физики, механики и пр.) независимая переменная очень часто интерпретируется как время t.
Система тогда принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t; y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t; y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t; y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

Решения таких систем дифференциальных уравнений являются функциями времени и, следовательно, могут описывать изменения во времени процессов, происходящих внутри моделируемых объектов.

§4.Численный метод решения дифференциальных уравнений.

Аналитическим решением дифференциального уравнения называется нахождение зависимостей его переменных от времени в виде явно заданной математической формулы.

Многие дифференциальные уравнения, к которым приводят математические модели реальных процессов, не могут быть решены аналитически. По этой причине разработаны методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Одним из таких методов является **численный метод Эйлера**.

Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ численным методом - это значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, ..., x_n$ и числа y_0, не определяя функцию $y = F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, ..., y_n$, что $y_i = F(x_i)$ $(i = 1,2,...n)$ и $F(x_0) = y_0$.

Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов.

Например, решение дифференциального уравнения первого порядка получается в виде следующей таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$:

x	***y***	***y'***
x1	***y(x1)***	***y'(x1)***
x2	***y(x2)***	***y'(x2)***
x3	***y(x3)***	***y'(x3)***
xN	***y(xN)***	***y'(xN)***

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x = x_0, y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке $[a;b]$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, ..., x_n$, где $x_{i+1} = x_i + h$, где $(i = 0,1,...,n)$, а $h = \dfrac{b-a}{n}$ -шаг интегрирования.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) = y_i$ вычисляются последовательно по формулам $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$, где $(i = 0,1,2,...,n)$.

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера приведена на рис.2. Вместо интегральной кривой в реальности получается совокупность прямых(так называемая ломаная Эйлера).

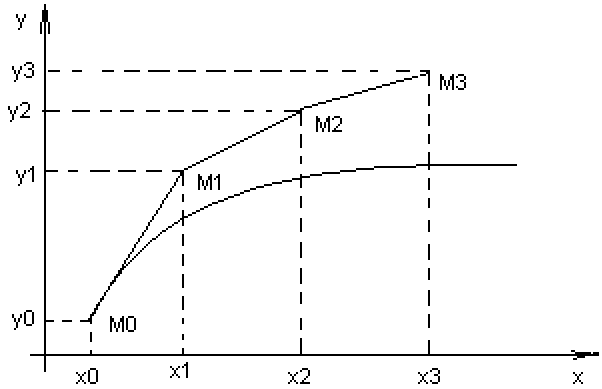

Рис.2 «Ломаная Эйлера».

Таким образом, суть метода Эйлера заключается в замене функции $y(x)$ на отрезке интегрирования прямой линией, касательной к графику в точке $x = x_i$.

Ошибка в определении значения $y(x_i)$ при этом будет тем меньше, чем меньше выбрана длина шага h (что определяется точностью формулы интегрирования).

При больших h метод Эйлера весьма неточен. Он дает все более точное приближение при уменьшении шага интегрирования.

Процесс вычислений строится следующим образом. При заданных начальных условиях $x = x_0, y = y_0$ можно вычислить

$y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)h \qquad x_1 = x_0 + h$

$y_2 = y_1 + F(x_1, y_1)h \qquad x_2 = x_1 + h$

$y_3 = y_2 + F(x_2, y_2)h \qquad x_3 = x_2 + h$

…………………………………………….

$y_N = y_{N-1} + F(x_{N-1}, y_{N-1})h \qquad x_N = x_{N-1} + h$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений.

Глава 3. Дифференциальные уравнения в экологии.

§1. Составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий.

Рассмотрим составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий.

Допустим, что изучаемое инфекционное заболевание носит длительный характер, при этом процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из популяции и передают при встречах инфекцию незараженным особям.
Предположим, что особи перемешиваются однородно по пространству, т.е. не существует мест, предпочтительных для контактов, а так же не существует особых особей контакт, с которыми наиболее предпочтителен.
Для построения математической модели введем две функции:
$x(t)$ и $y(t)$.
Пусть $x(t)$ - функция, характеризующая число незараженных особей,
$y(t)$ - функция, характеризующая число зараженных особей.
В начальный момент времен $t=0$, количество незараженных особей равно $x(0)=n$, а количество зараженных $y(0)=a$.
Т.к. инфекция передается при встрече зараженных особей с незараженными, то число незараженных будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между теми и другими, т.е. xy. Предположим, что частота таких встреч равна β.
На сновании принятых предположений выразим убыль Δx незараженных особей за промежуток времени Δt в виде:

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = -\beta xy\Delta t$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = -\beta xy$$

Будем считать, что болезнь не приводит к смертности, следовательно, можно написать условие баланса

$$a+n = x+y = const$$

Учитывая это, перепишем:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n+a-x)$$

$$x(0)=n$$

Формулы, представляют собой математическую модель динамики незараженных особей.
Считая β постоянной величиной, найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Разделив переменные, можем переписать его в виде

$$\frac{dx}{x(n+a-x)} = -\beta dt$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int\frac{dx}{x(n+a-x)} = -\beta\int dt$$

Интеграл в левой части равенства можно высчитать, взяв во внимание, что

$$\frac{1}{x(n+a-x)} = \frac{1}{n+a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+a-x}\right)$$

Подставляя, это представление в интеграл получим

$$\int \frac{1}{n+a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+a-x}\right)dx = -\int \beta dt$$

$$\frac{1}{n+a}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{n+a}\int \frac{dx}{n+a-x} = -\beta t + C$$

$$\frac{1}{n+a}(\ln x - \ln(n+a-x)) = -\beta t + C$$

$$(\ln x - \ln(n+a-x)) = -(n+a)\beta t + C$$

Или

$$\ln \frac{x}{n+a-x} = \ln e^{-\beta(n+a)t} + \ln C$$

Выполним в последнем уравнении потенцирование:

$$\frac{x}{n+a-x} = Ce^{-\beta(n+a)t}.$$

Учитывая начальное условие: при $t = 0, x = n$ найдем постоянную C.

$$\frac{n}{n+a-n} = Ce^{0}$$

$$C = \frac{n}{a}$$

Подставим значение C в последнее равенство и получим:

$$\frac{x}{n+a-x} = \frac{n}{a}e^{-\beta(n+a)t}$$

Решив это уравнение относительно x, окончательно получим

$$x(t) = \frac{n(n+a)}{n+ae^{\beta(n+a)t}} \quad (*)$$

Формула дает закон убывания числа незараженных особей с течением времени.

При известном $x(t)$ число $y(t)$ зараженных особей определится из условия баланса: $y = n + a - x$

На практике во время эпидемии регистрируется обычно число новых случаев заболевания, которые появляются через сутки или за неделю. Поэтому удобнее рассматривать динамику роста числа новых случаев, которое описывается формулой:

$$-\frac{dx}{dt}=\frac{\beta n(n+a)^2 e^{\beta(n+a)t}}{(n+e^{\beta(n+a)t})^2} \quad (1.1)$$

График этой функции называется **эпидемической кривой**. Эта кривая сначала растет, достигает максимума при

$$t=\frac{\ln n}{\beta(n+a)} \quad (1.2)$$

и дальше уменьшается к нулю. Таким образом, эпидемическая кривая описывает характерное свойство эпидемий: число новых случаев сначала быстро возрастает, в какой-либо момент времени достигает максимума, а потом уменьшается к нулю.

Общий случай эпидемии.

С практической точки зрения больший интерес представляет обобщение рассмотренной выше модели простой эпидемии на случай, когда зараженные особи могут удаляться из популяции (выздоравливать).

Изменим приведенную модель, добавляя в нее еще один процесс – выздоровление больных особей. Для этого введем новую функцию $z(t)$, выражающую число выздоровевших особей.

Каждый член популяции, как правило, прогрессирует из незараженной особи в зараженную, а затем в выздоровевшую.

Этот процесс можно изобразить в виде следующей блок-схемы:

$$\boxed{X} \xrightarrow{\beta xy} \boxed{Y} \xrightarrow{\gamma y} \boxed{Z}$$

Предполагается, что

1) В модели не принимается во внимание демографические изменения: рождение и смерть, таким образом, размер популяции считается постоянным на временном отрезке моделирования.

$x+y+z=const$

2) Все особи популяции имеют одинаковую вероятность β заражения при контакте с больными. Болезнь передаётся только посредством общения с зараженными особями. Если контактирующий не имеет приобретенного иммунитета к болезни, то заражение непременно наступит. Врождённый иммунитет отсутствует. Инкубационный период заболевания пренебрежимо мал, т. е. заболевание в данной модели происходит мгновенно.

3) Доля выздоровевших γ после болезни и изолированных больных постоянна. Иммунитет всегда приобретается в результате болезни. Заболевание никогда не приводит к смерти.

Из этих условий следует новая математическая модель, которая может быть представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases}$$

где параметр γ характеризует скорость выздоровления.

В данной системе уравнение $\frac{dx}{dt} = -\beta xy$ описывает динамику убывания числа незараженных особей с течением времени.

Уравнение $\frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y$ динамику увеличения числа зараженных особей.

Уравнение $\frac{dz}{dt} = \gamma y$ описывает скорость прироста здоровых особей.

Число выздоровевших особей в начальный момент времени равно нулю, поэтому начальные условия для системы (*) примут вид:

$x(0) = n, y(0) = a, z(0) = 0$

Условие баланса перепишется как $x + y + z = n + a$

Из второго уравнения системы, можно получить условие распространения эпидемии.

Действительно, эпидемия не начнется, если скорость заражения не будет положительной $\frac{dy}{dt} <= 0$, т.е. численность больных особей не будет увеличиваться. Таким образом, динамика эпидемии зависит от соотношения

$\rho = \frac{\beta}{\gamma}$

Величина ρ носит название эпидемического порога. Т.е., если $x(0) = n < \rho$, то первичные случаи заболевания быстро иссякнут и эпидемия возникнуть не сможет.

Упомянутая выше система уравнений называется моделью SIR. Впервые она была предложена в 1927 г. Учеными Великобритании У. Кермаком и А. Маккендриком.

§2. Построение математической модели распространения гриппа.

Так, на 26 января 2015 года показатель заболеваемости среди совокупного населения города Пермь составил 92,0 на 10 тыс. населения, то есть при населении в Перми n=1 036 469 (численность населения Перми на 1 января 2015 года), количество больных гриппом a=9535. Предполагаем, что все восприимчивы к вирусу гриппа. Прирост больных за день прямо пропорционален числу контактов больных и здоровых. Динамика развития эпидемии в данной модели представлена с коэффициентом скорости распространения равным $\beta = 0{,}00000093$. Подставив все необходимые значения в формулу (1.1) при изменяющемся времени t, получим следующие результаты.

Дата	День распространения гриппа	Количество заболевших
26.01.2015	1	3
27.01.2015	2	7
28.01.2015	3	18
29.01.2015	4	48
30.01.2015	5	127
31.01.2015	6	336
01.02.2015	7	888
02.02.2015	8	2343
03.02.2015	9	6152
04.02.2015	10	15952
05.02.2015	11	40071
06.02.2015	12	93006
07.02.2015	13	180524
08.02.2015	14	250987
09.02.2015	15	222469
10.02.2015	16	131678
11.02.2015	17	60777
12.02.2015	18	24913
13.02.2015	19	9719
14.02.2015	20	3719
15.02.2015	21	1412
16.02.2015	22	535
17.02.2015	23	202
18.02.2015	24	76
19.02.2015	25	29
20.02.2015	26	11
21.02.2015	27	4
22.02.2015	28	2
23.02.2015	29	1

Представленные в таблице данные также можно отобразить на графике (рис.3)

Рис.3

Если подставить известные данные в формулу (1.2) можно вычислить день, на который будет наблюдаться максимальное число заболевших, или пик заболеваемости гриппа. Так, в 2015 году пик заболеваемости в Перми, в соответствии с вычислениями и данными, представленными в таблице, наблюдался на 14 день эпидемии. Если сопоставить данные, полученные в результате исследования с данными по статистике распространения эпидемии гриппа в Перми на 2015 год, то можно заметить, что они практически совпадают. Так, на 22 февраля наблюдалось значительное снижение эпидемии гриппа, что соответствует полученным в ходе исследования данным.

Коэффициент β, который отображает частоту контактов особей, может изменяться: чем больше коэффициент, тем эпидемия начнется быстрее, и число заболевших особей также будет больше, чем коэффициент β меньше, тем меньше особей подвергаются заражению, а сама эпидемия будет проходить более плавно. На представленных ниже графиках (рис.4, рис.5) отображена зависимость течения гриппа от данного коэффициента β.

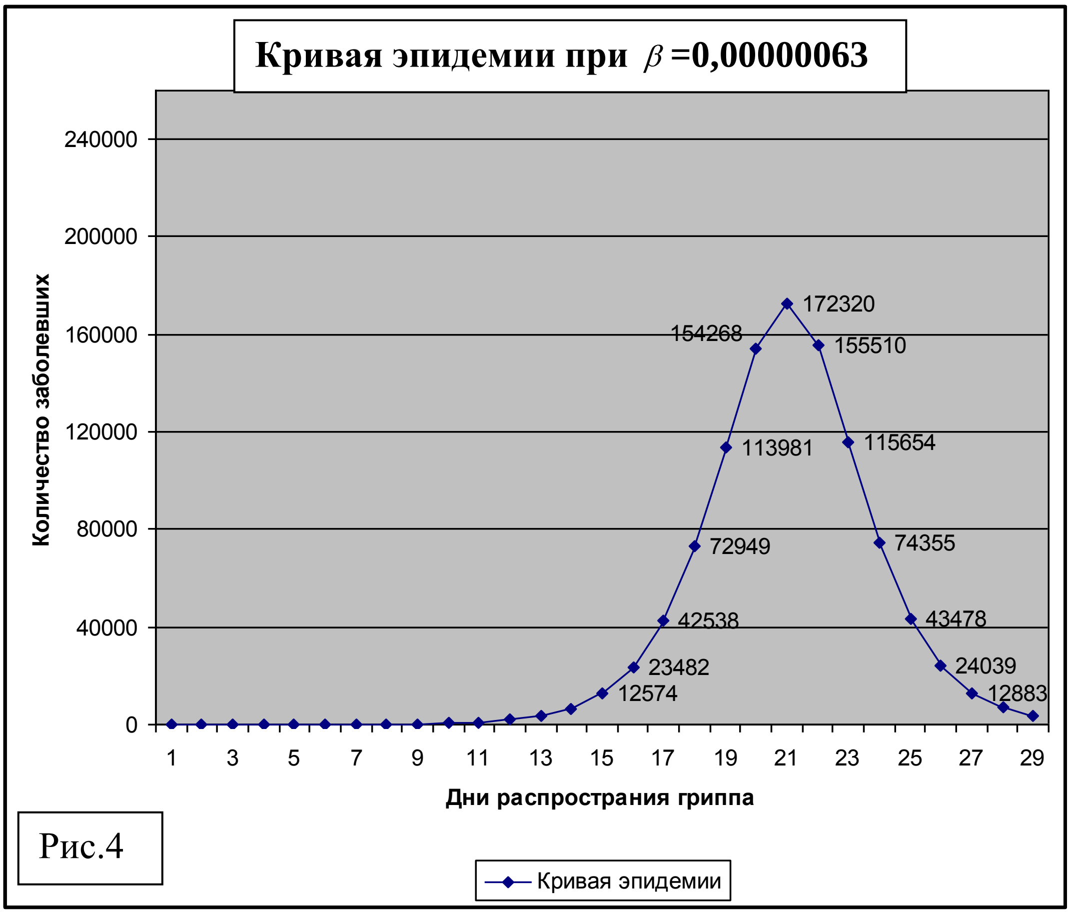
Кривая эпидемии при β =0,00000063
Количество заболевших
0
40000
80000
120000
160000
200000
240000
172320
154268
155510
113981
115654
72949
74355
42538
43478
23482
24039
12574
12883
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
Дни распространия гриппа
Кривая эпидемии

Рис.4

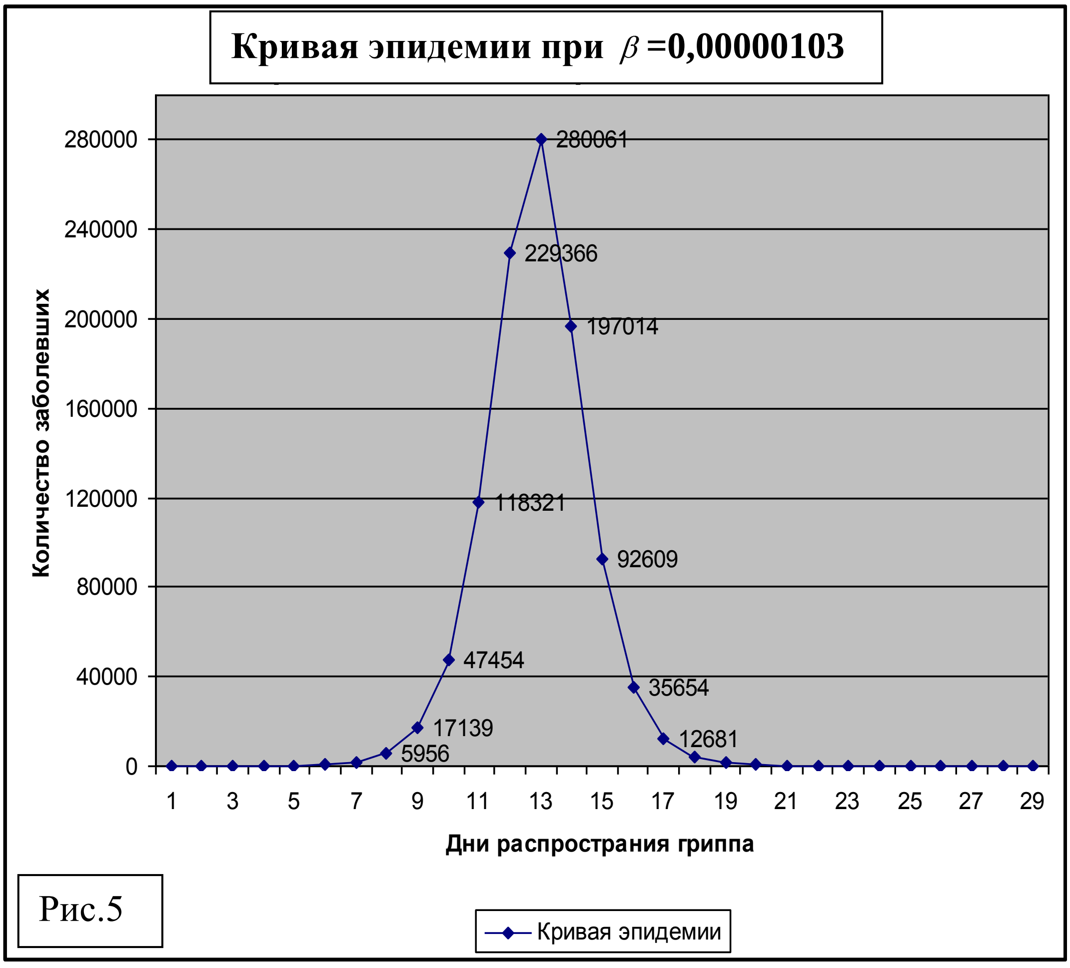
Кривая эпидемии при β =0,00000103
Количество заболевших
0
40000
80000
120000
160000
200000
240000
280000
280061
229366
197014
118321
92609
47454
35654
17139
12681
5956
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
Дни распространия гриппа
Кривая эпидемии

Рис.5

Очевидно, что процесс протекания гриппа зависит не только от коэффициента β, но также и от численности населения. Рассмотрим две другие модели развития эпидемии в городах с численностью населения n1=697 037, n2= 1 567 087 при сохранении начального количества заболевших a=9535 и коэффициента заболеваемости $\beta = 0{,}00000093$.

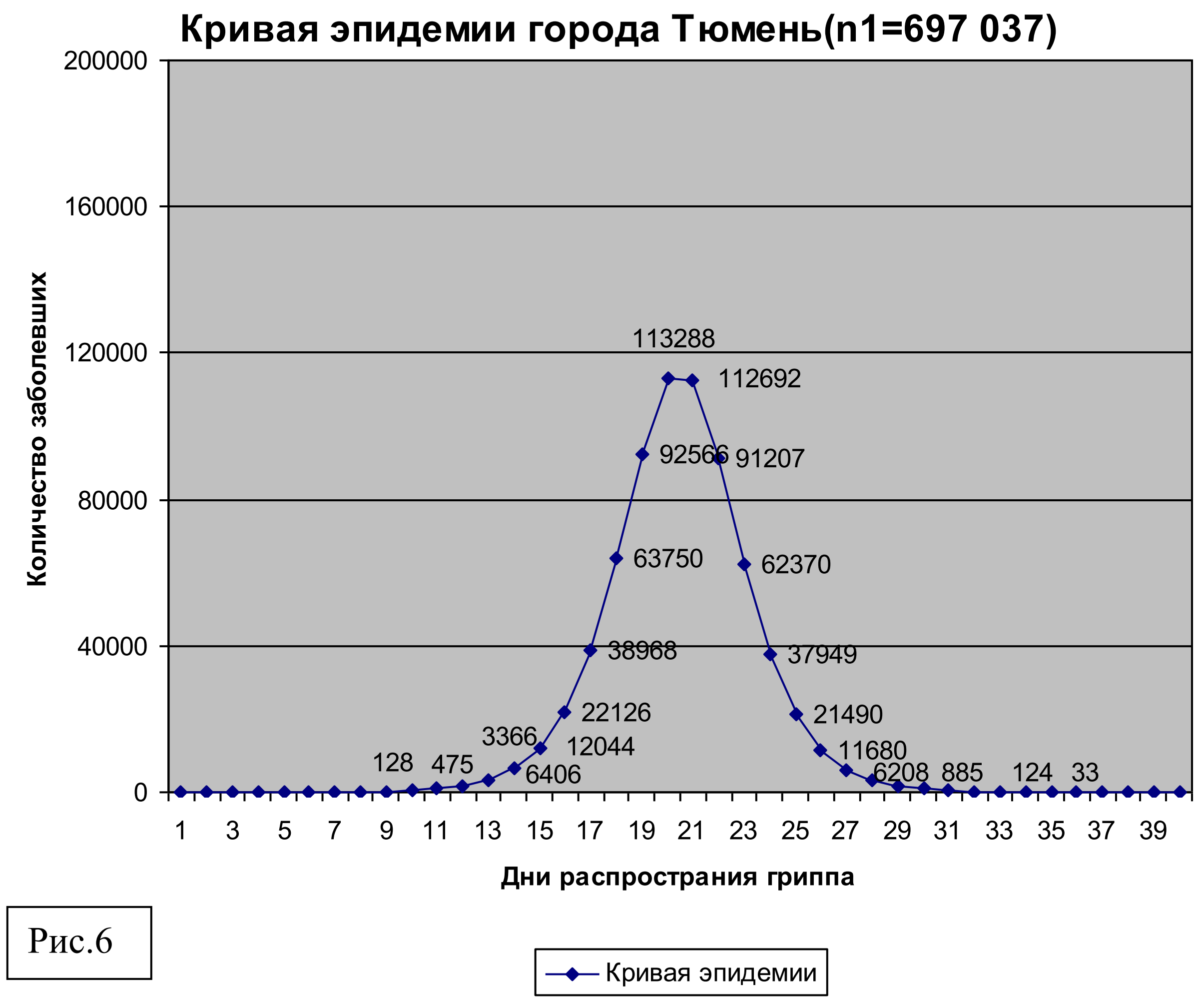

Рис.6

В соответствии с данными, отраженными на графике (рис.6), можно сделать вывод, что в городе Тюмень эпидемия будет распространяться медленно и количество заболевших также будет существенно ниже, чем в городе Пермь, но из-за «плавности» распространения гриппа, эпидемия будет длиться на 10 дней дольше.

Рис.7

Так, на основе графика (рис.7), можно заключить, что эпидемия будет развиваться быстро и интенсивно, количество больных в пик эпидемии будет составлять примерно 1/3 от численности населения города Новосибирск, но несмотря на пугающие данные, эпидемия пойдет на спад уже на 11 день, а через 20 дней и вовсе прекратится.

Данные модели могут служить в качестве информационной базы для самого общего случая. Однако если ввести в нее фактор выздоровления инфицированных особей, степень реалистичности и пригодности модели для прогнозирования значительно возрастет.

§3. Построение математической модели распространения гриппа с учетом выздоровления населения.

Теперь составим модель распространения гриппа с учетом выздоровления части населения. Сохраним начальные данные: численность населения n=1 036 469, количество больных гриппом a=9535, коэффициент скорости распространения гриппа $\beta = 0{,}00000093$. Необходимо ввести еще одну величину - $\gamma = 0{,}1$, характеризующую скорость выздоровления особи и определяется видом болезни и типом особи. Примем количество вылечившихся человек b=4000.

Поскольку данная система не имеет аналитического решения, воспользуемся численным методом Эйлера для решения системы дифференциальных уравнений.

Зададим начальные условия при t=0:

x_0=1 036 469, y_0=9535, z_0=4000, β = 0,00000093, γ = 0,1.

Подставив начальные условия в систему, получим:

$$\begin{cases} x' = -0{,}00000093 * 1036469 * 9565 = \text{-9191} \\ y' = 0{,}00000093 * 1036469 * 9565 - 0{,}1 * 9535 = 8237 \\ z' = 0{,}1 * 9535 = 954 \end{cases}$$

Так, чтобы определить количество не заболевших человек в 1 день эпидемии, необходимо вычислить x_1 по формуле $x_1 = x_0 + x'\Delta t$, где Δt =1. Тогда получим x_1=1 036 469+(-16979)*1=1027278.

Затем вычисляем количество больных и вылечившихся человек по тем же формулам и получаем:

y_1=17772

z_1=17772

Во 2 день эпидемии количество не заболевших человек будет

$x_2 = x_1 + x'\Delta t =$ 1027278+(-30982)*1=1010299,

количество больных y_2=32974 и количество вылечившихся z_2=19549.

Аналогично будут проводиться вычисления в 3,4,5…29 дни развития эпидемии. Следовательно, полученные данные можно записать в виде таблицы.

Дни	**x**	**y**	**z**
0	1036469	9535	4000
1	1027278	17772	17772
2	1010299	32974	19549
3	979317	60658	22846
4	924072	109837	28912
5	829680	193246	39896
6	680571	323030	59221
7	476115	495183	91524
8	256854	664925	141042
9	98021	757266	207535
10	28989	750571	283262
11	8754	695749	358319
12	3090	631838	427894
13	1274	570470	491078
14	598	514099	548125
15	312	462975	599535

16	178	416812	645833
17	109	375200	687514
18	71	337718	725034
19	49	303968	758806
20	35	273585	789203
21	26	246235	816562
22	20	221617	841186
23	16	199459	863348
24	13	179516	883294
25	11	161567	901246
26	9	145412	917403
27	8	130872	931944
28	7	117786	945031
29	6	106008	956810
30	5	95408	967411

Представленные в таблице данные также можно отобразить на графике (рис.7).

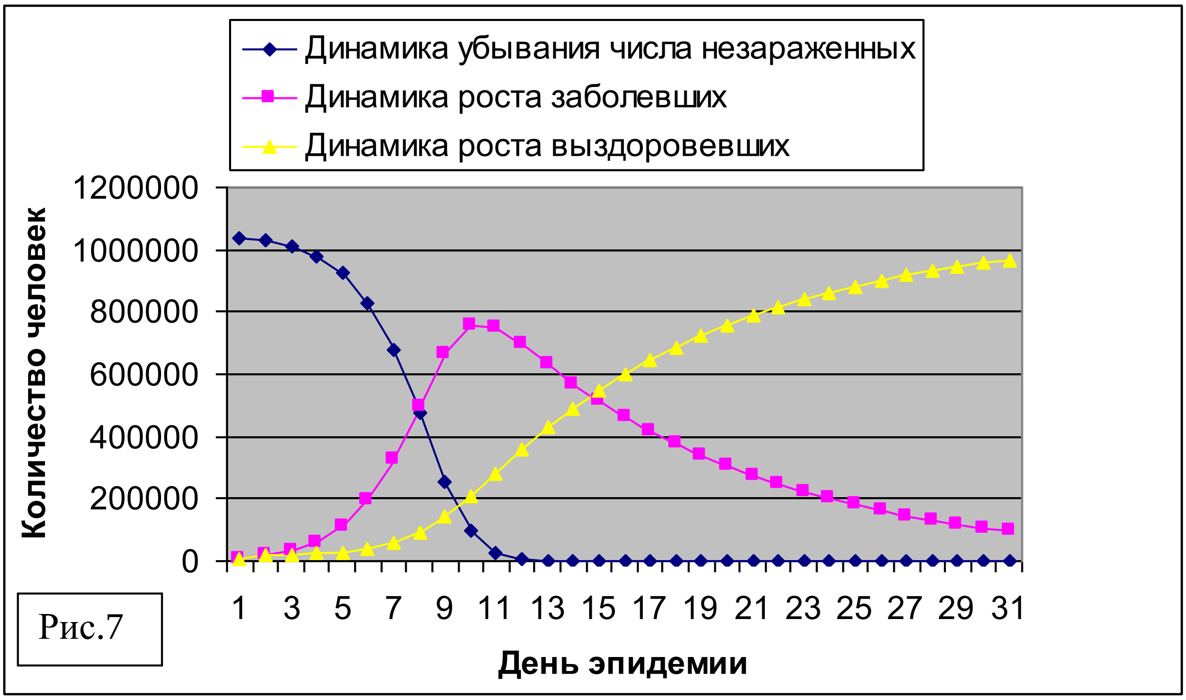

Рис.7

Предположим, что многие из жителей города были привиты от данного гриппа, тогда коэффициент, характеризующий скорость выздоровления особи, будет больше $\gamma = 0,8$. Подставив данное значение γ в систему уравнений и решив её, мы можем на графике(рис.8) определить зависимость динамики эпидемии от данного коэффициента.

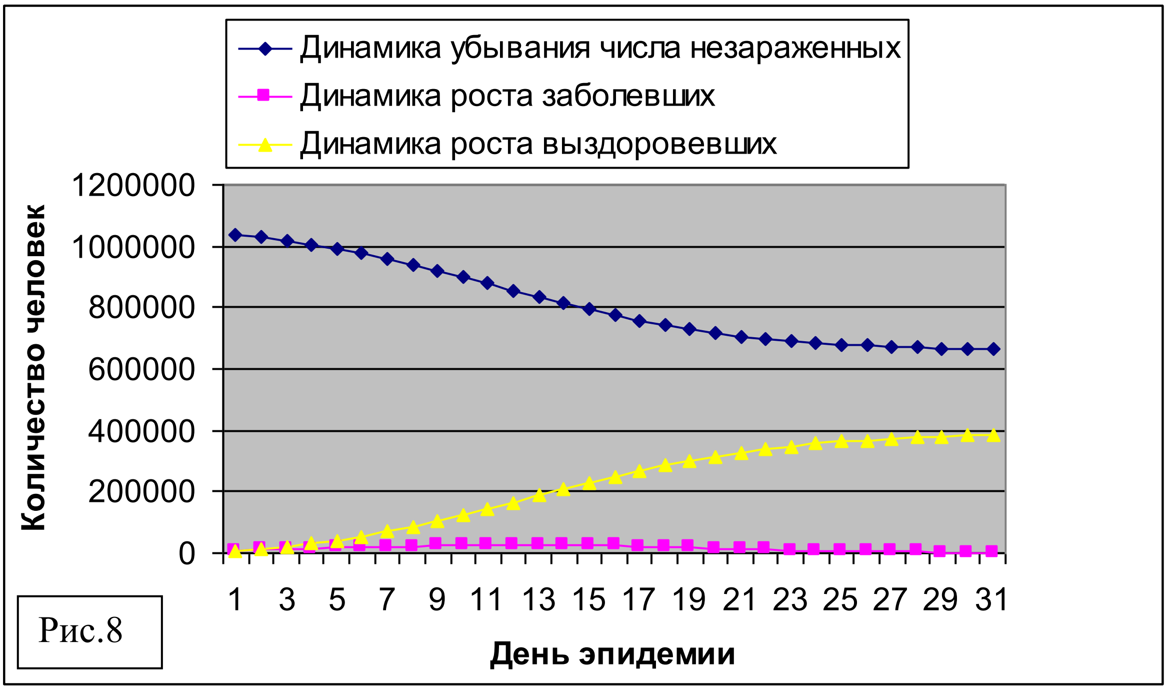

Рис.8

Таким образом, чем больше коэффициент γ, тем меньше людей подвержены заражению, и эпидемии, как таковой, не будет, возможны лишь частные случаи болезни, и, соответственно, чем коэффициент γ меньше, тем больше людей будет заражено, и эпидемия будет носить массовый характер. Следовательно, зная, сколько жителей города сделали прививки от гриппа, можно предсказать характер протекания эпидемии на период её начала.

Заключение.

Результаты проведенного мною исследования показывают, что посредством математических моделей, можно определять длительность эпидемии, характер её протекания и скорость развития, а также вычислить день, на который приходится пик эпидемии. Статистические данные 2015 года по уровню заболеваемости в городе Перми практически совпадают с результатами, полученными в процессе исследования, откуда можно сделать вывод, что данная модель является довольно эффективной и отображает приблизительное развитие эпидемии в течение определенного периода времени. Хочется отметить, что в процессе исследования также был выявлен ряд зависимостей, оказывающих влияние на распространение эпидемии. В процессе изучения необходимого для моей работы материала по дифференциальным уравнениям и составления математических моделей, я приобрела множество знаний и навыков, которые, я уверена, пригодятся мне в будущем.

В ходе изучения математического моделирования в различных сферах жизни, я осознала, что в области эпидемиологии ММ выполняет очень важную роль, так как в настоящее время мир оказался в положении, когда инфекционные заболевания имеют высокий потенциал к бесконтрольному распространению микроорганизмов и, причем, с беспрецедентно высокой скоростью. Многие современные явления, такие как урбанизация, нарастающее ухудшение социально-экологических и санитарно-гигиенических условий жизни, все возрастающие миграционные потоки и процессы глобализации экономики являются основными причинами быстрого распространения инфекционных заболеваний. С помощью методов математического и компьютерного моделирования эпидемий ученые изучают опасные для здоровья человека микроорганизмы, чтобы в дальнейшем разработать вакцины и лекарства против тех или иных болезней. Значительная угроза также исходит от высоких биотехнологий - генной инженерии и молекулярной биологии: модифицированные микроорганизмы могут стать первой причиной тяжелых эпидемий, например, в результате неконтролируемого их «выхода» из научных лабораторий и промышленных предприятий. Если же опасные патогены попадут в руки террористов, то это будет представлять смертельную угрозу для всего человечества. Поэтому математическое моделирование непременно является важным элементом в развитии эпидемиологии и изучению беспрестанно прогрессирующих инфекций.

Список используемой литературы.

1. Бейли Н. Математика в медицине и биологии . М.: Мир, 1970. – 326 с.
2. Зарипов Ш.Х. Введение в математическую экологию: учебно-методическое пособие, – Казань: Изд–во Казанского федерального университета, 2010. – 47 с.
3. В. И. Зенкин. Практический курс математического и компьютерного моделирования. Учеб. пособие. Калининград: изд. РГУ им. Канта, 2015. – 193 с.
4. А.Д. Мышкис. Лекции по высшей математике. М:. Наука, 1973,-640 с
5. Мусина М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям
6.[Электронный ресурс].- URL: https://www.youtube.com/watch?v=yxJUvmngBno
7.[Электронный ресурс].- URL: http://images.1233.tw/sir-model-assumptions/
8.[Электронный ресурс].- URL: https://www.youtube.com/watch?v=-e_igCrevl0
9.[Электронный ресурс].- URL: http://www.pedsovet.info/info/pages/referats/info_00002.htm
10.[Электронный ресурс].- URL: http://zvzda.ru/comet/1fb2b7479325
11.[Электронный ресурс].- URL: http://web.snauka.ru/issues/2013/04/23264
12.[Электронный ресурс].- URL: http://bono-esse.ru/blizzard/A/Posobie/Ecol/08.html