

**Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников по  
политехническим, естественнонаучным, математическим дисциплинам для  
учащихся 9-11 классов.**

Математическое моделирование

**Математическое моделирование взлёта и посадки космической ракеты**

Жилин Василий Александрович,

11А класс МБОУ “Лицей №1” г. Перми

Сызранцев Денис Алексеевич,

11А класс, МБОУ “Лицей №1” г. Перми

Научный руководитель:

Волегов Павел Сергеевич,

к.ф.-м.н., доцент каф. ММСП ПНИПУ

Пермь, 2016

## Оглавление

Abstract .....	3
Введение.....	4
Глава 1. Концептуальная постановка задачи моделирования .....	7
Глава 2. Математическая постановка задачи .....	10
Глава 3. Анализ результатов численного эксперимента.....	18
Взлёт .....	18
Манёвр.....	22
Посадка.....	24
Заключение .....	25
Список литературы .....	26

## **Abstract**

This research is devoted to the question of the rational usage of the resources when a space rocket is launched. This problem is very important to be solved as it allows to re-use the first stage and consequently to reduce the cost of the space research. The controlled landing of rocket first stage could be the solution of this problem.

The main subject of the work is flight of the rocket first stage.

The aim of the research is to create a mathematical model of the space rocket taking off and landing.

To achieve the aim it was necessary to accomplish the following tasks:

- to study theoretical literature describing a movement of object with variable mass;
- to find out the rational solution of the controlled landing problem of the rocket first stage;
- to create the mathematical model of the rocket tacking off and landing account the factors above;
- to analyze this model.

During the research the mathematical model has been created. It allows to determine the rocket trajectory and to find dependences position, velocity and acceleration on the time.

In conclusion it should be noted, that the results of this work maybe different from results of other work because of the accepted hypothesis.

## Введение

4 октября 1957 года человек запустил первый спутник на орбиту Земли. Это событие послужило мощным толчком в развитии ракетостроения. Также эта дата считается началом космической эры [1]. В космосе можно проводить эксперименты, которые нельзя осуществить на Земле. Однако каждый полёт в космос сопровождается огромными затратами дорогостоящих материалов и топлива, что создаёт препятствия для более интенсивного изучения космоса. Одним из возможных решений данной проблемы может быть использование многоразовые ракет-носителей, которые доставляют грузы на орбиту. Сейчас стоимость запуска ракеты-носителя Falcon 9 составляет около \$60 млн., причем лишь \$200 тыс. из этой суммы приходится на топливо, кислород и другие расходующиеся в полете материалы [2]. Несмотря на то, что стоимость запуска увеличится за счет затрат на топливо, на экспедицию по возвращению ступеней к месту старта, на восстановление ступеней, оценку работоспособности, заправку топливом, тем не менее, возможность многократного использования ракеты существенно уменьшит стоимость одного полета.

Космическое пространство (космос) – относительно пустые участки Вселенной, которые лежат вне границ атмосфер небесных тел. Вопреки распространённым представлениям, космос не является абсолютно пустым пространством – в нём существует очень низкая плотность некоторых частиц (преимущественно водорода), а также электромагнитное излучение и межзвездное вещество [3].

Ракета-носитель (рис. 1) – многоступенчатая баллистическая ракета, предназначенная для выведения полезной нагрузки в космическое пространство [4].



Рис.1. Ракета-носитель «Протон-М»

**Цель** данной работы – разработать и исследовать математическую модель взлёта и посадки ракеты-носителя.

Задачами исследовательской работы являются:

- нахождение наиболее рационального решения проблемы управляемой посадки ракеты-носителя;
- нахождение точки земного шара, из которой наиболее выгодно запускать ракету;
- определение наиболее подходящего места посадки.

Для достижения цели исследования наиболее подходят методы математического моделирования, так как натурные эксперименты имеют слишком высокую стоимость: например, общая стоимость запуска ракеты-носителя «Протон-М» с разгонным блоком «Бриз-М» в 2013 году составляла порядка 2,84 млрд. рублей (около \$80 млн.) [5].

В ходе работы будет исследовано поведение космической ракеты, состоящей из двухступенчатой ракеты-носителя и полезного груза, который необходимо доставить на орбиту.

Математическая модель должна позволять:

- определять положение ракеты-носителя в любой момент времени;
- рассматривать различные экстренные ситуации (отказ аэродинамического руля, утечка топлива).

Для решения данной задачи методами математического моделирования нам понадобятся некоторые входные данные:

- масса ракеты-носителя (32,7 т);
- масса полезного груза (13,15 т);
- начальная масса топлива (517,1 т);
- длина ракеты (68,4 м);
- диаметр ракеты (3,7 м);
- скорость расхода топлива (2,9 т/с);
- максимальная тяга (6800 кН).

Характеристики ракеты соответствуют характеристикам ракеты-носителя Falcon 9 v1.1 (R), который выводит на орбиту транспортный космический корабль Dragon [6].

## Глава 1. Концептуальная постановка задачи моделирования

**Объектом исследования** будем считать комплекс из ракеты-носителя и выводимого на орбиту груза (рис. 2).

Для упрощения разработки математической модели примем несколько гипотез:

1. Ракету-носитель будем считать абсолютно твёрдым телом цилиндрической формы с конусом на конце. Посадочные стойки ракеты будем считать упругими.
2. Масса ракеты изменяется со временем за счет сгорания топлива.
3. Движение ракеты будем описывать законами классической механики Ньютона, так как максимальная скорость ракеты много меньше скорости света.

4. В ходе нашего исследования будем рассматривать движение ракеты в трёхмерном пространстве, также ракета может вращаться вокруг трёх осей. Поэтому ракета имеет шесть степеней свободы. Для описания ориентации ракеты в пространстве мы будем использовать три оси координат ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ), а также три оси вращения, характеризующиеся следующими углами:

- $\alpha$  – угол между проекцией ракеты на плоскость  $Xy$  и  $Ox$ ;
- $\beta$  – угол между проекцией ракеты на плоскость  $Xy$  и осью ракеты;
- $\gamma$  – угол поворота ракеты относительно главной оси ракеты (рис. 3).



Рис. 2. Ракета-носитель с полезным грузом

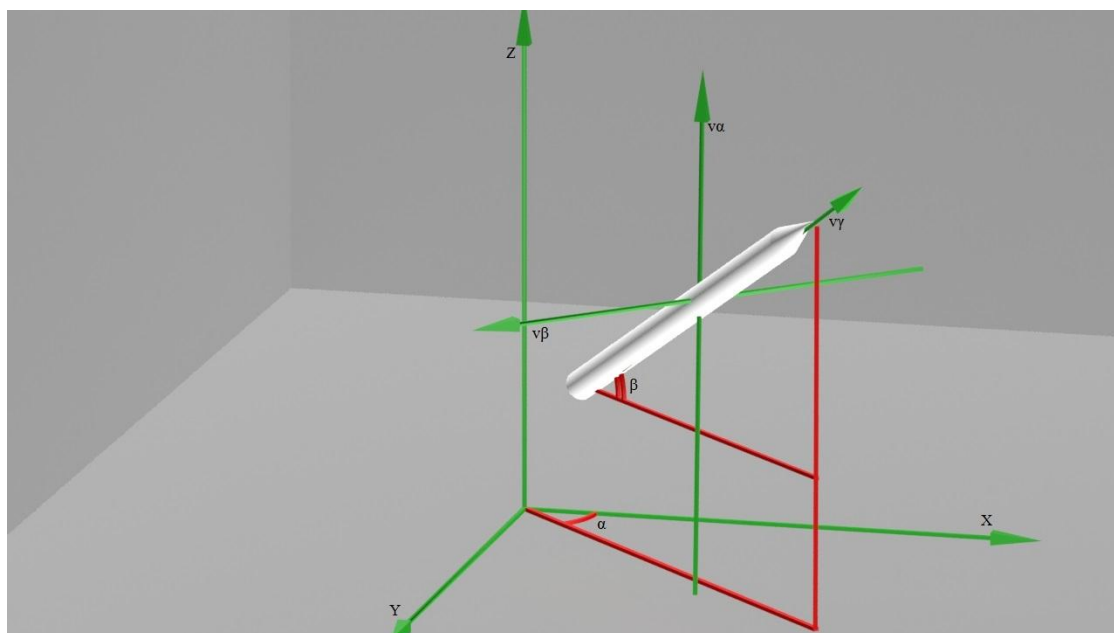


Рис. 3. Степени свободы ракеты

5. На ракету действуют сила сопротивления воздуха, в общем случае зависящая от плотности, которая изменяется с высотой, и сила давления ветра.
6. Тяга развивается за счёт двигателей, находящихся в нижней части ракеты. В носовой части ракеты расположены двигатели, обеспечивающие управление полётом ракеты, и аэродинамические рули. В нижней части ракеты расположены посадочные стойки, обеспечивающие мягкую посадку.
7. Место взлёта будем считать плоской и абсолютно твердой поверхностью.
8. Траекторию ракеты будем корректировать при помощи тяги двигателей в хвостовой и носовой части ракеты, а также угла наклона аэродинамических лопастей (рис. 4).





Рис. 4. Способы корректировки траектории ракеты

## Глава 2. Математическая постановка задачи

В математической модели будем выделять несколько основных фаз полёта ракеты:

- Взлёт – участок траектории ракеты от запуска основных двигателей до отсоединения второй ступени. Здесь участвуют только основные двигатели ракеты.
- Манёвр – участок траектории ракеты с момента отсоединения второй ступени и до запуска тормозных двигателей. Здесь участвуют основные и боковые двигатели.
- Посадка – участок траектории ракеты с момента запуска тормозных двигателей и до приземления на посадочную платформу. Здесь участвуют основные двигатели и аэродинамические рули.

Для описания траектории движения ракеты воспользуемся классическими законами механики. Ракета во время полёта совершает поступательное и вращательное движение. Для описания поступательного движения в произвольный момент времени будем использовать уравнение Мещерского (1):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^9 \mu_i \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{тяги,i}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}_p$  – равнодействующая сил, действующих на ракету,  $\mathbf{F}_{тяги,i}$  – сила развиваемая  $i$ -тым двигателем,  $\mathbf{a}$  – вектор ускорения ракеты,  $m$  – масса ракеты,  $\mu_i$  – скорость выброса топлива  $i$ -тым двигателем,  $\mathbf{u}_i$  – относительная скорость выбрасываемого топлива  $i$ -тым двигателем.

Для описания массы в каждый момент времени запишем уравнение изменения массы:

$$m(t) = m_0 - \Delta t \left( \sum_{i=1}^9 \mu_i + \Delta\mu_{b1} + \Delta\mu_{b2} \right), \quad (2)$$

где  $\Delta\mu_{b1}$ ,  $\Delta\mu_{b2}$  – массы топлива, выброшенного боковыми двигателями,  $m_0$  – масса полностью заправленной ракеты,  $\mu_i$  – скорость выброса топлива  $i$ -тым двигателем.

Запишем, какие силы действуют на ракету в полёте. Сила тяги боковых двигателей не окажет влияния на скорость ракеты так как они взаимно перпендикулярны друг другу. Разложим на составляющие равнодействующую силу:

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{л.б} + \mathbf{F}_{ветра}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}_G$  – сила гравитационного притяжения Земли,  $\mathbf{F}_{л.б}$  – сила лобового сопротивления,  $\mathbf{F}_{ветра}$  – сила воздействия ветра.

Для описания гравитационных сил, действующих на ракету со стороны Земли, запишем закон всемирного тяготения (4):

$$F_G = G \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2}, \quad (4)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $M_3$  – масса Земли,  $R_3$  – радиус Земли,  $h$  – высота полёта ракеты над уровнем моря.

Спроецируем силу гравитационного притяжения на оси координат. Проекция на оси  $X$  и  $Y$  равны нулю, так как вектор силы всемирного тяготения перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти оси:

$$F_{G,z} = -G \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2} = -G \frac{M_3 m}{(R_3 + z)^2}. \quad (5)$$

Для описания сил сопротивления воздуха, действующих на ракету, запишем закон лобового сопротивления для вытянутых тел.:

$$\mathbf{F}_{л.с.} = -C \frac{q z v}{2} V^{\frac{2}{3}} \mathbf{v}, \quad (6)$$

где  $C$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $V$  – объём ракеты,  $q(z)$  – плотность среды, в общем случае зависящая от высоты,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости ракеты,  $v$  – модуль скорости ракеты.

Плотность в зависимости от высоты будем находить при помощи распределения Больцмана для концентрации газа:

$$q(z) = q(0) \exp\left(-\frac{\mu_{газ} g z}{R_{газ} T}\right), \quad (7)$$

где  $\mu_{газ}$  – молярная масса газа,  $g$  – ускорение свободного падения,  $R_{газ}$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура газа.

Спроецируем силу сопротивления воздуха на оси координат, и учтём, что она направлена против скорости ракеты:

$$\begin{aligned} F_{л.с.X} &= -C \frac{q v v_x}{2} V^{\frac{2}{3}}, \\ F_{л.с.Y} &= -C \frac{q v v_y}{2} V^{\frac{2}{3}}, \\ F_{л.с.Z} &= -C \frac{q v v_z}{2} V^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – проекции скоростей ракеты на оси  $x, y, z$  соответственно.

Сила ветра будет задаваться случайно, для проверки стабильности ракеты в момент взлета и посадки. Она имеет три проекции на оси координат  $F_{ветра,X}, F_{ветра,Y}, F_{ветра,Z}$ , соответственно для  $x, y, z$ .

Для описания ориентации ракеты в пространстве мы используем три угла:

- угол  $\alpha$  – угол между проекцией главной оси ракеты на плоскость координат  $XU$  и осью  $OX$ .
- угол  $\beta$  – угол между проекцией ракеты на плоскость  $XU$  и главной осью ракеты.
- угол  $\gamma$  – угол поворота ракеты относительно главной оси ракеты.

Используя введённые углы, спроецируем силы тяги на все три оси координат:

$$\begin{aligned} F_{тяги,X} &= \sum_{i=1}^9 \cos \beta \cos \alpha F_{тяги,i}, \\ F_{тяги,Y} &= \sum_{i=1}^9 \cos \beta \sin \alpha F_{тяги,i}, \\ F_{тяги,Z} &= \sum_{i=1}^9 \sin \beta F_{тяги,i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем уравнение Мещерского в проекции на оси координат:

$$a_x m = F_{л.с,X} + F_{ветра,X} + \sum_{i=1}^9 \cos \beta \cos \alpha F_{тяги,i},$$

$$a_Y m = F_{лс,Y} + F_{всра,Y} + \sum_{i=1}^9 \cos \beta \sin \alpha F_{тяги,i},$$

$$a_Z m = F_{G,Z} + F_{лс,Z} + F_{всра,Z} + \sum_{i=1}^9 \sin \beta F_{тяги,i}. \quad (10)$$

Теперь для описания вращательного движения запишем уравнение моментов по трём осям вращения:

- Ось вращения  $\nu\alpha$ , которая проходит через центр масс ракеты и перпендикулярна плоскости координат XY. Положение ракеты относительно этой оси определяется ранее введенным углом  $\alpha$ .
- Ось вращения  $\nu\beta$ , которая проходит через центр масс ракеты и параллельна плоскости координат XY. Положение ракеты относительно этой оси определяется ранее введенным углом  $\beta$ .
- Ось вращения  $\nu\gamma$ , которая проходит по высоте, от которой образован цилиндр ракеты. Положение ракеты относительно этой оси определяется ранее введенным углом  $\gamma$ .

Запишем уравнение основное уравнение динамики вращения на ось  $\nu\alpha$ :

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{B}_\alpha I, \quad (11)$$

$$I_{цм,\alpha} = \sum_j \cos^2 \beta r_j^2 m_j = I_{цм,\beta} \cos^2 \beta, \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{Fk}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{M}$  – момент силы,  $r_j$  – расстояние до элементарной массы,  $m_j$  – элементарная масса,  $\mathbf{k}$  – плечо вращающегося тела,  $\mathbf{B}_\alpha$  – угловое ускорение по оси вращения  $\nu\alpha$ ,  $I_{цм,\beta}$  – момент инерции тела с осью вращения в центре масс и перпендикулярной оси симметрии ракеты.

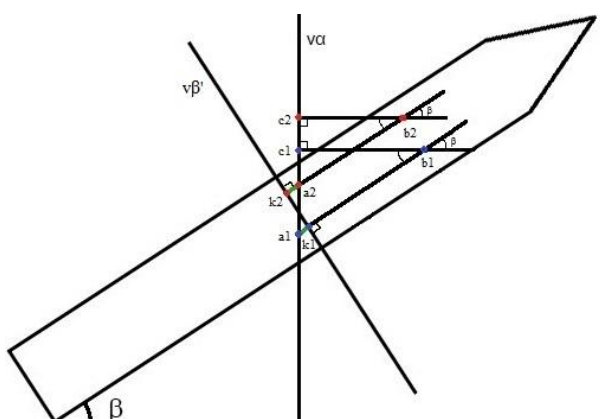


Рис. 5. Момент инерции.

Возьмём две точки  $b_1, b_2$  (рис.5) на одинаковом расстоянии от оси симметрии ракеты и найдём плечо для момента инерции тела по оси  $\nu\alpha$  (прямые  $c_1b_1, c_2b_2$ : их можно найти, как произведение

прямых  $b1a1$ ,  $b2a2$  на  $\cos \beta$ ). Прямые  $b1a1$ ,  $b2a2$  можно представить, как плечо ( $a1b1$ ,  $k2b2$ ) для оси вращения  $v\beta'$  плюс и минус отрезки  $k1a1$ ,  $k2a2$ , умноженные на  $\cos \beta$ , которые при сложении сократятся, и мы получим сумму плеч ( $a1b1$ ,  $k2b2$ ), умноженную на  $\cos \beta$ . Аналогичные рассуждения можно провести для всех остальных плеч, то есть можно вынести квадрат  $\cos^2 \beta$  за знак суммирования.

Плечо для девяти двигателей можно записать в предположении, что один из девяти двигателей расположен на оси симметрии ракеты и двигатели расположены симметрично, с учётом проекции на плоскость XY (рис. 6):

$$K_i = R \cos\left(\gamma + i \frac{\pi}{4}\right), \quad (14)$$

где  $K_i$  – плечо для  $i$ -ого двигателя в проекции на ось вращения  $v\alpha$ ,  $R$  – радиус расположения двигателей ракеты,  $\gamma$  – угол поворота ракеты относительно оси  $v\gamma$ .

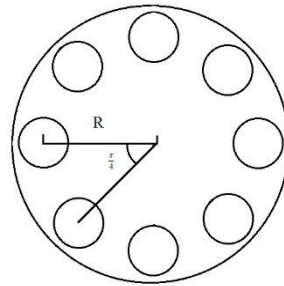


Рис. 6. Расположение двигателей

Запишем момент силы тяги для одного из восьми двигателей в проекции на ось  $v\alpha$ , учитывая, что сила направлена под некоторым углом к этой оси:

$$M_i = K_i F_{тяги,i} \cos \beta, \quad (15)$$

Запишем момент силы тяги боковых двигателей для оси  $v\alpha$ :

$$M_{b\alpha} = K_b (F_{тяги,b1} - F_{тяги,b2}) \sin \gamma, \quad (16)$$

где  $M_{b\alpha}$  — суммарный момент боковых двигателей для оси вращения  $v\alpha$ ,  $K_b$  — плечо для силы тяги боковых двигателей (расстояние от центра масс до двигателей),  $F_{тяги,b1,b2}$  — силы тяги двух боковых двигателей.

На ось  $v\alpha$  при посадке также будет действовать подъёмная сила крыла, её момент равен:

$$\begin{aligned}
M_{под\alpha} &= DC_{кр} \frac{qV_{ном}^2}{2} S_{хар} (\sin(2l_1)\cos(\gamma) + \sin(2l_2)\cos(\gamma + \pi/2) + \\
&+ \sin(2l_3)\cos(\gamma + \pi) + \sin(2l_4)\cos(\gamma + 3\pi/2)) = \\
&= DC_{кр} \frac{qV_{ном}^2}{2} S_{хар} ((\sin(2l_1) - \sin(2l_3))\cos(\gamma) + \\
&+ (\sin(2l_4) - \sin(2l_2))\sin(\gamma)),
\end{aligned} \tag{17}$$

где  $M_{под\alpha}$  – момент подъёмной силы для оси вращения  $\nu\alpha$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  – углы поворота аэродинамических рулей относительно ракеты,  $D$  – расстояние от центра масс до аэродинамических лопастей.

Подставим моменты из формул (15)–(16) в основное уравнение динамики вращательного движения и выразим отсюда угловое ускорение:

$$\sum M = \sum_1^8 M_i + M_{b\alpha} + M_{под\alpha}, \tag{18}$$

$$B_\alpha I_{цм,\alpha} = \sum_1^8 M_i + M_{b\alpha} + M_{под\alpha}, \tag{19}$$

$$B_\alpha I_{цм,\beta} \cos^2 \beta = \sum_1^8 F_{тяги,i} R \sin(\gamma + i \frac{\pi}{4}) + K_b (F_{тяги,b1} - F_{тяги,b2}) \sin \gamma + M_{под\alpha}. \tag{20}$$

Аналогично запишем уравнение основное уравнение динамики вращения на ось  $\nu\beta$ :

$$I_{цм,\beta} = \sum_j r_j^2 m_j, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
B_\beta I_{цм,\beta} &= \sum_1^8 F_{тяги,i} R \sin(\gamma + i \frac{\pi}{4}) + K_b (F_{тяги,b1} - F_{тяги,b2}) \cos \gamma + \\
DC_{кр} \frac{qV_{ном}^2}{2} S_{хар} &((\sin(2l_1) - \sin(2l_3))\sin(\gamma) + (\sin(2l_4) - \sin(2l_2))\cos(\gamma)).
\end{aligned} \tag{22}$$

Запишем уравнение основное уравнение динамики вращения на ось  $\nu\gamma$ :

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{B}_\gamma I_{зл,ось}, \tag{23}$$

$$I_{зл,ось} = \sum_j r_j^2 m_j, \tag{24}$$

где  $\mathbf{M}$  – момент силы,  $r_j$  – расстояние до элементарной массы,  $m_j$  – элементарная масса,  $I_{зл,ось}$  – момент инерции тела для оси симметрии ракеты.

На ось  $v\gamma$  действует момент вращения лишь при посадке, потому что использование аэродинамических рулей производится для более точной корректировки положения ракеты. Всего аэродинамических рулей четыре и они симметрично расположены в носу ракеты. Каждый из рулей характеризуется углом поворота  $l_1, l_2, l_3, l_4$  относительно ракеты. На каждый из рулей действует подъёмная сила, описываемая уравнением:

$$Y = C_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар}, \quad (25)$$

где  $C_{кр}$  – коэффициент лобового сопротивления крыла,  $S_{хар}$  – наибольшая площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной потоку,  $u_{пот}$  – скорость набегающего потока,  $q$  – плотность среды в которой движется ракета.

Подъёмная сила перпендикулярна направлению потока. Плечо для этих сил равно радиусу ракеты. Скорость потока противоположна по направлению и равна по модулю скорости ракеты. Скорость ракеты при посадке параллельна главной оси ракеты. Значит, проекция момента подъёмной силы на ось  $v\gamma$  будет иметь вид:

$$M_{под\gamma} = RC_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар} (\sin(2l_1) + \sin(2l_2) + \sin(2l_3) + \sin(2l_4)), \quad (26)$$

где  $M_{под\gamma}$  – момент подъёмной силы для оси вращения  $v\gamma$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  – углы поворота аэродинамических рулей относительно ракеты.

Поставим момент основное уравнение динамики вращения на ось  $v\gamma$ :

$$B_\gamma I = M_{под\gamma}, \quad (27)$$

$$B_\gamma I_{пл,ось} = RC_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар} (\sin(2l_1) + \sin(2l_2) + \sin(2l_3) + \sin(2l_4)). \quad (28)$$

Таким образом, общая система дифференциальных уравнений движения ракеты для математической модели будет иметь вид:



$$\begin{aligned}
\ddot{x}m_t &= -C \frac{qv v_x}{2} V^{\frac{2}{3}} + F_{ветра, X} + \sum_{i=1}^9 \cos \beta \cos \alpha F_{тяги, i}, \\
\ddot{y}m_t &= -C \frac{qv v_y}{2} V^{\frac{2}{3}} + F_{ветра, Y} + \sum_{i=1}^9 \cos \beta \sin \alpha F_{тяги, i}, \\
\ddot{z}m_t &= -G \frac{M_3 m}{(R_3 + z)^2} - C \frac{qv v_z}{2} V^{\frac{2}{3}} + F_{ветра, Z} + \sum_{i=1}^9 \sin \beta F_{тяги, i}, \\
m_t &= m_0 - \Delta t \left( \sum_{i=1}^9 \mu_i + \Delta \mu_{b1} + \Delta \mu_{b2} \right), \\
q(z) &= q(0) \exp \left( -\frac{\mu_{газ} g z}{R_{газ} T} \right), \\
\ddot{\alpha} I_{цм\beta} \cos^2 \beta &= \sum_{i=1}^8 F_{тяги, i} R \sin \left( \gamma + i \frac{\pi}{4} \right) + K_b (F_{тяги, b1} - F_{тяги, b2}) \sin \gamma + \\
&+ DC_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар} ((\sin(2l_1) - \sin(2l_3)) \cos(\gamma) + (\sin(2l_4) - \sin(2l_2)) \sin(\gamma)), \\
\ddot{\beta} I_{цм\beta} &= \sum_{i=1}^8 F_{тяги, i} R \sin \left( \gamma + i \frac{\pi}{4} \right) + K_b (F_{тяги, b1} - F_{тяги, b2}) \cos \gamma + \\
&+ DC_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар} ((\sin(2l_1) - \sin(2l_3)) \cos(\gamma) + (\sin(2l_4) - \sin(2l_2)) \sin(\gamma)), \\
I_{цм\beta} &= \sum_j r_j^2 m_j, \\
\ddot{\gamma} I_{зл, ось} &= RC_{кр} \frac{qv_{nom}^2}{2} S_{хар} (\sin(2l_1) + \sin(2l_2) + \sin(2l_3) + \sin(2l_4)), \\
I_{зл, ось} &= \sum_j r_j^2 m_j, \\
x(0) &= 0; \dot{x}(0) = 0; \alpha(0) = \pi / 12; \dot{\alpha}(0) = 0, \\
y(0) &= 0; \dot{y}(0) = 0; \beta(0) = 5\pi / 12; \dot{\beta}(0) = 0, \\
z(0) &= 0; \dot{z}(0) = 0; \gamma(0) = 0; \dot{\gamma}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

### Глава 3. Анализ результатов численного эксперимента

В ходе исследования математической модели движения ракеты в трехмерном пространстве была проведена серия численных экспериментов. Модель реализована численно в математическом пакете Wolfram Mathematica. В качестве параметров модели были взяты параметры ракеты Falcon 9.

Модель позволяет рассмотреть три этапа полета ракеты:

- взлёт;
- маневр;
- посадка.

#### Взлёт

Рассмотрим движение ракеты с момента старта до отсоединения второй ступени. В этом процесс ракета движется под действием постоянной тяги главных двигателей, силы тяжести и сил лобового сопротивления.

В ходе исследования данного процесса были получены зависимости координат центра масс ракеты (рис. 8), ее скорости и ускорения от времени полета (рис. 9, 10). Для того, чтобы полет ракеты происходил по оптимальной траектории для вывода полезного груза на орбиту, зададим начальные углы как

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{12}, \beta_0 = \frac{5\pi}{12}, \gamma_0 = 0.$$

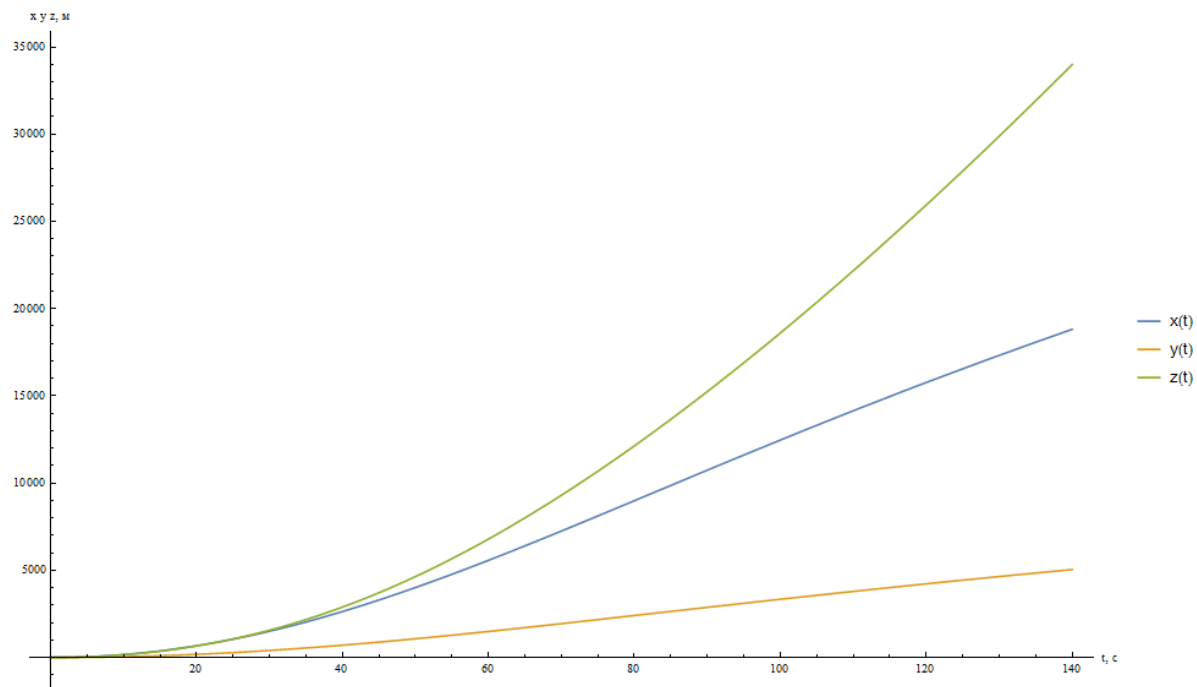


Рис.8 График зависимости координат от времени

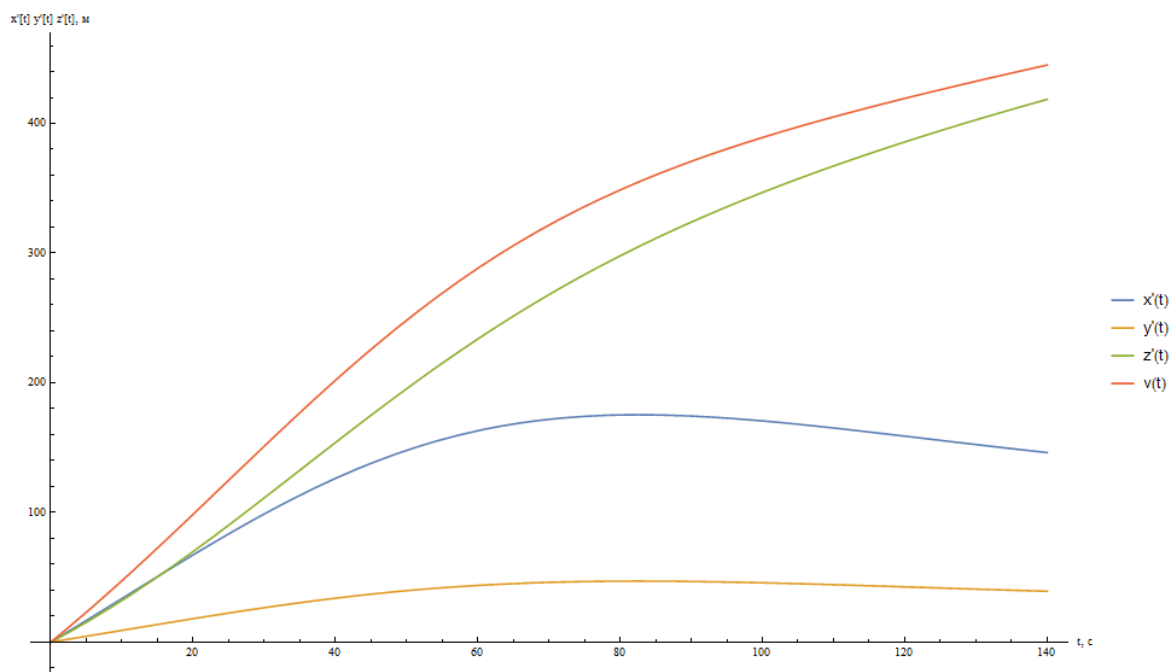


Рис.9. График зависимости проекций и модуля скорости от времени

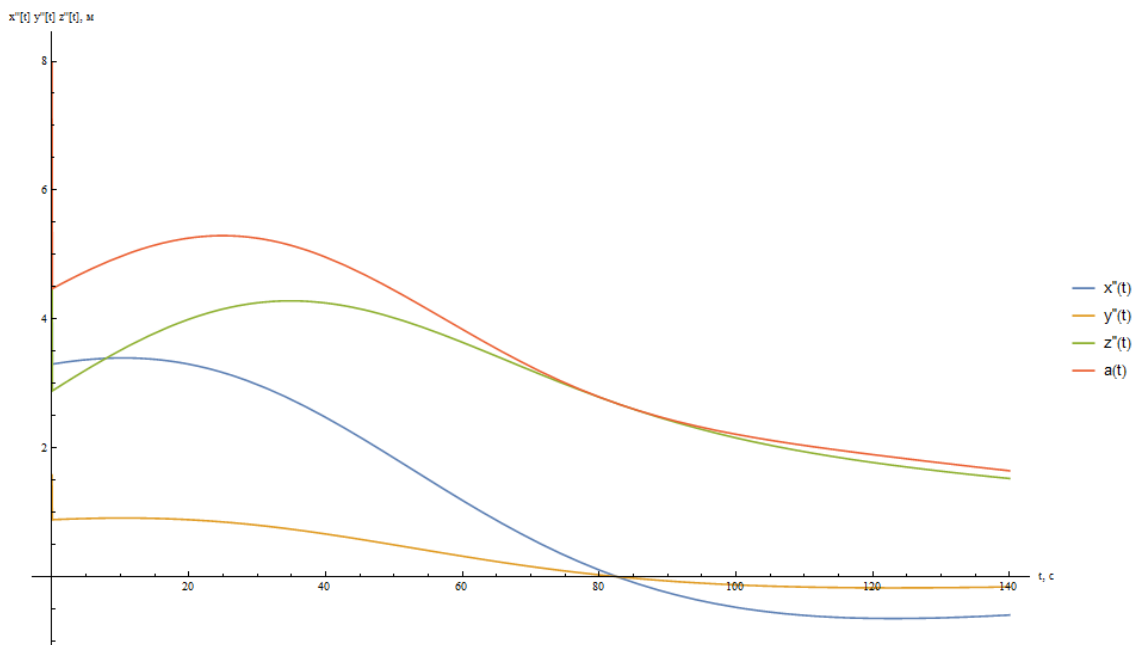


Рис.10 График зависимости проекций и модуля ускорения от времени

Также получены зависимости углов, задающих ориентацию ракеты в пространстве (рис.11).

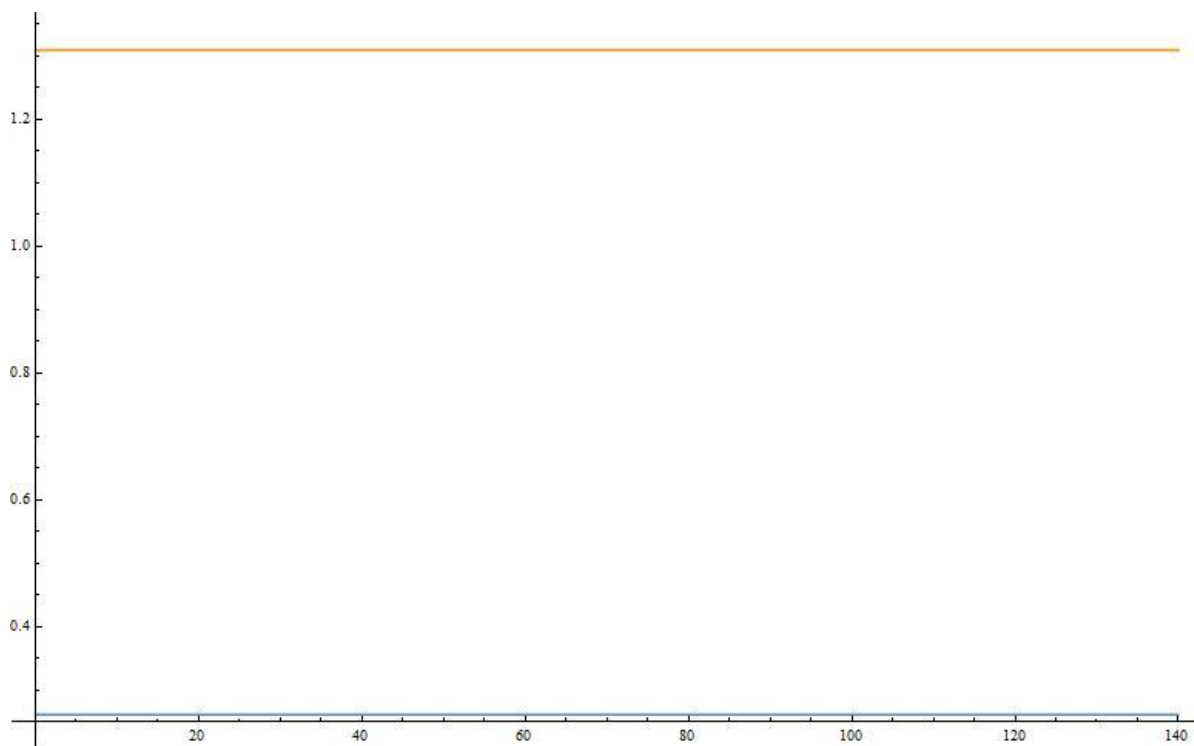


Рис.11 График зависимости углов  $\alpha, \beta$  от времени

На рис. 12 изображён график зависимости массы ракеты от времени.

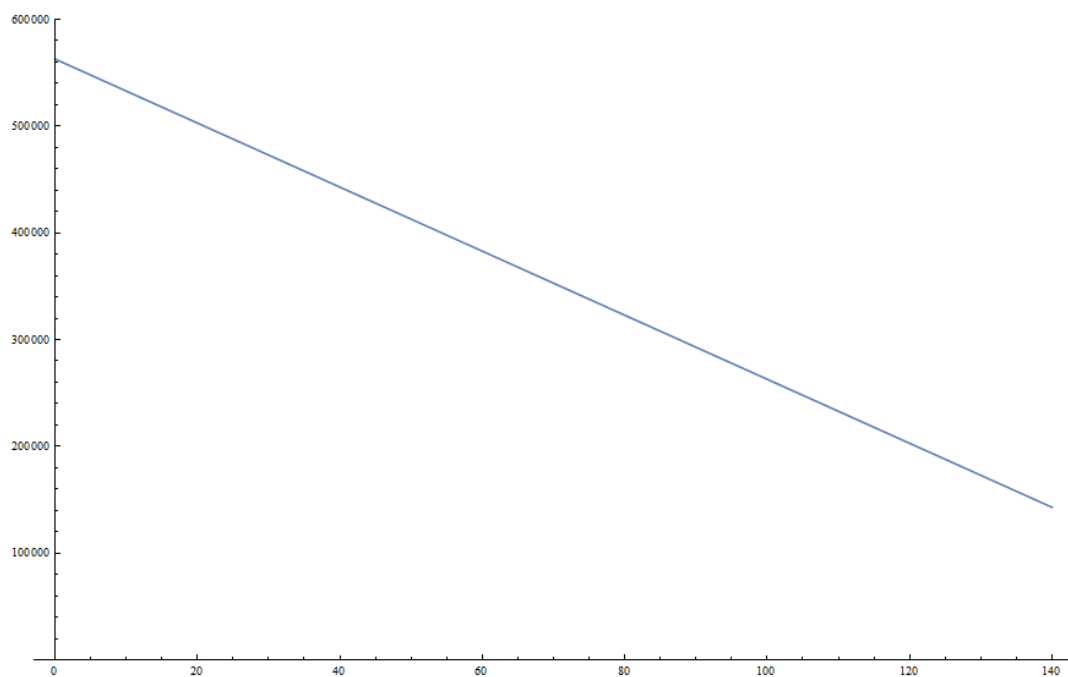


Рис.12 График зависимости массы ракеты от времени

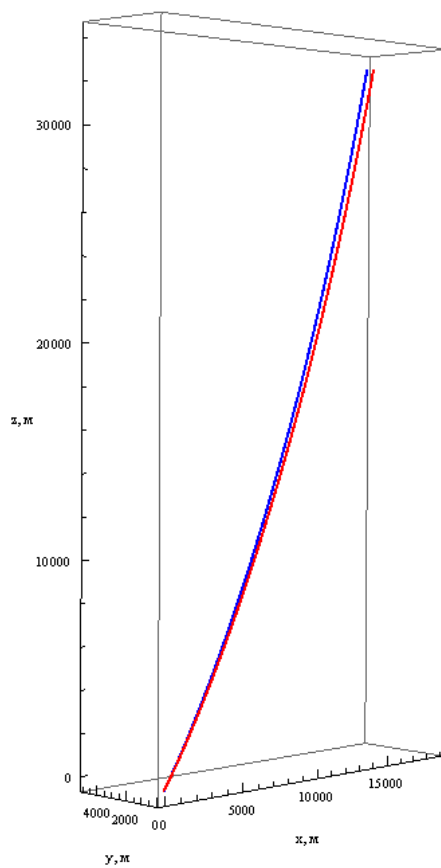


Рис.13. Траектория ракеты во время взлёта

Также было исследовано поведение ракеты при взлете при наличии сильного бокового ветра. На рис. 13 приведено сравнение траекторий движения ракеты при отсутствии (красный цвет) и наличии бокового ветра, направленного против оси ОУ со скоростью 10 м/с (синий цвет). Заметно, что при наличии сильного ветра не происходит существенного изменения траектории полета ракеты, что свидетельствует об устойчивости процесса взлета.

### **Манёвр**

При выходе ракеты на требуемую орбиту для того, чтобы во время посадки сила тяги основных двигателей была направлена перпендикулярно поверхности Земли, требуется совершить маневр, который заключается в приведении ракеты в вертикальное положение. Во время манёвра основные двигатели выключаются. За счёт действия боковых двигателей ракета поворачивается перпендикулярно поверхности Земли. После этого выключаются боковые двигатели, и ракета продолжает движение под действием силы земного тяготения. Рассмотрим промежуток времени между включением боковых двигателей и выходом ракеты в требуемое положение, при этом будем считать, что в начальном положении ракета ориентирована произвольным образом (для определенности угол  $\beta_0 = 1$  рад).

В ходе исследования процесса маневра были получены зависимость угла  $\beta$  от времени и траектория центра масс ракеты (рис. 14, 15).

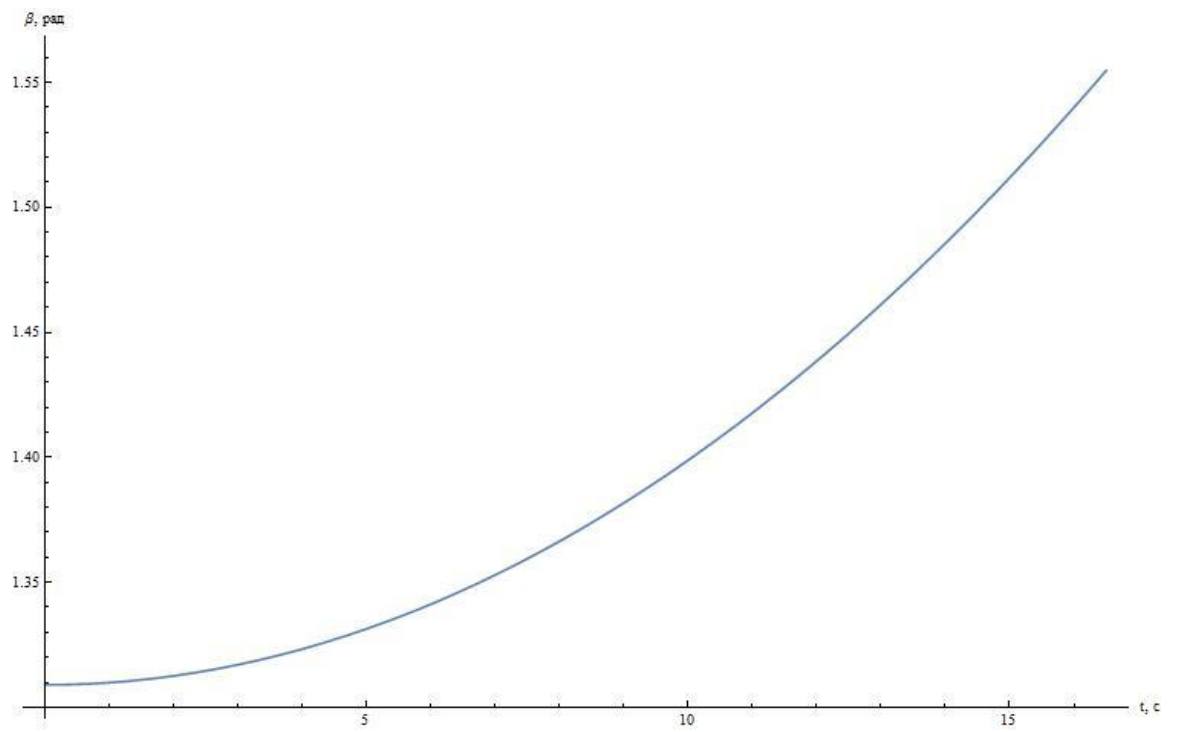


Рис.14. График изменения угла  $\beta$  во время маневра

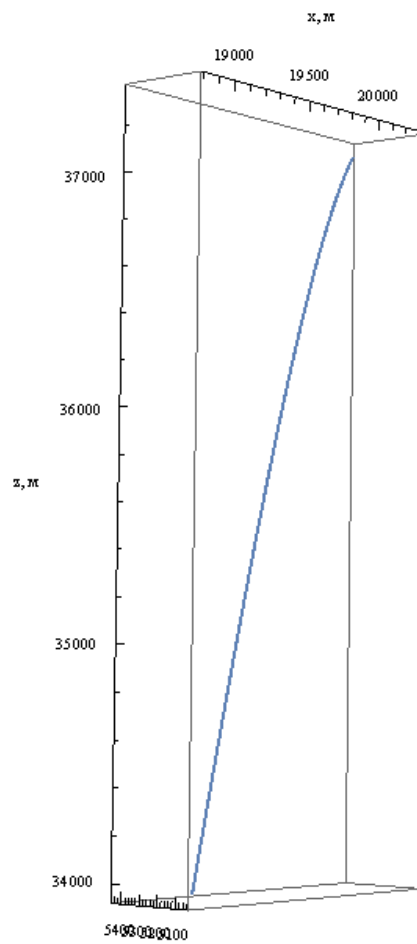


Рис.15. Траектории ракеты во время маневра

## Посадка

Через некоторое время после манёвра включаются основные двигатели, которые позволяют снизить скорость и плавно посадить ракету. Рассмотрим движение ракеты при силе тяги, составляющей 28% от максимальной. Будем считать, что включение двигателей происходит на высоте 1000 м, и указанная мощность двигателей должна быть достаточной, чтобы одновременно выполнить два условия:  $v \rightarrow 0$  (то есть равенство нулю и скорости, и координаты).

В ходе исследования данного процесса были получены зависимости координаты и скорости по оси  $z(t)$  от времени (рис. 16, 17).

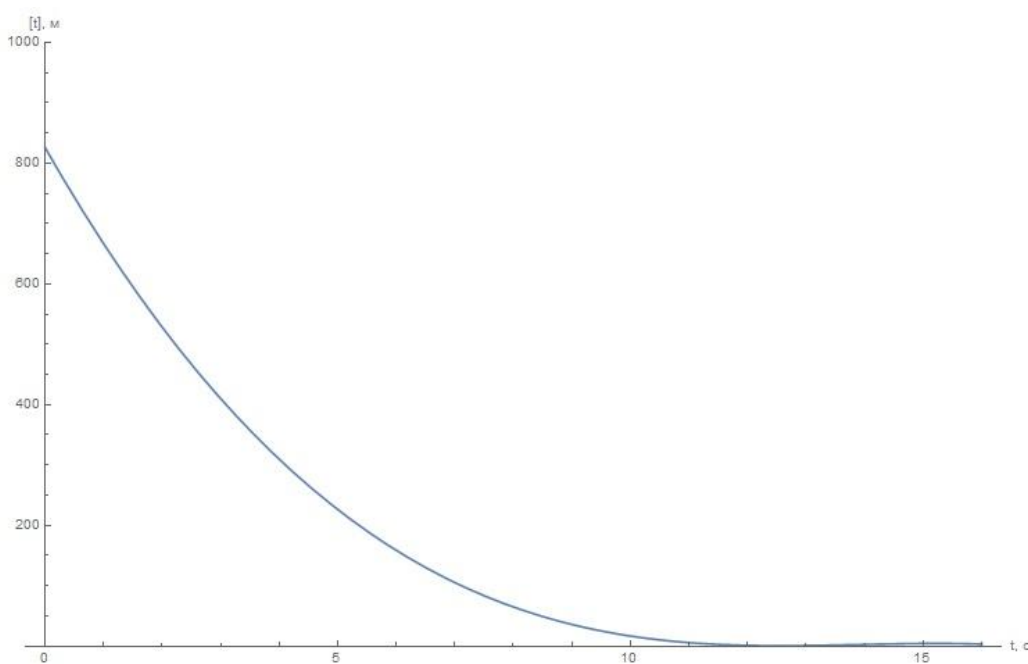


Рис.16.График зависимости высоты во время посадки



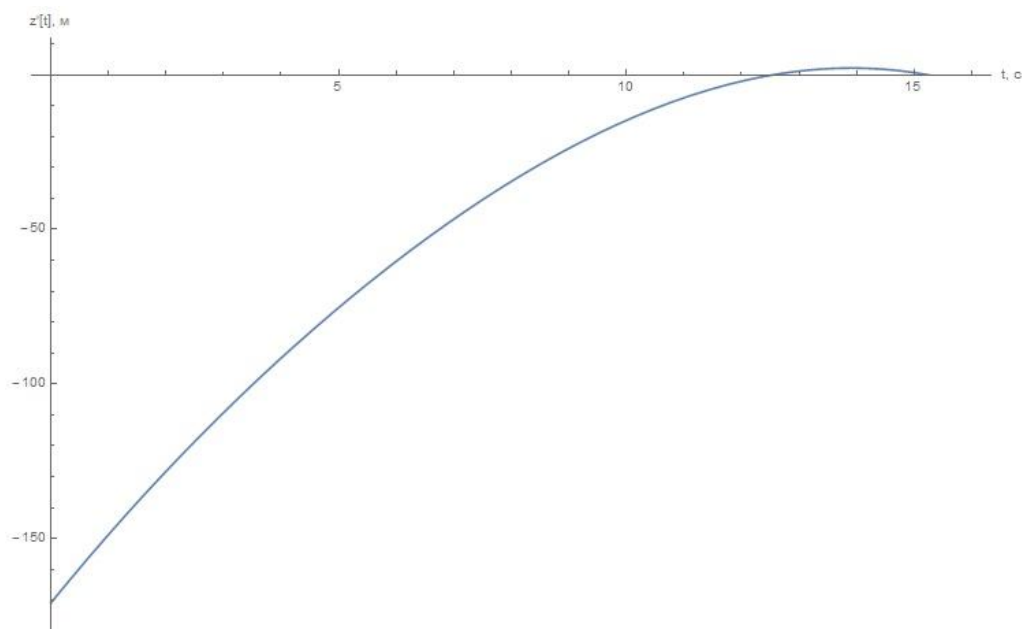


Рис.17. График зависимости скорости по оси  $z$  во время посадки

Таким образом, видно, что поставленное условие успешной посадки выполнено.

### Заключение

В ходе работы проведена оценка рациональности многоразового использования ракеты-носителя и сформулирована цель исследовательской работы. Для достижения цели были поставлены задачи, которые были решены в процессе исследования. Разработана концептуальная постановка, в которой был принят ряд гипотез, упрощающих создание модели. В математической постановке получены уравнения движения ракеты как твердого тела, решение которых позволяет получить зависимости координат, скоростей, ускорений и углов от времени для каждой из степеней свобод ракеты. Основные параметры ракеты соответствуют ракете-носителю Falcon 9. Модель реализована численно в математическом пакете Wolfram Mathematica. Данные, полученные в ходе исследования, доказали адекватность модели.

Основываясь на результатах численного эксперимента, можно сказать что ракета, имеющая характеристики, сопоставимые с характеристиками ракеты Falcon 9 способна на управляемую посадку.

## Список литературы

1. Новости Роскосмоса [Электронный ресурс]: 4 октября 1957 года в космос был выведен первый в мире искусственный спутник Земли / Пресс-служба Роскосмоса. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: <http://www.federspace.ru/19873/>, свободный.
2. Lenta.ru [Электронный ресурс]: Илон Маск заявил об исправности приземлившихся двигателей Falcon 9. – Электрон. журнал. – Режим доступа: <http://lenta.ru/news/2016/01/16/falcon/>, свободный.
3. Википедия [Электронный ресурс]: свободная энциклопедия. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Космическое\\_пространство](https://ru.wikipedia.org/wiki/Космическое_пространство), свободный.
4. Википедия [Электронный ресурс]: свободная энциклопедия. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Ракета-носитель>, свободный.
5. Википедия [Электронный ресурс]: свободная энциклопедия. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Протон\\_\(ракета-носитель\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Протон_(ракета-носитель)), свободный.