

Краевая научно-практическая конференция
Учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование процесса формирования кольцевых
систем планет**

Адам Юрий Александрович,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Бурдейная Мария Андреевна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Волегов Павел Сергеевич,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2016.

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Концептуальная постановка.....	8
Глава 2. Математическая постановка.....	9
Заключение	13
Список литературы	14

Введение

Кольца планет – это система плоских концентрических образований, состоящих из пыли и льда, вращающихся вокруг планеты в ее экваториальной плоскости [1]. На сегодняшний день открыты 5 кольцевых систем: они существуют у астероида Харико и у всех газовых гигантов Солнечной системы: Сатурна, Урана, Нептуна, Юпитера. Так же выдвигаются различные теории о существовании колец у спутника Сатурна Реи, астероиду Хирон и Плутону.

История открытия планетарных колец берет начало еще в XVII веке. В 1610 году итальянский ученый Галилео Галилей (1564-1642) стал первооткрывателем колец Сатурна. Он наблюдал их в свой телескоп с 20-ти кратным увеличением, однако низкое качество оптики не позволило ему идентифицировать их как кольца, он различил лишь некие «придатки» по обе стороны от Сатурна неизвестной природы. Поэтому он считал, что видит Сатурн «тройным». В своем письме Джулиано де Медичи (1574-1636) 13 ноября того же года он писал: «Высочайшую планету тройною наблюдал» [2].

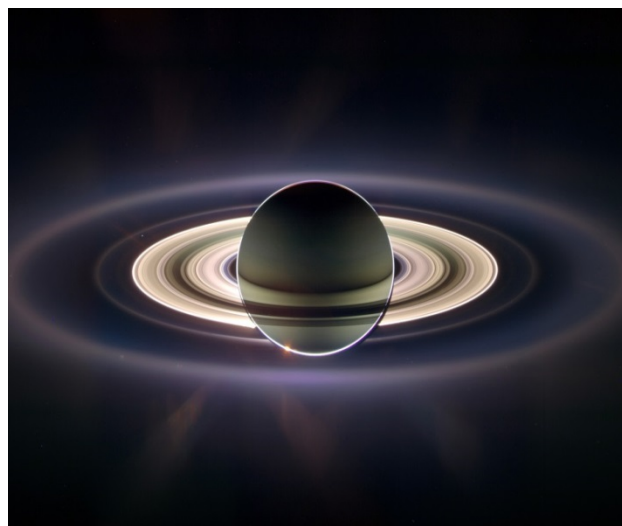


Рис.1. Сатурн во время затемнения в сентябре 2006 г.

Снимок выполнен АМС «Cassini orbiter»

Нидерландский физик и астроном Христиан Гюйгенс ван Зейлихем (1629-1695) стал первым человеком, который предположил, что Сатурн окружен кольцом (рис. 1). Он самостоятельно усовершенствовал телескоп Галилео Галилея, получив телескоп-рефрактор с 50-кратным увеличением. С его помощью, 45 лет спустя после Галилея, в 1655 году он открыл крупнейший спутник Сатурна Титан и впервые увидел кольцо Сатурна. В своем сочинении «Systema Saturnium» в 1659 году он писал: «Кольцом

окружен тонким, плоским, нигде не прикасающимся, к эклиптике наклоненным» (лат. *Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato*)[2].

Более трех столетий Сатурн считался единственной планетой, окружённой кольцами. Однако в работах первооткрывателя Урана, английского астронома Фредерика Уильяма Гершеля (1738-1822), в 1789 году встречается первое упоминание о возможном наличии кольцевой системы у этой планеты (рис.2). Причем он также предположил, что кольца Урана имеют красный цвет (что было подтверждено в 2006 году для предпоследнего кольца Урана наблюдениями обсерватории Кек (англ. *W. M. Keck Observatory*)). Записи Гершеля попали в журнал Лондонского королевского общества по развитию знаний о природе (в просторечии Королевского Общества) «Философские труды Королевского общества» в 1797 году, однако впоследствии на протяжении почти двух столетий – с 1797 по 1979 год – кольца в научной литературе не упоминались вовсе. Это дает основание подозревать ошибку ученого. Тем не менее, достаточно точные описания Гершеля не дают повода забывать о его наблюдении [3].

Предположения Гершеля было подтверждено уже после начала космической эры, а точнее 10 марта 1977 года группой американских ученых: Дэвидом Джеймсом Эллиоттом (англ. *David J. Elliott*), Эдвардом Данхэмом (англ. *Edward W. Dunham*) и Дугласом Джеймсом Минком

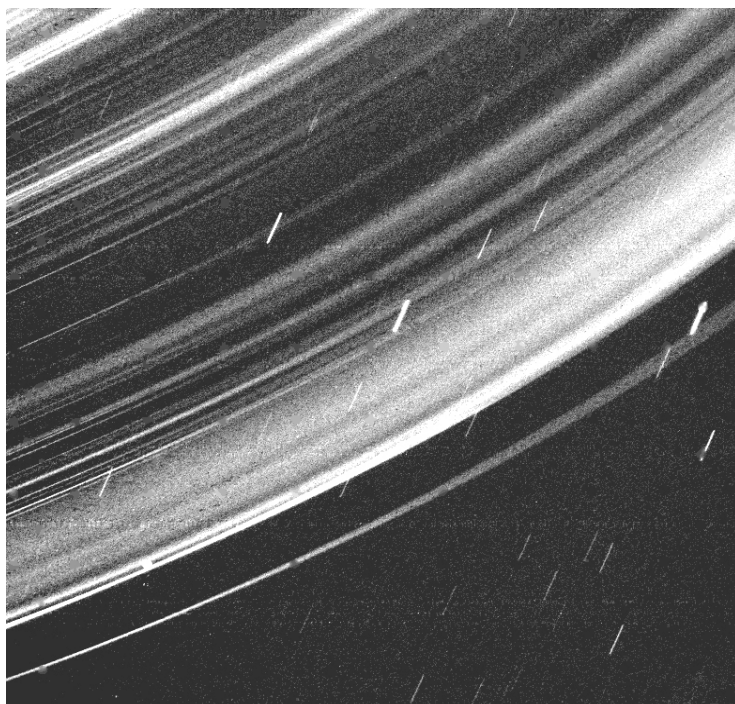


Рис.2. Структура колец Урана, 1986 г.
Снимок выполнен АМС «Voyager-2»

(англ. *Douglas J. Mink*) – в воздушной обсерватории им. Койпера (англ. *Kuiper Airborne Observatory*). Открытие было сделано случайно – ученые планировали провести наблюдения атмосферы Урана при покрытии им звезды SAO158687. Однако, анализируя полученные данные, они обнаружили уменьшение блеска звезды еще до ее покрытия Ураном, причем произошло это несколько раз подряд. В результате было обнаружено 9 из 13 известных на данный момент колец Урана. С помощью космического аппарата «Вояджер-2» (англ. «*Voyager-2*») было открыто еще два кольца Урана в 1986 году. Последняя пара колец была зарегистрирована в декабре 2005 года космическим телескопом «Хаббл» (англ. «*Hubble Space Telescope*») [3].

Юпитерианская кольцевая система стала третьей системой колец, открытой в Солнечной системе. Наличие колец еще в 1960 году предполагал советский астроном Сергей Константинович Всехсвятский (1905-1984) на основе исследования дальних точек орбит некоторых комет. Он заключил, что эти кометы могут происходить из кольца Юпитера. Впервые кольца у Юпитера были замечены при подлете автоматической межпланетной станции «Voyager-1» в 1979 году. Более подробные сведения о кольцах удалось получить в 1990-х благодаря космическому аппарату «Галилео» (англ. «*Galileo*»). В течении многих лет кольца Юпитера изучались с Земли средствами телескопа «*Hubble*» [4].

Четвертая кольцевая система принадлежит Нептуну. Первое из колец этой системы было обнаружено в 1968 году командой астрономов во главе с американским профессором астрономии и астрофизики Эдвардом Гвинаном. А в 1989 году были получены первые снимки кольцевой системы Нептуна с АМС «Voyager-2» [5].

Пятая кольцевая система, расположенная в Солнечной системе принадлежит Харикло – крупнейшему астероиду из класса кентавры. Это единственный астероид, у которого была обнаружена кольцевая система (рис. 3). Открытие принадлежит команде астрономов во главе с Фелипе Брага

Рибасом с помощью телескопов Европейской южной обсерватории (англ. *European Southern Observatory*) и 13-ти других телескопов в Южной Америке. 3 июня 2013 года во время наблюдения за покрытием звезды UCAC4 248-10872 кентавром, ученые обнаружили аномальное уменьшение блеска звезды. Сравнивая фотографии с различных телескопов, команда астрономов смогла реконструировать форму, ширину, ориентацию и другие свойства колец. Сообщение об открытии было сделано 26 марта 2014 года [6].

В 2006 году группой американских ученых под руководством Алана Стерна (англ. *Alan Stern*) из Юго-Западного научно-исследовательского института было выдвинуто предположение о существовании кольцевой системы у Плутона. В августе 2011 года группа бразильских астрономов



Рис.3. Вид с ребра на Харикло и его систему колец

предоставила свои расчёты, согласно которым вокруг Плутона должно существовать крайне тусклое пылевое кольцо. Однако визуальными наблюдениями с Земли существование колец подтверждено не было [7].

Предположительно, кольцами может обладать также один из крупнейших спутников Сатурна Рея. Данные, переданные в ноябре 2005 и в августе 2007 года автоматической межпланетной станцией «Кассини — Гюйгенс» (англ. «*Cassini–Huygens*»), показали, что при заходе в «тень» Реи, поток регистрируемых от Сатурна электронов несколько раз аномально уменьшался, что может свидетельствовать о наличии у Реи трёх колец [8].

Выдвигалось множество теорий о механизмах образования планетарных колец. Долгое время считалось, что кольца образуются в результате разрушения спутника, слишком близко приблизившегося к

планете, под действием силы гравитации [9]. Однако данные, полученные с помощью автоматических межпланетных станций, опровергли это мнение. Сейчас ученые придерживаются теории, что все открытые кольца представляют собой остатки околопланетного облака протяженностью во многие миллионы километров. Под действием гравитационной и центробежной сил происходит их сплющивание, поэтому у планет образуются плоские кольца. Долгое время считалось, что кольца могут существовать только у планет, поэтому обнаружение колец у астероида Харикло стало весьма неожиданным открытием и поставило под сомнение существующую теорию. Поэтому среди ученых до сих пор не сложилось единого мнения о механизмах формирования кольцевых систем и тех факторов, которые влияют на этот процесс. Таким образом, моделирование процесса формирования кольцевых систем может ответить на многие вопросы в этой области.

Учитывая структуру колец, для моделирования можно выбрать два подхода: уравнение динамики сплошной среды, при котором рассматривается непрерывная среда переменной плотности, формирующая кольца, и метод динамики частиц, в котором рассматривается движение достаточно большого, но конечного числа частиц, составляющих околопланетное вещество. Однако использование уравнений динамики сплошной среды приводит к большим аналитическим и вычислительным сложностям, поэтому в рамках данного исследования удобнее и рациональнее будет использование метода частиц.

Таким образом, целью работы является разработка и исследование математической модели. Данная модель должна описывать процесс формирования планетарных колец. Для достижения поставленной цели необходимо решить комплекс задач:

1. Провести обзор литературы, связанной с историей изучения планетарных колец.
2. Выявить основные причины появления кольцевых систем у планет.

3. Сформулировать гипотезы математической модели и обосновать их.
4. В соответствии с гипотезами выбрать метод моделирования.
5. Сформулировать и решить математическую поставку.
6. Провести анализ полученных результатов и сделать выводы.

Глава 1. Концептуальная постановка

1. Объектом исследования является система, состоящая из планеты и ее кольца.
2. В качестве параметров модели планеты и кольца принимаем параметры Юпитера и его кольцевой системы.
3. Кольца рассматриваются как совокупность конечного числа частиц.
4. Радиус частиц в кольце колеблется от 10 нм до 10 м, минимальный радиус кольца составляет 92 000 км, т.е. разница наибольшего радиуса частицы и наименьшего радиуса кольца составляет $7 \cdot 10^8$ раз, следовательно, любую частицу кольца можно считать материальной точкой, обладающей некоторой массой.
5. Планета неподвижна.
6. Рассматриваемая система является инерциальной.
7. Выполняются законы классической механики.
8. Для описания поведения планеты и частиц кольца выбираем три ортогональные оси, где в точке с координатами $(0, 0, 0)$ находится неподвижная планета.

Глава 2. Математическая постановка

Метод динамики частиц основан на представлении материала совокупностью взаимодействующих материальных точек, для которых записываются классические уравнения динамики. Взаимодействие частиц описывается посредством потенциалов взаимодействия, основным свойством которых является отталкивание при сближении и притяжение при удалении. Перед началом моделирования задается некоторое начальное распределение частиц в пространстве (исходная структура материала) и начальное распределение скоростей частиц (механическое и тепловое движение системы в исходном состоянии). Далее задача сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Запишем классическое уравнение динамики Ньютона:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_{kn}} f(r_{kn}, \dot{r}_{kn}) \mathbf{r}_{kn}, \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_{kn} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n, \quad r_{kn} = |\mathbf{r}_{kn}|: \quad k = 1, 2, \dots, N$$

где r_k – радиус-вектор k -ой частицы, m – масса частицы, N – общее число частиц и $f(r_{kn}, \dot{r}_{kn})$ – сила взаимодействия между частицами, которую будем описывать согласно выражению:

$$f(r, \dot{r}) = \frac{A_1}{r^2} + \frac{A_2}{r^p} + \frac{A_3}{r^q} \dot{r}, \quad (2)$$

где первое слагаемое в выражении (2) представляет собой силу гравитационного взаимодействия, следовательно, коэффициент A_1 определяется равенством $A_1 = \gamma m^2$, где γ – гравитационная постоянная. Второе слагаемое представляет собой силу отталкивания, возникающую при столкновениях частиц. Показатель степени p возьмем равным 13, что позволяет обеспечить соответствие с экспериментальными данными по ударному сжатию твердых тел. Положим, что равновесное расстояние между

двумя частицами (равное диаметру частицы) в результате баланса сил притяжения и отталкивания устанавливается равным α , то есть $f(\alpha, 0) = 0$, тогда из формулы (2) получаем $A_2 = -\gamma m^2 \alpha^{p-2}$. Третье слагаемое предназначено для описания диссипации – потерь энергии при столкновениях частиц. Полагая, что при изменении расстояния между частицами второе и третье слагаемое должны изменяться пропорционально друг другу, получим $q = p + 1 = 14$. С использованием перечисленных предположений формула (2) может быть приведена к виду друг с другом

$$f(r, \dot{r}) = \gamma \frac{m^2}{\alpha^2} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^{13} \left(1 - \beta \frac{\dot{r}}{r} \right) - \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где $\beta = -\frac{A_1}{A_2} > 0$ – коэффициент диссипации.

Уравнения движения частиц могут быть записаны в виде взаимодействия частиц и между собой, и частицы с внешней средой:

$$m \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{n=1}^N \Phi(r_{kn}) \mathbf{r}_{kn} + \sum_{n=1}^N \Psi(r_{kn}, \mathbf{v}_{kn}) \mathbf{r}_{kn} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_k) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k), \quad (4)$$

где \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k – векторы положения и скорости k -й частицы,

$$\overset{\text{def}}{r_{kn}} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n, \quad \overset{\text{def}}{\mathbf{v}_{kn}} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_n, \quad \overset{\text{def}}{r_{kn}} = |\mathbf{r}_{kn}|, \quad \overset{\text{def}}{v_{kn}} = |\mathbf{v}_{kn}|, \quad (5)$$

m – масса частицы, скалярные функции $\Phi(r)$ и $\Psi(r, \mathbf{v})$ описывают консервативную и неконсервативную составляющие взаимодействия между частицами, векторные функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ описывают внешнее консервативное и неконсервативное силовое поле. В уравнениях (4) учитывается только парное взаимодействие между частицами. Рассмотрим подробнее силовые факторы. Консервативная составляющая взаимодействия $\Phi(r)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} f(r), \quad f(r) \stackrel{\text{def}}{=} -\Pi'(r), \quad (6)$$

где $f(r)$ – скалярная сила взаимодействия между частицами, $\Pi(r)$ – потенциал взаимодействия. Величина $\Phi(r)$ является важнейшим силовым фактором, во многих задачах по моделированию. Все остальные силовые факторы в уравнениях (4) отбрасываются, и рассматривается чисто консервативная система взаимодействующих частиц.

Неконсервативная составляющая взаимодействия $\Psi(r, v)$ предназначена для описания внутренней диссипации в материале. Внешние силовые поля $\varphi(r)$ и $\psi(r, v)$ обычно используются для двух целей: для задания внешних массовых силовых воздействий (гравитационного, электромагнитного) и для задания силовых граничных условий. В первом случае указанные силы распределены во всем объеме пространства, где проводится расчет, во втором случае они локализованы вблизи некоторых поверхностей, часто являющихся границами области расчета. Кроме того, неконсервативное воздействие $\psi(r, v)$ часто применяется для отвода энергии из системы посредством внешней диссипации, простейшим вариантом которой являются силы вязкого трения

$$\Psi(r, v) = -Bv, B > 0. \quad (7)$$

Рассмотрим следующий вид силовых факторов для уравнений движения частиц (4):

$$\Phi(r) = \gamma \frac{m^2}{\alpha^2} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \right], \quad \Psi(r, v) = -\beta \gamma \frac{m^2}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{13} \frac{\dot{r}}{r^2}, \quad (8)$$

$$\varphi(r) = -\gamma \frac{mM}{r^3} r, \quad \psi(r, v) = 0.$$

Данный вид взаимодействия использовался для описания движения облака гравитирующих частиц в космическом пространстве. Функция $\Phi(r)$ состоит из двух слагаемых: первое, близкодействующее, описывает отталкивание частиц при их столкновениях; второе, далекодействующее, описывает гравитационное притяжение частиц; α – равновесное расстояние

между частицами, γ – гравитационная константа. Функция $\Psi(r, v)$ описывает потери энергии при столкновениях частиц; вид ее выбран таким, чтобы при удалении частиц она изменялась подобно отталкивающей компоненте $\Phi(r)$; β – коэффициент диссипации. Функция $\phi(r)$ описывает гравитационное взаимодействие частиц с некоторым большим телом (например, Солнцем), на движение которого частицы не могут влиять в силу его массивности; M – масса этого большого тела, функция $\phi(r)$ в данной работе отсутствует, т.к. частицы кольца нейтрально заряжены.

Решение уравнения (4) сводится к решению основной задачи механики, т.е. к определению положения тела в любой произвольный момент времени. Поэтому нам важно не только силы, действующие на каждую частицу, но и

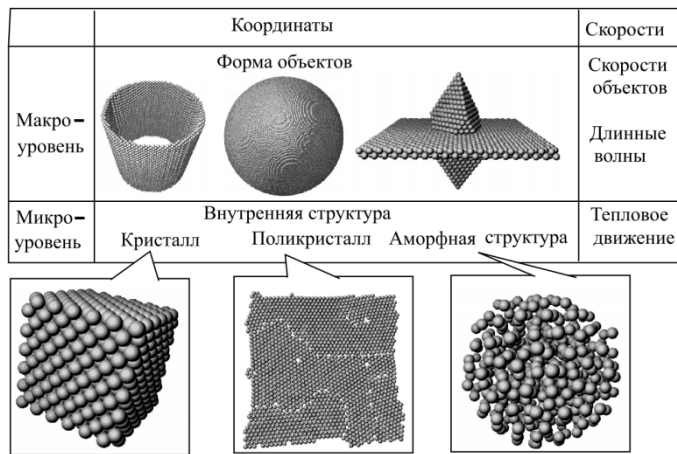


Рис.4. Виды начальных условий

совокупность начальных условий. Начальные условия включают в себя координаты и скорости каждой частицы кольца. Генерация начальных условий является отдельной и весьма нетривиальной задачей. Схематично различные виды начальных условий

представлены на рис.4. Задание начальных условий происходит на двух уровнях, которые условно можно назвать макро- и микроскопическим. На макроскопическом уровне задаются внешняя форма объектов моделирования, т.е. планеты и кольца и макроскопические скорости каждой частицы кольца. На микроуровне задается вид упаковки частиц (структура материала) и скорости хаотического движения (тепловое движение). Скорость каждой частицы в начальный момент времени складывается из макроскопической скорости, мало изменяющейся от частицы к частице, и

случайной компоненты, получаемой при помощи генератора случайных чисел.

Заключение

Таким образом, в данной работе:

1. Были подробно изучены различные материалы, связанные с историей открытия и механизмами образования кольцевых систем у планет.
2. Выполнена концептуальная постановка работы.
3. Сформулирована первая версия математической постановки моделирования.
4. Выбран метод решения математической модели.

Список литературы

1. Горькавый Н. Н., Фридман А. М. Физика планетных колец. – УНФ – февраль 1990 [Электронный ресурс]. URL: <http://ufn.ru/ru/articles/1990/2/a/> (дата обращения: 18.06.2016).
2. Воробьева В.А. Юпитер. [Электронный ресурс]. URL: http://www.allplanets.ru/solar_sistem/jupiter/jupiter_statya.htm#kolca (дата обращения: 18.06.2016).
3. Силкин Б.И. В мире множества лун. — М.: Наука, 1982. — 208 с.
4. Кольца Урана. – Википедия [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кольца_Урана (дата обращения: 18.06.2016).
5. Кольца Нептуна. – Википедия [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кольца_Нептуна (дата обращения: 18.06.2016).
6. Попов Л.С. Астрономы предсказали кольца Плутона. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.membrana.ru/particle/16548> (дата обращения: 18.06.2016).
7. Впервые найдены кольца вокруг Луны. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.membrana.ru/particle/12370> (дата обращения: 18.06.2016).
8. Кольца Харикло. – Википедия [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кольца_Харикло (дата обращения: 18.06.2016).
9. Динамическая модель образования системы Земля-Луна / Э.М. Галимов, А.М. Кривцов и др. // Земля-Луна: №11 – Геохимия, 2005. – С.1139-1150.
10. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой / А.М. Кривцов. – М: ФИЗМАЛИТ, 2007 г. – 304 с.

