

Краевая научно- практическая конференция  
учебно- исследовательских работ учащихся 6-11 классов  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

**Золотое сечение**

Артемова Юлия Вячеславовна,  
8 А кл., МАОУ СОШ №135, г. Пермь,  
Мартьянова Любовь Ивановна,  
учитель математики  
МАОУ СОШ №135, г. Пермь

Пермь, 2016

## Содержание

|   |        |
|---|--------|
| 1. Введение.....  | 3      |
| 2. Золотое сечение  |        |
| 2.1. История возникновения золотого сечения.....              | 4-5    |
| 2.2. Понятие золотого сечения.....                            | 6      |
| 2.3. Примеры с использованием золотого сечения.....           | 7 - 9  |
| 2.4. Применение золотого сечения в жизни.....                 | 10     |
| 2.5. Золотое сечение в архитектуре, искусстве, живописи... .. | 11- 12 |
| 2.7. Золотое сечение анатомии.....                            | 13     |
| 3. Исследовательская часть.....                               | 14-15  |
| 4. Заключение.....  | 16     |
| 5. Выводы.....  | 17     |
| 6. Литература.....  | 18     |
| 7. Приложения   |        |

## 2.Введение.

### *" Красота должна отвечать строгому числу"*

*Л.Б.Альберти*

Феномен золотого сечения известен человечеству очень давно.

Его тайну пытались осмыслить Платон, Евклид, Пифагор, Леонардо да Винчи, Кеплер и многие другие крупнейшие мыслители человечества. Они неразрывно связывали золотое сечение с понятием всеобщей гармонии, пронизывающей вселенную от микромира до макрокосмоса.

Классическими проявлениями золотого сечения являются предметы обихода, скульптура и архитектура, математика, музыка и эстетика. В предыдущем столетии с расширением области знаний человечества резко увеличилось количество сфер, где наблюдается феномен золотой пропорции. Это биология и зоология, экономика, психология, кибернетика, теория сложных систем, и даже геология и астрономия.

Живая природа построена на простых принципах и может быть описана элементарными моделями. В этой работе мы хотим сделать попытку системного анализа феномена золотого сечения и высказать несколько предположений, позволяющих объяснить всеобщий характер золотой пропорции.

**Гипотеза:** Золотое сечение является отображением окружающего мира.

**Объект исследования:** наличие Золотого сечения в человеке , архитектуре и природе.

**Предметы исследования:** предметы искусства, архитектуры, живописи, фигуры одноклассников и родственников.

**Цель проекта** – узнать, какая пропорция называется золотым сечением и научиться отличать простую пропорцию от золотого сечения.

#### **Задачи:**

1.Сформировать понятие пропорция, найти определение Золотого сечения, изучить литературу, связанную с Золотым сечением

2.Показать практическое применение этого понятия, провести эксперименты с элементами Золотого сечения,

4.Научиться анализировать и делать выводы.

## История возникновения золотого сечения

Принято считать, что понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Есть предположение, что Пифагор свое знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании.

Французский архитектор Ле Корбюзье нашел, что в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого сечения.

В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в “Началах” Евклида. Во 2-й книге “Начал” дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н.э.), Папп (III в. н.э.) и др. В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам “Начал” Евклида. Переводчик Джордж Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.

В эпоху Возрождения усиливается интерес к золотому делению среди ученых и художников в связи с его применением как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре Леонардо да Винчи. «Пусть никто не будучи математиком, не посмеет читать мои труды». Он, художник и ученый, видел, что у итальянских художников эмпирический опыт большой, а знаний мало. Он задумал и начал писать книгу по геометрии, но в это время появилась книга монаха Луки Пачоли, и Леонардо оставил свою затею. По мнению современников и историков науки, Пачоли был настоящим светилом, величайшим математиком Италии в период между Фибоначчи и Галилеем. Лука Пачоли был учеником художника Пьеро Делла Франчески, написавшего две книги, одна из которых называлась “О перспективе в живописи”. Его считают творцом начертательной геометрии.

Леонардо да Винчи также много внимания уделял изучению золотого деления. Он производил сечения стереометрического тела, образованного

правильными пятиугольниками, и каждый раз получал прямоугольники с отношениями сторон в золотом делении.

Поэтому он дал этому делению название **золотое сечение**. Так оно и держится до сих пор как самое популярное.

В то же время на севере Европы, в Германии, над теми же проблемами трудился Альбрехт Дюрер. Он делает наброски введения к первому варианту трактата о пропорциях. Дюрер пишет. “Необходимо, чтобы тот, кто что-либо умеет, обучил этому других, которые в этом нуждаются. Это я и вознамерился сделать”.

Альбрехт Дюрер подробно разрабатывает теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица – ртом и т.д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.

## Золотое сечение – гармоническая пропорция

В математике **пропорцией** называют равенство двух отношений:  $a:b=c:d$ .

Отрезок прямой  $AB$  можно разделить на две части следующими способами:

на две равные части –  $AB : AC = AB : BC$ ;

на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют);

таким образом, когда  $AB : AC = AC : BC$ .

Последнее и есть золотое деление или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

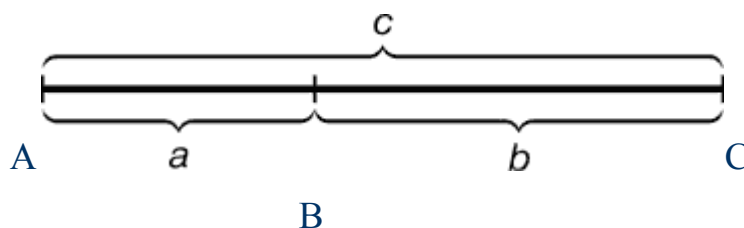


Рис. 1. Геометрическое изображение золотой пропорции

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление, отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему  $a:b=b:c$  или  $c:b=b:a$ .

### Деление отрезка по золотому сечению. $BC = 1/2 AB$ ; $CD = BC$

Из точки  $B$  восстанавливается перпендикуляр, равный половине  $AB$ . Полученная точка  $C$  соединяется отрезком с точкой  $A$ . На отрезке  $AC$  от точки  $C$  откладывается отрезок, равный  $BC$ , заканчивающийся точкой  $D$ . На отрезке  $AB$  от точки  $A$  откладываем отрезок  $AE$ , равный отрезку  $AD$ . Полученная при этом точка  $E$  делит отрезок  $AB$  в соотношении золотой пропорции.

Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью  $AE = 0,618\dots$ , если  $AB$  принять за единицу,  $BE = 0,382\dots$ . Для практических целей часто используют приближенные значения 0,62 и 0,38. Если отрезок  $AB$  принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

В последующие века правило золотой пропорции превратилось в академический канон и, когда со временем в искусстве началась борьба с академической рутинной, в пылу борьбы «вместе с водой выплеснули и ребенка». Вновь «открыто» золотое сечение было в середине XIX в. В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд «Эстетические исследования». С Цейзингом произошло именно то, что и должно было неминуемо произойти с исследователем, который рассматривает явление как таковое, без связи с другими явлениями. Он абсолютизировал пропорцию золотого сечения, объявив ее универсальной для всех явлений природы и искусства. У Цейзинга были многочисленные последователи, но были и противники, которые объявили его учение о пропорциях «математической эстетикой».

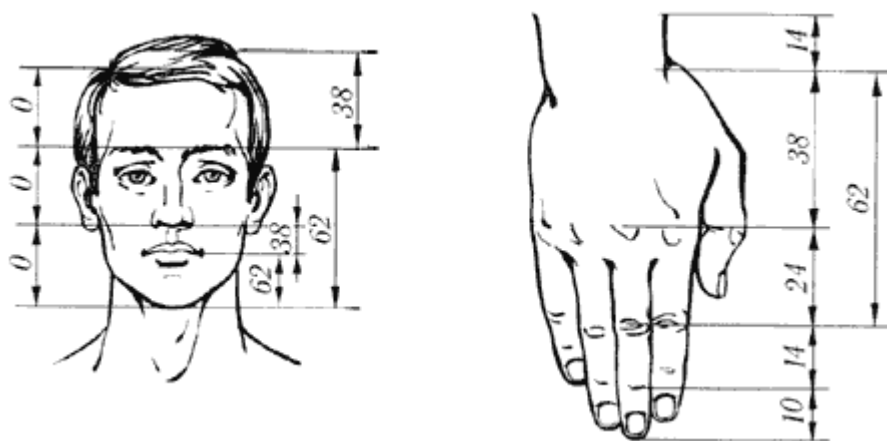


Рис. 2. Золотые пропорции в частях тела человека

Сопоставляя длины фаланг пальцев и кисти руки в целом, а также расстояния между отдельными частями лица, также можно найти "золотые" соотношения:

Мозговой череп состоит из 8 костей. В верхней и нижней челюстях с каждой стороны имеется по 8 альвеол и соответственно - корни 8 зубов.

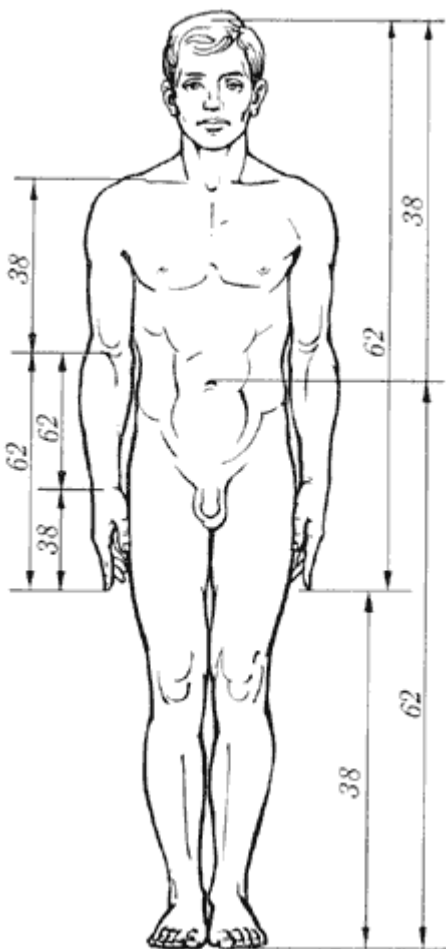


Рис. 11. Золотые пропорции в фигуре человека

Цейзинг проделал колоссальную работу. Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу, что золотое сечение выражает средний статистический закон. Деление тела точкой пупа – важнейший показатель золотого сечения. Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения  $13 : 8 = 1,625$  и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении  $8 : 5 = 1,6$ . У новорожденного пропорция составляет отношение  $1 : 1$ , к 13 годам она равна  $1,6$ , а к 21 году равняется мужской. Пропорции золотого сечения проявляются и в отношении других частей тела – длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т.д.

Подверглись исследованию греческие вазы, архитектурные сооружения различных эпох, растения, животные, птичьи яйца, музыкальные тона, стихотворные размеры. Цейзинг дал определение золотому сечению, показал, как оно выражается в отрезках прямой и в цифрах. Когда цифры, выражающие длины отрезков, были получены, Цейзинг увидел, что они составляют ряд Фибоначчи, который можно продолжать до бесконечности в одну и в другую сторону.

В конце XIX – начале XX вв. появилось немало чисто формалистических теории о применении золотого сечения в произведениях искусства и архитектуры. С развитием дизайна и технической эстетики действие закона золотого сечения распространилось на конструирование машин, мебели и т.д.



## Пропорции золотого сечения в растениях и животных

Среди придорожных трав растет ничем не примечательное растение – цикорий. Приглядимся к нему внимательно. От основного стебля образовался отросток. Тут же расположился первый листок.

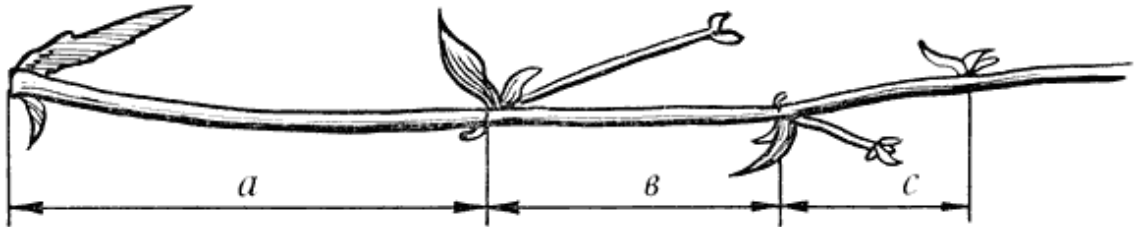


Рис. 4. Цикорий

Отросток делает сильный выброс в пространство, останавливается, выпускает листок, но уже короче первого, снова делает выброс в пространство, но уже меньшей силы, выпускает листок еще меньшего размера и снова выброс. Если первый выброс принять за 100 единиц, то второй равен 62 единицам, третий – 38, четвертый – 24 и т.д. Длина лепестков тоже подчинена золотой пропорции. В росте, завоевании пространства растение сохраняло определенные пропорции. Импульсы его роста постепенно уменьшались в пропорции золотого сечения.

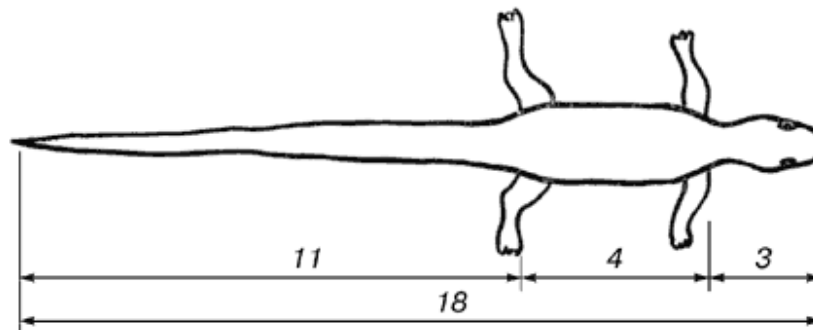


Рис. 5. Ящерица живородящая

В ящерице с первого взгляда улавливаются приятные для нашего глаза пропорции – длина ее хвоста так относится к длине остального тела, как 62 к 38.

И в растительном, и в животном мире настойчиво пробивается формообразующая тенденция природы – симметрия относительно направления роста и движения. Здесь золотое сечение проявляется в пропорциях частей перпендикулярно к направлению роста.

#### 4. Применение золотого сечения в жизни

Золотое сечение чаще всего применяется в произведениях искусства, архитектуре, встречается в природе.

##### Золотое сечение в живописи



Портрет Монны Лизы (Джоконды) долгие годы привлекает внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника. Существует очень много версий об истории этого портрета. Вот одна из них. Однажды Леонардо да Винчи получил заказ от банкира Франческо де Джокондо написать портрет молодой женщины, жены банкира, Монны Лизы. Женщина не была красива, но в ней привлекала простота и естественность облика. Леонардо согласился писать портрет. Его модель была печальной и грустной, но Леонардо рассказал ей сказку, услышав которую, она стала живой и интересной.



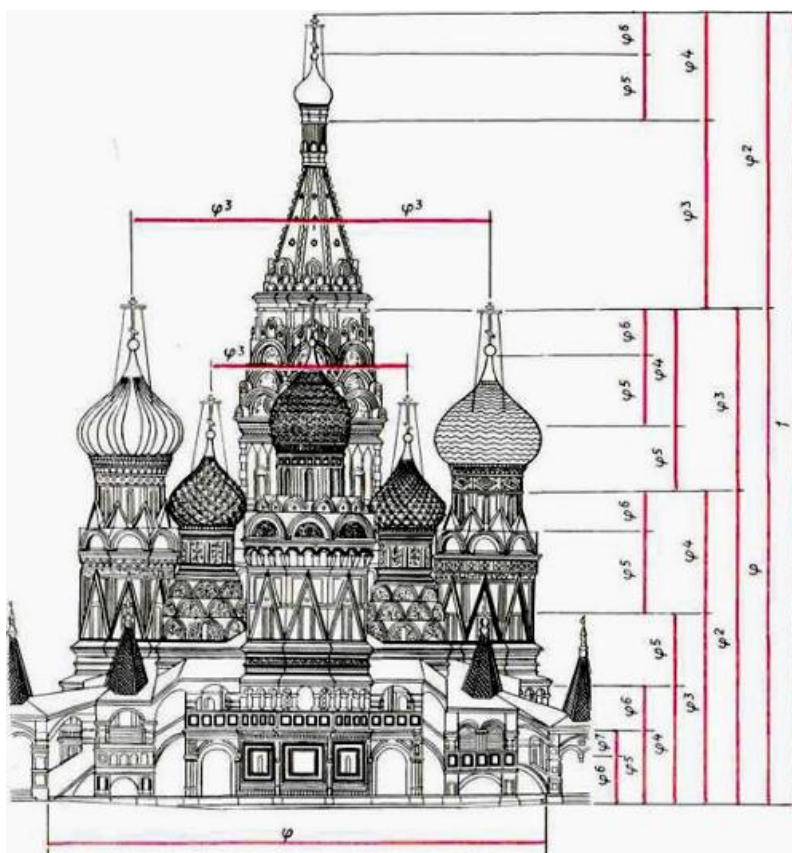
## 5. Золотое сечение в архитектуре и живописи

Великолепные памятники архитектуры оставили нам зодчие древней Греции. Одним из красивейших произведений древнегреческой архитектуры является Парфенон (V в. до н. э.). Храм Афины - Парфенон был построен в честь победы эллинов над персами. Для создания гармонической композиции на холме его строители даже увеличили холм в южной части, соорудив для этого мощную насыпь .

Как указывает Г.И. Соколов, протяженность холма перед Парфеноном, длины храма Афины и участка Акрополя за Парфеноном соотносятся как отрезки золотой пропорции. При взгляде на Парфенон у места расположения монументальных ворот при входе в город (пропилеи) отношения массива скалы у храма также соответствует золотой пропорции. Таким образом, золотая пропорция была использована уже при создании композиции храмов на священном холме.

Пропорции здания можно выразить через различные степени числа  $\Phi=0,618...$

### Золотое сечение в архитектуре



Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Французский архитектор Ле Корбюзье нашел, что в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

Что касается пирамид, не только египетские пирамиды построены в соответствии с совершенными пропорциями золотого сечения.

Эти интересные наблюдения подсказывают, что конструкция пирамиды основана на пропорции приблизительно  $\approx 0,618$ . Современные ученые склоняются к интерпретации, что древние египтяне построили ее с единственной целью - передать знания, которые они хотели сохранить для грядущих поколений.



Основополагающей константой в архитектуре, живописи и науке является золотое сечение. Все живое создано в соответствии с пропорцией золотого сечения, и именно таковыми являются пропорции Великой Пирамиды. А благодаря тому, что человек, Земля, Солнечная Система и вся Вселенная созданы в согласии с законом золотого сечения, то в пирамиде можно найти и их параметр

## 6. Золотое сечение в анатомии

Золотое сечение можно найти и в анатомии. Закон золотого сечения просматривается в количественном членении человеческого тела, соответствующем числам ряда Фибоначчи. Примером может быть число костей туловища, черепа и конечностей. Так, в скелете туловища различают 3 костных системы: позвоночник, реберный его отдел и грудину. Грудина включает 3 кости (рукоятку, тело и мечевидный отросток). Позвоночник состоит из 33 (34) позвонков; от них отходят 12-13 пар ребер. Скелет верхней конечности состоит из 3 частей (плечевой, костей предплечья и костей кисти). Кисть включает 8 костей запястья, 5 пястных костей и кости 5 пальцев. Каждый палец, кроме большого, имеет по 3 фаланги. Таким образом, морфогенез кисти, включающей два соседних члена числового ряда Фибоначчи - в частности, 8 костей запястья и 5 костей пясти - приближается к золотому сечению 1.618, поскольку  $8/5=1.6$ .



### Статуя Аполлона Бельведерского

**Природа распорядилась в строении человеческого тела следующими пропорциями:**

четыре ладони равны стопе,

шесть ладоней составляют один локоть,

четыре локтя - рост человека,

четыре локтя равны шагу, а двадцать четыре ладони равны росту человека,

наибольшая ширина плеч - восьмая часть роста,

расстояние от локтя до кончиков пальцев -  $1/5$  роста, от локтя до подмышечной ямки -  $1/8$ ,

длина всей руки - это  $1/10$  роста,

стопа -  $1/7$  часть роста

### 3. Исследовательская часть

#### Геометрическое изображение золотой пропорции

Практическое знакомство с золотым сечением начинают с деления отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки.

Мной было проведено исследование:

1. Найти примеры золотого сечения на одноклассниках.
2. Определить ученика с пропорциями «золотого сечения».
3. Сделать выводы о определении золотого деления.

#### 1. «Золотое сечение»

В эксперименте приняли участие весь мой класс, не считая отсутствующих 2 человек.

Измерила у всех расстояние от макушки до середины шеи (от А до В), расстояние от середины шеи до талии (от В до С), от талии до конца ног (от С до D) и весь рост

Тем самым, нашла пропорциональное отношение моих одноклассников. «Золотое сечение» составляет приблизительно 0,618

#### Самые пропорциональное телосложение оказалось у 1 человека

По списку он 9, измерения показали 0,712-0,618 «Золотое сечение»  
Все измерения в см

|     | А-В   | В-С   | С-D    | рост   | результат |
|-----|-------|-------|--------|--------|-----------|
| 1.  | 30 см | 40 см | 90 см  | 153 см | 1,209 см  |
| 2.  | 24 см | 50 см | 95 см  | 155 см | 0,784 см  |
| 3.  | 24 см | 45 см | 89 см  | 147 см | 0,88 см   |
| 4.  | 26 см | 40 см | 97 см  | 150 см | 1,457 см  |
| 5.  | 24 см | 45 см | 93 см  | 149 см | 0,854 см  |
| 6.  | 30 см | 40 см | 102 см | 164 см | 0,985 см  |
| 7.  | 23 см | 45 см | 92 см  | 149 см | 0,828 см  |
| 8.  | 28 см | 45 см | 108 см | 165 см | 0,951 см  |
| 9.  | 23 см | 48 см | 93 см  | 145 см | 0,747 см  |
| 10. | 27 см | 45 см | 96 см  | 153 см | 0,956 см  |
| 11. | 27 см | 50 см | 102 см | 159 см | 0,843 см  |
| 12. | 25 см | 50 см | 89 см  | 162 см | 0,928 см  |
| 13. | 25 см | 50 см | 97 см  | 155 см | 0,8 см    |
| 14. | 26 см | 41 см | 108 см | 165,5  | 0,972 см  |
| 15. | 25 см | 48 см | 99 см  | 151 см | 0,793 см  |
| 16. | 22 см | 45 см | 95 см  | 149 см | 0,766 см  |
| 17. | 22 см | 35 см | 91 см  | 140 см | 0,966 см  |
| 18. | 23 см | 48 см | 97 см  | 153 см | 0,756 см  |

**Так же я провела опыт среди учителей работающих нашего класса и оказалось , что все учителя соответствуют примеру золотого сечения .**

**Все измерения в см**

|    | A-B | B-C | C-D | рост | результат |
|----|-----|-----|-----|------|-----------|
| 1. | 23  | 45  | 103 | 163  | 0,7       |
| 2. | 22  | 48  | 105 | 163  | 0,7       |
| 3. | 21  | 40  | 98  | 153  | 0,7       |
| 4. |     |     |     |      |           |

#### 4. Заключение

Человек различает окружающие его предметы по форме.

Интерес к форме какого-либо предмета может быть продиктован жизненной необходимостью, а может быть вызван красотой формы.

Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии.

Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Я попыталась исследовать своих одноклассников и учителей работающих в моем классе в примере золотого сечения.

Было найдено определение Золотого сечения, изучена литература, связанная с Золотым сечением, проведены эксперименты, разработан собственный проект с элементами Золотого сечения, были сделаны выводы.

В ходе исследования были выявлены следующие результаты:

закономерности Золотого сечения заложены в подсознании человека, использовались и используются архитекторами в своих работах



## 5. Выводы

Золотое сечение – это один из основных основополагающих принципов природы;

Человеческое представление о красивом явно сформировалось под влиянием того, какой порядок и гармонию человек видит в природе.

Закономерности Золотого сечения заложены в подсознании человека, использовались и используются архитекторами в своих работах.

Золотое сечение является отображением окружающего мира

С возрастом увеличивается количество людей, выбирающих Золотую пропорцию.

Также Золотое сечение имеет большое применение в нашей жизни.

На летательных аппаратах с электромагнитными источниками энергии создаются прямоугольные ячейки с пропорцией золотого сечения.

В гидротехнике по золотой спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря этому напор воды используется с наибольшей производительностью.

Человек – венец творения природы... Установлено, что золотые отношения можно найти и в пропорциях человеческого тела. Кроме того, человек сам является творцом, создаёт замечательные произведения искусства, в которых просматривается золотая пропорция.

В своей работе я показала, что Золотое сечение присутствует во всем что нас окружает, природа создает мир вокруг нас по своим законам, но и эти законы "подвержены" правилу золотого сечения.

Я очень много узнала о золотом сечении пропорции. Рассмотрела много примеров – это золотое сечение в жизни, в архитектуре, в живописи, в анатомии, в математике, золотые пропорции в фигуре человека.

Я попыталась исследовать своих одноклассников и учителей работающих в моем классе в примере золотого сечения.

Теперь я знаю, почему пропорцию называют – золотым сечением.

Мне было интересно работать над этой темой.

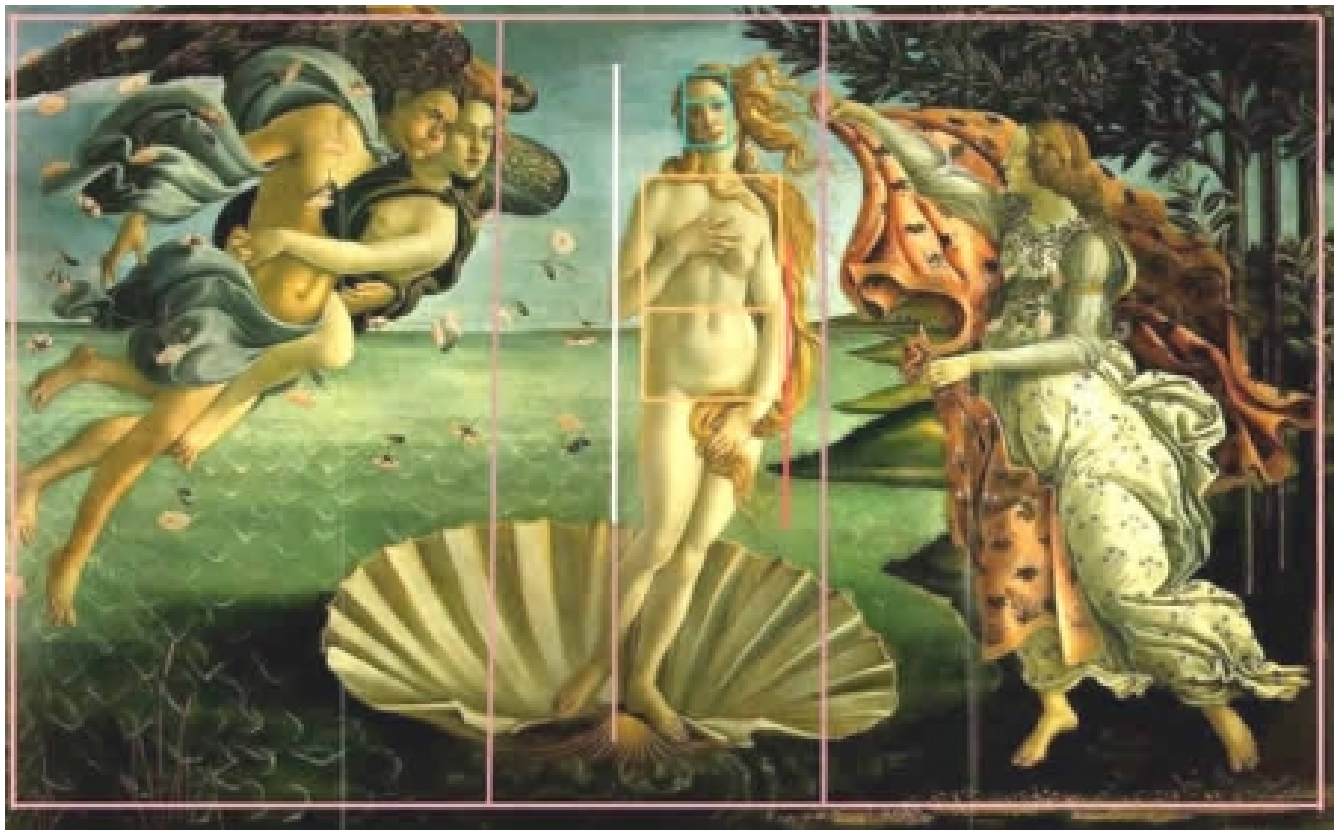
## 6. Литература

1. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения. – М.: Логос, 2014
2. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение «Квант» №8, 1973
3. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990
4. Власов В.Г. Новый энциклопедический словарь изобразительного искусства: В 10 т. – Т.3. -СПб Азбука – Класика, 2005
5. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
6. <http://slovari.yandex.ru/>

## Приложение

### Портрет Монны Лизы (Джоконды)



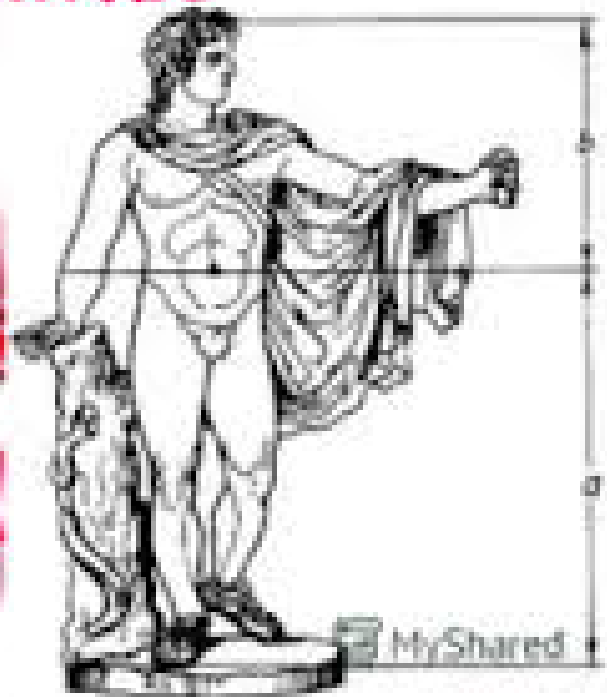


## Золотое сечение в скульптуре

Золотая пропорция применялась многими античными скульпторами.

Известна золотая пропорция статуи Аполлона

Бельведерского: рост изображенного человека делится пупочной линией в золотом сечении.



MyShared

Лука Пачоли «О божественной пропорции»

