

Краевая научно- практическая конференция
учебно- исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Лента Мебиуса

Артемова Юлия Вячеславовна,
8 А кл., МАОУ СОШ №135, г. Пермь,
Мартьянова Любовь Ивановна,
учитель математики
МАОУ СОШ №135, г. Пермь

Пермь, 2016

Содержание

1. Введение.....	3
2. Наука топология.....	4
2.1. Мебиус и его поразительное открытие.....	5- 6
3. Практическая часть	
3.1. Моделирование объекта и исследование.....	7
3.2. Проведение опытов с листом Мебиуса.....	8- 9
3.3. Экспериментальные выводы.....	10
4. Свойство и применение	
4.1. Основные свойства ленты Мебиуса.....	11
4.2. Применение ленты Мебиуса.....	12- 18
5. Заключение.....	19
6. Литература.....	20

1. Введение.

"Где начало того конца, которым оканчивается начало?"

Козьма Прутков

У входа в Музей истории и техники в Вашингтоне медленно вращается на пьедестале стальная лента, закрученная на полвитка. В 1967 году в Бразилии состоялся международный математический конгресс, где его организаторы выпустили памятную марку достоинством в пять сентаво, на которой была изображена лента Мёбиуса. И монумент высотой более чем в два метра, и крошечная марка – своеобразные памятники немецкому математику и астроному Августу Фердинанду Мёбиусу, профессору Лейпцигского университета и удивительной ленте, названной в честь математика. Лента Мёбиуса и является объектом моего исследования.

Цель работы: Исследовать поверхность ленты Мебиуса и ее свойства.

Задачи работы: Познакомиться с историей появления ленты Мебиуса.

Выявить и исследовать свойства ленты Мебиуса.

Установить области применения ленты Мебиуса.

Объект исследования: лента Мебиуса.

Гипотеза: как это ни удивительно, но односторонние поверхности существуют.

Методы: анализ литературы по теме; сравнение; обобщение; моделирование (метод моделирования позволил мне получить информацию о различных свойствах изучаемого объекта на основе опытов с его материальными моделями);

эксперимент.

2. Наука топология.

Лента или лист Мёбиуса – топологический объект, простейшая односторонняя поверхность с краем.

Сама топология началась именно с листа Мёбиуса. Наука эта молодая и потому озорная. Иначе не скажешь о тех правилах игры, которые в ней приняты. Любую фигуру тополог имеет право сгибать, скручивать, сжимать и растягивать – делать с ней всё что угодно, только не разрывать и не склеивать. И при этом он будет считать, что ничего не произошло, все её свойства остались неизменными. Для него не имеют никакого значения ни расстояния, ни углы, ни площади. А что же его интересует? Самые общие свойства фигур, которые не меняются ни при каких преобразованиях, если только не случается катастрофы – взрыва фигуры. Поэтому иногда топологию называют —геометрией непрерывности . Она известна и под именем —резиновая геометрия , потому что топологу ничего не стоит поместить все свои фигуры на поверхность детского надувного шарика и без конца менять его форму, следя лишь за тем, чтобы шарик не лопнул. А то, что при этом прямые линии, например, стороны треугольника, превратятся в кривые, для тополога глубоко безразлично.

Слово это придумал Иоганн Бенедикт Листинг, который почти в тоже время, что и его коллега, предложил в качестве первого примера односторонней поверхности перекрученную ленту.

Топология (гр. топос - место, местность + логия) — часть геометрии, изучающая в самом общем виде явление непрерывности, а также свойства обобщенных геометрических объектов.

Как было сказано выше, что топология изучает свойства таких фигур, которые не изменяются при деформациях, не допускающих разрывов и склеивания. С точки зрения топологии баранка и кружка одно и то же. Сжимая и растягивая кусок резины можно перейти от одной из этих фигур к другой. А вот баранка и шар - разные объекты; чтобы сделать отверстие, надо разорвать шар. Родоначальниками топологии были немецкий учёный Георг Кантор (1845-1918), Феликс Хаусдорф, Павел Сергеевич Александров (1896- 1982).

2.1 А.Ф.Мёбиус и его поразительное открытие.

Одним из великих геометров данной эры был Август Фердинанд Мёбиус(1790-1868) немецкий математик и астроном, теоретик, ученик "короля математиков" Гаусса. Родился 17 ноября 1790 года на территории княжеской школы Шульпфорте, близ Наумбурга (Саксония-Анхальт). Его отец занимал в этой школе должность учителя танцев. Мать Мёбиуса была потомком Мартина Лютера. Отец умер, когда мальчику было всего три года. Начальное образование Мёбиус получил дома и сразу показал интерес к математике. С 1803 по 1809 годы учился в колледже Шульпфорте, затем поступил в Лейпцигский университет. Первые полгода, в соответствии с рекомендациями семьи, он изучал право, но затем принял окончательное решение посвятить жизнь математике и астрономии. В 1813—1814 годах Мёбиус жил в Гёттингене, где посещал университетские лекции Гаусса по астрономии. Затем он уехал в Халле, чтобы прослушать курс лекций математика Иоганна Пфаффа, учителя Гаусса. В результате он получил глубокие знания по астрономии и математике.

Как-то незаметно для окружающих в 26 лет Мёбиус стал профессором, руководителем астрономической лаборатории в Лейпцигском университете. Научные статьи, лекции, работа. Все как у обычного профессора университета. Рассеянного доброго чудака студенты боготворили. Он любил поражать их неожиданными задачками и назначал лекции, к примеру, на два часа ночи, чтобы показать ночное небо во всей его красе. Возможно, имя этого человека растворилось бы в истории, если бы ни одно ненастное утро...

На улице шел дождь. Была выкурена трубка, выпита чашка любимого кофе с молоком. Вид из окна навевал тоску. В кресле сидел мужчина. Мысли были разные, но как-то ничего особенного не приходило на ум. Только в воздухе витало ощущение, что именно этот день принесет славу и увековечит имя Августа Фердинанда Мебиуса.

На пороге комнаты появилась любимая жена. Правда, она была не в хорошем расположении духа. Правильнее сказать, она была разгневана, что для мирного дома Мебиусов было почти так же невероятно, как три раза в год увидеть парад планет, и категорически требовала немедленно уволить служанку, которая настолько бездарна, что даже не способна правильно сшить ленту. Хмуро разглядывая злосчастную ленту, профессор воскликнул: —Ай да, Марта! Девочка не так уж глупа. Ведь это же односторонняя кольцевая поверхность. У ленточки нет изнанки! Идея пришла ему в голову, когда служанка неправильно сшила ленту.

Математические исследования Мёбиуса принесли ему известность в научном мире. В1848 году Мёбиус становится директором обсерватории. В 1858 году в возрасте шестидесяти восьми лет он представил Парижской академии мемуары об «односторонних» поверхностях. В своей работе «Об объеме многогранников» он описал геометрическую поверхность, 5

обладающую совершенно невероятным свойством: она имеет только одну сторону! Позже поверхность была названа лентой Мебиуса. В 1868 году Август

Фердинанд Мёбиус умирает. Статья о знаменитой ленте Мёбиуса опубликована посмертно. В честь учёного назван астероид 28516 (Möbius).

Главная ценность листа Мёбиуса состоит в том, что он дал толчок новым обширным математическим исследованиям. Его часто считают символом современной математики.

Что же это за поверхность – Лента Мебиуса?

3. Практическая часть

3.1 Моделирование объекта исследования.

Самое удивительное то, что сделать её своими руками совсем несложно.

Возьмем бумажную ленту ABCD, разделенную по ширине пополам пунктирной линией. Прикладываем ее концы АВ и CD друг к другу и склеиваем. Но не как попало, а так, чтобы точка А совпала с точкой С, а точка В с точкой С. Перед 7). Получилось знаменитое в математике с клейкой перекручиваем ленту один раз (на 180 бумажное кольцо "Лист Мёбиуса").

В Евклидовом пространстве, фактически, существует два типа ленты Мебиуса, развернутой вполюборота: одна развернутая по часовой стрелке, другая против часовой стрелки.

3.2 Проведение опытов с листом Мёбиуса

Опыт 1. Поставим точку на одной стороне каждого кольца и начертим непрерывную линию вдоль него, пока не придём снова в отмеченную точку:

Обычное кольцо. Линия проходит вдоль кольца по одной стороне, сходясь в точке начала. Вторая остаётся чистой.

Лист Мёбиуса. Непрерывная линия проходит по двум сторонам, заканчиваясь в начальной точке.

Вывод: Поверхность листа Мёбиуса является непрерывной. На листе Мёбиуса любая точка может быть соединена с любой другой точкой и при этом ни разу не придётся «переползать» через край ленты. Разрывов нет – непрерывность полная.

Опыт 2. Закрасим полностью только одну сторону колец.

Обычное кольцо. Одна сторона закрашена, другая нет.

Лист Мёбиуса. Закрашенной оказалась весь лист целиком.

Вывод: Поверхность листа Мёбиуса односторонняя. Лист оказался закрашенным полностью! А ведь мы его даже не переворачивали, чтобы закрасить с другой стороны. Да и не смогли бы перевернуть, даже если бы очень захотели. Лист Мёбиуса имеет одну поверхность. «Внешняя» и «внутренняя» стороны как бы по ходу движения вдоль ленты переходят друг в друга.

Опыт 3. Закрасим непрерывной линией только один край колец .

Обычное кольцо. Один край кольца закрашен, второй край нет.

Лист Мёбиуса. Линия края получилась, непрерывно закрашена на всём кольце.

Вывод: У листа Мёбиуса не только одна сторона, но и только один край!

Опыт 4. Разрежем кольца вдоль пополам, по линии параллельной краям

Обычное кольцо . Получилось два кольца, точнее две половинки от исходного кольца. Каждое кольцо будет уже, но длина будет такой же, как длина первоначального кольца.

Лист Мёбиуса. Получилось одно большое перекрученное кольцо в виде восьмёрки.

Исследуем полученные поверхности: На полученных в 5 опыте кольцах поставим точку на одной стороне каждого кольца и начертим непрерывную

линию вдоль него, пока не придём снова в отмеченную точку (повторим опыт 1).

Обычное кольцо. Непрерывная линия будет проходить только по одной стороне кольца. Результат опыта 1 повторился.

Лист Мёбиуса. Непрерывная линия будет проходить только по одной стороне кольца. Результат опыта 1 не повторился. Получилась не лента Мёбиуса!

Вывод: при подобном разрезании Лист Мёбиуса утратил свойство непрерывности.

Опыт 5 . Разрежем кольцо вдоль, отступив от края на $1/3$ ширины кольца
Обычное кольцо. Получилось два кольца: одно поуже, другое шире.

Лист Мёбиуса. Два перекрученные сцепленные между собой кольца: диаметр первого в два раза больше диаметра второго, ширина первого кольца в два раза меньше.

Исследуем полученные поверхности: 10 На полученных в 6 опыте кольцах поставим точку на одной стороне каждого кольца и начертим непрерывную линию вдоль него, пока не придём снова в отмеченную точку (повторим опыт 1)

Обычное кольцо. Непрерывная линия будет проходить только по одной стороне кольца. Результат опыта 1 повторился.

Лист Мёбиуса. Непрерывная линия будет проходить только по одной стороне большого кольца (не лист Мёбиуса), по всей поверхности маленького кольца будет проходить линия с двух сторон (Лист Мёбиуса).

3.3. Экспериментальные выводы.

Итак, на основе проведенных мною теоретических и практических исследований можно сделать следующие выводы:

Лента Мебиуса имеет 1 край.

Лента Мебиуса имеет одну поверхность.

Лента Мебиуса имеет одну искривленную поверхность, и если по ней двигаться, можно с внутренней части переместиться на внешнюю.

Лист Мебиуса - топологический объект. Как и любая топологическая фигура, лента Мебиуса не меняет своих свойств, пока ее не разрезают, не разрывают, или не склеивают его отдельные куски.

Один край и одна сторона листа Мебиуса не связаны с его положением в пространстве, не связаны с понятиями расстояния.

Если закрашивать одну сторону ленты Мебиуса, не пересекая края, то в итоге закрасится вся поверхность ленты.

Если пустить по поверхности ленты Мебиуса, движущиеся объекты, они будут двигаться бесконечно долго.

Если разрезать ленту Мебиуса вдоль посередине параллельно краю, то можно получить не две отдельные ленты, а одну длинную ленту, которая будет уже исходной и дважды перекручена – но не лента Мебиуса.

Если разрезать ленту Мебиуса вдоль, отступив от края $1/3$ ее ширины, то получится две ленты сцен
Мебиуса, другое маленькое – лента Мебиуса.

4.Свойства и применения

4.1.Основные свойства ленты Мебиуса.

Односторонность .Свойства ленты Мебиуса хорошо известны: 1) она имеет одну поверхность, 2) однако в каждом поперечном сечении эта поверхность имеет "внешнюю" и "внутреннюю" стороны, которые по ходу движения вдоль ленты переходят друг в друга.

Непрерывность. Тополог может, как угодно деформировать фигуру, лишь бы точки, ранее бывшие соседями, оставались одна подле другой и дальше. А, значит, с топологической точки зрения круг неотличим от квадрата или треугольника, потому что их легко преобразовать один в другой, не нарушая непрерывности. На листе Мебиуса любая точка может быть соединена с любой другой точкой и при этом ни разу не придётся переползать через край —ленты . Разрывов нет – непрерывность полная.

Представьте себе, что по наружной поверхности обычного кольца путешествует муравей. Если муравей не пересекает рёбра, а идёт вдоль листа, он вернётся в исходную точку, обойдя наружную поверхность. На ленте Мебиуса путешествие муравья будет 12 длиться вдвое дольше: муравей, не пересекая рёбер, обойдёт обе поверхности – наружную и внутреннюю.

Связность. Если квадрат разрезать от стороны к стороне, то он, естественно, распадётся на два отдельных куска. Точно также любой удар ножом разделит яблоко на две части. Но вот чтобы разделить кольцо на две части, нужно уже два разреза. И два раза придётся резать бублик, если вы хотите угостить им двух друзей. Поэтому любой тополог скажет вам, что квадрат – односвязен, кольцо и оправа от очков – двусвязны, а всяческие решётки и подобные сложные фигуры – многосвязны. А лист Мебиуса двусвязен, т.к. если разрезать его вдоль, он превратится не в два отдельных кольца, а в одну целую ленту.

Ориентированность. Ориентированность – свойство, отсутствующее у ленты Мебиуса. Так, если бы человек смог путешествовать по всем изгибам ленты Мебиуса, то когда он вернулся бы в исходную точку, он превратился бы в своё зеркальное отражение.

Хроматический номер . Хроматический номер равен максимальному числу областей, которые можно нарисовать на поверхности так, чтобы каждая из них имела общую границу со всеми другими. Если каждую такую область выкрасить по-разному, то любой цвет должен соседствовать с любым другим. Так вот, на листе бумаги, даже если его склеить в кольцо, ещё никому не удалось расположить пять цветных пятен любой формы, которые имели бы всеобщую границу. И на сфере, и на цилиндре их может быть не более четырёх. то и значит что хроматический номер этих поверхностей – четыре. А на бублике число соответствующих цветов равняется семи. Каков же хроматический номер ленты Мебиуса? Он, как ни поразительно, равен шести.

4.2. Применение листа Мёбиуса.

Удивительные свойства ленты Мёбиуса используются в самых различных изобретениях.

В виде парадоксальной можно, оказывается, геометрической изготовить фигуры лопасти бетономешалки или обычного бытового миксера - энергозатраты снизятся на одну пятую, а качество бетона (или кондитерского крема) улучшится.



Полоса ленточного конвейера выполняется в виде ленты Мёбиуса, что позволяет ему работать дольше, потому, что вся поверхность ленты изнашивается равномерно.



Представьте себе обыкновенную ленту, образующую кольцо. На наружную сторону ленты нанесён шлифовальный порошок. Ленту прижимают к изделию, прокручивают, идёт шлифовка. Через какое-то время стирается и сам шлифовальный слой на ленте. Приходится прерывать процесс, менять ленту. Как сделать, чтобы лента работала вдвое дольше, если размеры ленты увеличивать нельзя? Несколько лет назад изобретателю А. Губайдуллину было выдано авторское свидетельство на шлифовальное устройство с лентой Мёбиуса: размеры ленты увеличились вдвое.

Благодаря ленте Мёбиуса, были созданы особые кассеты для магнитофона, которые дали возможность слушать магнитофонные кассеты с —двух сторон не меняя их местами.

В большинстве матричных принтеров красящее устройство также имеет вид листа Мёбиуса для увеличения его ресурса. Юрий Артёмович Арутюнов — житель подмосковного города Жуковский, кандидат физико-математических наук установил две ленты Мёбиуса на концах самолётного крыла. Сопротивление воздушной среды снизилось. За счёт этого экономия авиационного топлива составила 7–10%. Но есть ещё один результат применения такого маленького приспособления, особенно актуальный для российской авиации: разгрузив крыло с помощью лент Мёбиуса на 20%, можно увеличить ресурс самолёта на все 100%, то есть даровать ему вторую жизнь. Особенно это ценно для такой проверенной и оправдавшей себя марки самолёта, как Ил-76. В скором времени все эти машины должны выйти из строя, а равноценной замены им нет.

Принцип ленты Мёбиуса актуален не только для технических устройств. Сердце человека «сшито» из мышечной полосы, свёрнутой в точности, как лента Мёбиуса, это установил американский кардиохирург профессор Джеральд Бакберг. Узнав об этом, Юрий Артёмович Арутюнов перевёл уравнения сердечных колебаний в режим ленты Мёбиуса — и теперь при операциях на сердце можно будет учитывать этот объективный закон природы, чтобы повысить гарантийный срок «кардио-ремонта».

Не только сердце, но и вся Вселенная выполнена по тому же оптимальному образу. Электрон, как выяснилось, описывает вокруг атомного ядра не строго круговую орбиту, а повёрнутую на 180 градусов и только благодаря этому «изобретению» не падает на ядро.

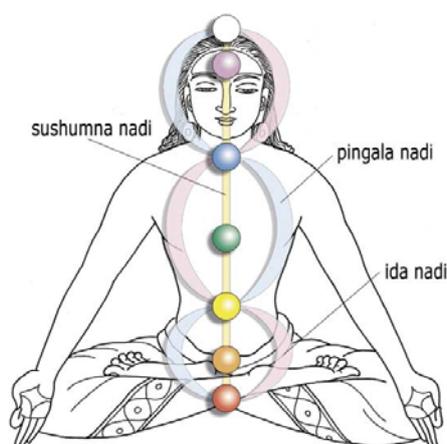
Есть гипотеза, что спираль ДНК сама по себе тоже является фрагментом ленты Мёбиуса и только поэтому генетический код так сложен для расшифровки и восприятия. Больше того – такая структура вполне логично объясняет причину наступления биологической смерти – спираль замыкается сама на себя и происходит самоуничтожение.



Физики утверждают, что все оптические законы основаны на свойствах ленты Мебиуса, в частности отражение в зеркале – это своеобразный перенос во времени, краткосрочный, длящийся сотые доли секунды, ведь мы видим перед собой... правильно, зеркального своего двойника.

Кроме того существует гипотеза, что наша Вселенная вполне вероятно замкнута в ту же самую ленту согласно теории относительности – чем больше масса тем больше кривизна пространства. Более того, эта теория полностью согласуется с теорией относительности Эйнштейна и его предположением, что космический корабль, всё время летящий прямо может вернуться к месту старта, что подтверждает неограниченность и конечность Вселенной. Из этого можно сделать вывод о реальности теории зеркальных миров – ведь астронавты, совершившие путешествие по ленте Мёбиуса и вернувшиеся в исходную точку, превратятся в зеркальных своих двойников.

В практике индийской йоги используется принцип движения энергетических потоков по траектории листа Мёбиуса.



Мини-электростанцию, позволяющую заряжать мобильный телефон энергией ветра, изобрел школьник из Дубно Николай Лукин. Он спроектировал переносную ветряную электростанцию на основе ленты Мебиуса. Конструкция высотой 70 см способна вырабатывать напряжение в 12 вольт, ее двухметровый аналог – до 40 вольт. Устройство работает при порывах ветра не менее шести метров в секунду. Ветер заставляет ленту Мебиуса крутить центральный стержень в зацеплении с маховиком, а маховик вращает генератор, который в свою очередь выдает электроэнергию. От генератора можно заряжать мобильные телефоны, ноутбуки или, например, освещать палатку.

Аттракцион «Американские горки», являющийся подобием «необыкновенного листа», многих людей приводили в восторг.



Мёбиусовая лента понравилась не только математикам, но и фокусникам. Более 100 лет лист Мёбиуса используется для показа различных фокусов и развлечений. Удивительные свойства листа демонстрировались даже в цирке, где подвешивались яркие ленты, склеенные в виде листов Мёбиуса. Фокусник закуривал сигарету и горящим концом дотрагивался до средней линии каждой ленты, которая была выполнена из специального покрытия. Огненная дорожка превращала первую ленту в более длинную, а вторую — в две ленты, пролетая одна в другую.

Имеются воплощения простого листа Мёбиуса в строительстве. Построенный в Лондоне велодром имеет контуры, которые можно назвать вариацией на тему листа Мёбиуса. В Казахстане построят библиотеку в форме ленты Мебиуса.



Необычный вид ленты Мёбиуса приглянулся и ювелирам. Часто украшения напоминают математический объект.

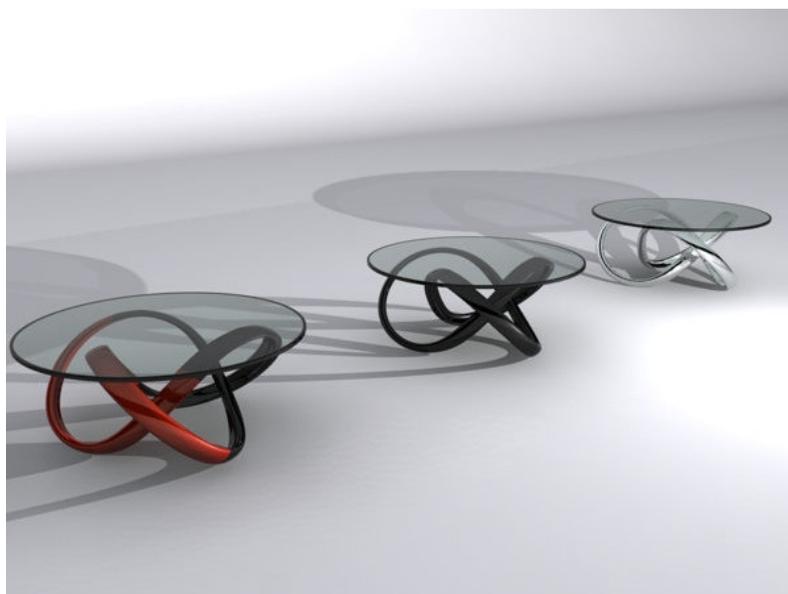


Лист Мёбиуса служил вдохновением для скульптур и для графического искусства. Эшер был одним из художников, кто особенно любил его и посвятил несколько своих литографий этому математическому объекту.



Чудесные свойства ленты породили многочисленные фантастические рассказы. В рассказе А.Дейча —Лента Мебиуса описывался случай в Нью-Йоркском метро.Однажды случилось так, что пути метрополитена пересеклись, и весь он сталнапоминать огромную ленту Мебиуса. Поезда один за другим стали исчезать, появляясь снова только через несколько месяцев

Дизайнеров тоже вдохновила лента Мебиуса.



5. Заключение.

Выполняя работу по изучению удивительного листа Мёбиуса, я узнала о жизни самого учёного, об истории уникального открытия. Не зря говорят: «Всё гениальное рядом». Открытие положило начало новому направлению в математике. Мною была изучена большая разнообразная информация. Она анализировалась и перерабатывалась.

Я получила удовольствие, когда выполняла опыты. Результаты были очевидны, поскольку эксперименты проводились с обычным кольцом и листом Мёбиуса. Так я узнала об удивительных свойствах листа Мёбиуса. Для меня это были маленькие открытия. Предположение, что лента Мёбиуса обладает удивительными свойствами, подтвердилось.

Используя источники сети Интернет, я обратила внимание на широкое применение Листа Мёбиуса. Он так нужен в практической жизни!

Поэтому этому математическому объекту и поставили памятники в Москве, Вашингтоне, в республике Беларусь и Литве.

Лист Мебиуса - символ математики,

Что служит высшей мудрости венцом...

Он полон неосознанной романтики:

В нем бесконечность свернута кольцом.

В нем – простота, и вместе с нею – сложность,

Что недоступна даже мудрецам:

Здесь на глазах преобразилась плоскость.

В поверхность без начала и конца...

(Наталия Юрьевна Иванова)

6. Литература.

1. Атанасян Л. С., Гурьевич Г. Б. Геометрия. – Ч.2. – М.: Просвещение, 1976.
2. Гарднер М., «Математические чудеса и тайны» М: Наука, 1978.
3. Квант: научно-популярный журнал. – 1975, № 7; 1977, № 7.
4. Смирнов С. Г. Библиотека «Математическое просвещение». – Вып. 27. – М.: МЦНМО, 2003
5. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. – М.: Дрофа, 1999.
6. Интернет-ресурсы:
<http://ru.wikipedia.org/wiki/>
<http://portfolio.1september.ru/>
<http://oriart.ru/publ/3-1-0-11>
<http://slovari.yandex.ru/dict/bse/article/00046/48100.htm>
<http://www.calend.ru/person/2637/>
<http://taina.aib.ru/biography/avgust-mjobius.htm>