Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

ТЕЛА, ЗАПОЛНЯЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВО С ПОМОЩЬЮ ДВИЖЕНИЯ

Белозерова Елизавета Сергеевна,
11 кл., МАОУ «Гимназия № 4 имени братьев Каменских» г. Перми,

Мартюшева Надежда Николаевна,
учитель математики,
МАОУ «Гимназия № 4 имени братьев Каменских» г. Перми

Пермь, 2016

Содержание

Введение

О рациональном использовании пространства люди задумывались с древности. В современном мире часто встаёт вопрос об оптимальном заполнении грузами фургона автомобиля или трюма теплохода, чтобы уменьшить затраты на грузоперевозки. Для решения этой проблемы необходимо решить задачу возможной конфигурации перевозимых грузов и заполнения ими пространства без пробелов. Существуют ли тела, которые можно расположить таким образом, чтобы они не перекрывали друг друга и не образовывали пустот?

Ответ удалось найти ученому-минералогу Евграфу Степановичу Федорову. В 1885 году был опубликован его труд «Начала учения о фигурах», ставший отправной точкой для теории параллелоэдров. Впоследствии теорию развивали Герман Минковский, Борис Николаевич Делоне, Борис Алексеевич Венков, Сергей Сергеевич Рышков и другие математики. Е. С. Фёдоров выделил параллелоэдры (или тела Федорова) – выпуклые многогранники, параллельным перенесением которых можно замостить евклидово пространство. Он доказал, что в трехмерном пространстве возможны пять параллелоэдров: куб, шестиугольная призма, ромбододекаэдр, усечённый октаэдр и удлиненный додекаэдр («двусторонне заточенный карандашик»). Данные многогранники являются центрально-симметричными.

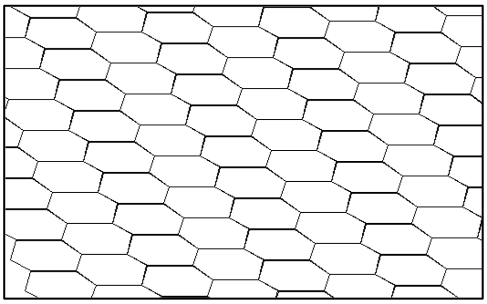
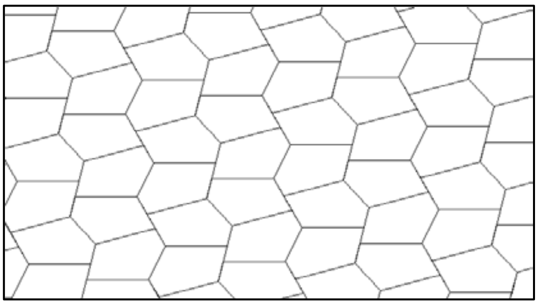
Для решения проблемы заполнения пространства многогранниками без пустот целесообразно рассмотреть этот вопрос на двумерном уровне: заполнении плоскости без пробелов. Эта тема изучена глубже. Такие комбинации фигур называются паркетами. Существуют и двумерные аналоги параллелоэдров: параллелограммы и центрально-симметричные шестиугольники. С помощью параллельного переноса этими многоугольниками можно заполнить плоскость, то есть получить паркет. В работе приведём примеры паркетов и их свойства для логического перехода к их трёхмерному варианту.

Данная работа представляет собой попытку расширить класс параллелоэдров, рассмотрев не только параллельный перенос многогранников для заполнения ими пространства, но и другие возможные виды движения.

Цель исследования – смоделировать из многогранников бумажные конструкции, изображающие заполнение пространства с помощью движений, попытаться сформулировать соответствующие конструкциям гипотезы и доказать возможность заполнения пространства многогранниками без пустот либо опровергнуть этот факт.

Глава 1. Геометрические паркеты

Паркет (мозаика) – замощение плоскости многоугольниками без пробелов и перекрытий. Протоплитки паркета – это плитки, входящие в паркет. Простейшим примером мозаики является тетрадный лист, где протоплитки – квадраты. [7]

Все многообразие паркетов можно разделить на три группы: правильные, полуправильные и неоднородные.

Правильными называют паркеты, состоящие из одинаковых правильных многоугольников, их существует только три: треугольный, квадратный и шестиугольный. Докажем это.

Для получения правильного паркета, необходимо, чтобы сумма углов с общей вершиной была равна 2π. Угол правильного n-угольника можно найти по формуле $\alpha = \frac{\pi(n-2)}{n}$. Найдем отношение 2π: $\frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{2\pi n}{\pi(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = \frac{2(n-2)}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$

Дробь $\frac{4}{n-2}$ должна быть равна натуральному числу, поэтому знаменатель n-2 не может быть больше числителя или меньше 0, кроме того, чтобы дробь существовала, знаменатель не должен равняться 0. Составим неравенство и найдем все целые значения n.

$0 < n\text{-}2 \leq 4$

$2 < n \leq 6$

Мы получили, что n может принимать значения 3, 4, 5, 6. Так как 4 не кратно 3, а 5-2=3, то останутся 3, 4, 6. Значит, правильный паркет можно составить из правильных треугольников, четырехугольников или шестиугольников, что и требовалось доказать.

Полуправильными или архимедовыми паркетами называют паркеты, состоящие из правильных многоугольников, одинаково расположенных вокруг каждой вершины, таких паркетов существует всего восемь. Докажем это.

Составим таблицу, содержащую все возможные варианты построения паркетов из правильных многоугольников.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 360^\circ$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Правильный паркет
60°	60°	60°	60°	120°		Курносый тришестиугольный паркет
60°	60°	60°	90°	90°		Курносый квадратный и изокурносый треугольный паркеты
60°	60°	90°	150°			Нет паркета
60°	60°	120°	120°			Тришестиугольный паркет
60°	90°	90°	120°			Ромботришестиугольный паркет
60°	150°	150°				Усеченный шестиугольный паркет
90°	90°	90°	90°			Правильный паркет
90°	120°	150°				Ромбоусеченный тришестиугольный паркет
90°	135°	135°				Усеченный квадратный паркет
120°	120°	120°				Правильный паркет

Исходя из данных таблицы, мы получаем только восемь полуправильных паркетов.

Глава 2. Соты

В геометрии сотами называют заполнение пространства слоями паркетов без образования пустот, то есть это расширение понятия паркета. Соты можно построить как в евклидовом, так и в неевклидовом пространстве, а также в любой размерности.

Соты поражают своим многообразием. Существует бесконечное множество сот, что затрудняет хотя бы частичную их классификацию.

Если взять произвольный паркет и достроить каждую протоплитку до призмы, основанием которой является данная протоплитка, то мы получим один слой простейших сот. Выкладывая слои друг на друга, мы заполняем пространство без пустот.

Однородными называют соты, которые состоят из однородных многогранников с одинаковыми вершинами. Многогранник считается однородным, когда все грани – правильные многоугольники, все углы равны, и с помощью движения можно перевести вершину в любую другую. В таком случае все вершины равны, а многогранник имеет высокую степень вращательной и зеркальной симметрии. В трехмерном евклидовом пространстве можно построить 28 однородных сот, состоящих из выпуклых многогранников.

Все правильные соты одновременно и однородные, но в евклидовом пространстве возможен только один вид правильных сот: кубические соты. Если составить трехмерную мозаику из двух типов правильных многогранников, то получится квазиправильная мозаика, но и таких мозаик существует только две: тетраэдрально-октаэдральные и повернутые тетраэдрально-октаэдральные соты. Такие соты имеют слоистую структуру, поэтому, располагая слои различными способами, можно получить бесконечное количество сот.

Традиционно выделяют в особую группу соты, образованные параллелоэдрами, потому что такие соты обладают рядом важных свойств: все многогранники равны и центрально-симметричны. Полностью заполняя пространство, параллелоэдры касаются не только вершиной в вершину, но и грань в грань, кроме того, все они расположены параллельно друг другу. [2]

Сведения о многогранниках, образующих соты, позволяют наиболее рационально использовать пространство. Сознательно размещая предметы таким образом, чтобы их форма напоминала форму данных многогранников, можно уменьшить размер пустот, которые составляют серьезную проблему при хаотичном расположении предметов для их хранения и транспортировки. Использование упаковки в форме параллелоэдров значительно упрощает сам процесс размещения объектов, ведь параллельный перенос не требует поворота.

Таким образом, теоретические исследования в области геометрии находят применение в повседневной жизни.

Глава 3. Федоровские тела

Федоров Евграф Степанович – выдающийся ученый, академик РАН, кристаллограф, минералог, математик, основоположник теории строения кристаллов. Родился в 1853 году в семье военного инженера, окончил военную гимназию в Санкт-Петербурге, затем Военно-медицинскую академию. С ранних лет Е. С. Федоров обладал склонностью к математике и другим точным наукам, ради призвания решил отказаться от военной карьеры и стать ученым, поступил в Химико-технологический институт и, проучившись там два года, перешел в Петербургский горный институт сразу же на третий курс. Удивительно, что, блестяще закончив институт (Федоров был первым в списке студентов, его фамилию даже занесли на памятную мраморную доску), ученый не был принят в аспирантуру. Его революционные идеи не были признаны кристаллографами того времени.

Скоро научное сообщество осознало свою ошибку. В 1890 году был опубликован труд «Симметрия правильных систем фигур», в котором Е. С. Федоров вывел 230 пространственных групп симметрии в кристаллах, то есть все возможные геометрические законы симметрии в расположении частиц внутри кристаллов. Это открытие было сделано за 27 лет до того, как доказали само существование кристаллический решетки.

С 1895 года Е. С. Федоров преподает геологию в Московском сельскохозяйственном институте, читает лекции в Петербургском Горном институте, где занимает пост директора, становится членом ряда иностранных академий и научных обществ. Триумф учения Федорова наступил с открытием У. Г. и У. Л. Брэггов, доказавшим его теорию.

Однако не меньшее значения имела его первая научная работа «Начала учения о фигурах», над которой Е. С. Федоров начал работать еще в 1869 году, то есть в возрасте 15 лет! На завершение ему потребовалось целое десятилетие. Именно в «Началах учения о фигурах» была изложена основа теории параллелоэдров, сразу же привлекшей внимание математиков.

Параллелоэдры – это выпуклые многогранники, которыми можно замостить евклидово пространство с помощью параллельного переноса.[4]

Е. С. Федоров доказал, что при $d=3$ существуют лишь пять параллелоэдров: куб, шестиугольная призма, ромбододекаэдр, усечённый октаэдр и удлиненный додекаэдр.[5]

Изучение параллелоэдров продолжается до сих пор, в этом разделе геометрии осталось множество нерешенных задач. Например, задача о классификации, которая имеет решение лишь для $d\leq4$. Пятимерные параллелоэдры образуют так называемый «комбинаторный взрыв». Исследования

П. Энгела показывают, что существует более 100 000 комбинаторных типов пятимерных параллелоэдров, но точное их количество не определено. [1]

Не доказана и гипотеза о размерности, которая считается одной из самых известных гипотез теории параллелоэдров. Ее выполнение необходимо для выполнения первой гипотезы Вороного, доказанной только в некоторых частных случаях. Как и первая, вторая гипотеза Вороного остается всего лишь предположением.[3]

Перечисленные вопросы являются лишь частью всех задач в теории параллелоэдров, решения которых все еще не найдены.

Глава 4. Моделирование тел, заполняющих пространство с помощью движений

Моделирование – это построение и изучение моделей существующих объектов, процессов или явлений, чтобы получить их объяснение или предсказать события, интересующие исследователя. На моделировании основывается любой научно-исследовательский метод: теоретический, при котором используют, в основном, абстрактные знаковые модели, и экспериментальный, использующий предметные модели.

Геометрическое моделирование – это моделирование геометрическими методами. При геометрическом моделировании модель рассматривается как изучаемый объект, оригинал, что отличает его от начертательной геометрии и дает ряд преимуществ для конкретных целей. Метод геометрического моделирования, в целом, упрощает работу с объектом: терминология становится проще, потому что модель и есть оригинал, различные методы изображения (проекционный чертеж, метод Монжа и др.) превращаются в проекционную модель, что позволяет инвариантно изучать изображения и освобождает от формализма, связанного с понятием полноты и метрической определенности изображения.

Смоделировать многогранники можно, например, с помощью разверток. Развертка – это конечное множество многоугольников, соответственно равных граням многогранника, с указанием, какие ребра необходимо совместить (склеить), чтобы получить объемную модель.

Изготовление модели многогранника условно можно разделить на два основных этапа: черчение развертки и склеивание.

Для создания развертки необходимо определить, из каких многоугольников она будет состоять, то есть найти проекции всех граней. Затем изготавливают бумажные шаблоны каждого многоугольника, из которых составляют развертку, добавив клапаны для склейки.

Условие получение замкнутой поверхности - каждый многоугольник переходит в другой через склеенные стороны. Кроме того, сумма углов при каждой из вершин не должна превышать 360˚.

Основные этапы работы

1. Начертить развертку с учетом клапанов для склеивания.
2. Продавить грани для правильного сгиба
3. Вырезать развертку
4. Склеить развертку

Для данного исследования были изготовлены развертки прямых параллелепипедов (основание – параллелограмм), прямых треугольных призм, правильных тетраэдров, правильных октаэдров.

Вопрос моделирования является актуальным в данной работе в силу возможности формулирования гипотез через построение пространственных моделей многогранников и их совмещение для заполнения пространства без пробелов.

Глава 5. Тела, заполняющие пространство с помощью движений

Расширим понятие Федоровских тел, рассмотрев тела, заполняющие пространство с помощью различных видов движений. Используя метод геометрического моделирования, пойдём эмпирическим путём: попытаемся заполнить пространство прямыми параллелепипедами, прямыми треугольными призмами, правильными тетраэдрами, октаэдрами.

Попытка геометрического моделирования тел, заполняющих пространство

Опыт 1:

Изготовим развертки прямого параллелепипеда и выполним 5 моделей. Проверив различные способы совмещения, мы пришли к выводу, что этими телами можно заполнить пространство.

Сформулируем теорему на основе результатов опыта.

Теорема 1:

Прямые параллелепипеды заполняют пространство.

Доказательство:

Заполним пространство с помощью паркетов, выложенных слоями.

Пусть дан прямой параллелепипед (рис. 1). Выполним параллельный перенос вдоль трех ребер, исходящих из одной вершины. Поскольку боковые ребра перпендикулярны плоскости основания, заполнение вдоль оси *Y* возможно.

Заполнение вдоль осей *X* и *Z* возможно благодаря тому, что противолежащие стороны прямоугольника либо параллелограмма, который является основанием прямого параллелепипеда, параллельны. Из этого следует, что соответственные углы, образованные данными сторонами, равны (рис.2).

Мы получили, что пространство может быть заполнено прямыми параллелепипедами, что и требовалось доказать.

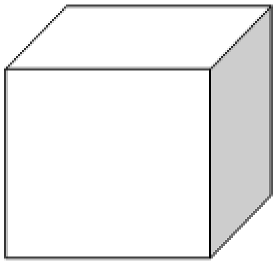


Рис. 1. Прямой параллелепипед.

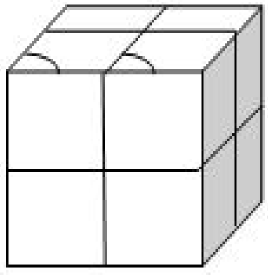


Рис. 2. Заполнение пространства прямыми параллелепипедами.

Опыт 2:

Используем модели равных прямых треугольных призм для заполнения пространства, различные способы совмещения показали, что это возможно.

Теорема 2:

Прямая треугольная призма может заполнить пространство.

Доказательство:

Воспользуемся результатом уже доказанной нами теоремы 1. Проведем диагональ основания прямого параллелепипеда, разделив тело на две равные прямые треугольные призмы (рис. 3). Получается, что прямой параллелепипед состоит из двух равных прямых треугольных призм, следовательно, ими можно заполнить пространство.

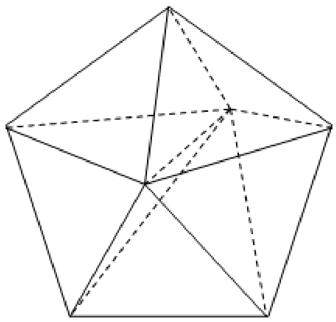


Рис. 4.

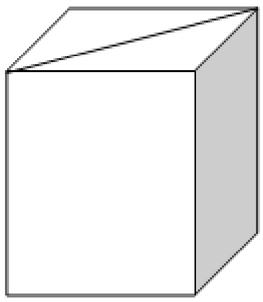


Рис. 3. Две равные прямые треугольные призмы образуют прямой параллелепипед.

Опыт 3:

Используем модели равных правильных тетраэдров для заполнения пространства. При совмещении тела заполнили пространство не полностью, образовав щель, что может быть объяснено погрешностью при изготовлении моделей. Сформулируем гипотезу.

Гипотеза: правильные тетраэдры могут заполнить пространство (рис 4).

Проверим данную гипотезу. Итак, если правильными тетраэдрами действительно можно заполнить пространство, то сечение, проходящее через боковое ребро и высоту, имеет угол $360^\circ:5=72^\circ$.

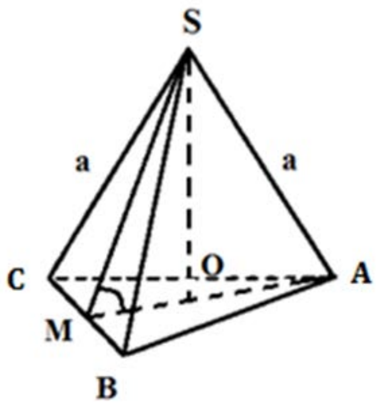


Рис. 5.

Рассмотрим правильный тетраэдр *ABCS* (рис 5.), все его ребра равны *a*, высота – *SO*.

Опустим высоту *SM* в треугольнике *CSB*. Тетраэдр правильный по условию, значит, все грани – равносторонние треугольники. По формуле высоты

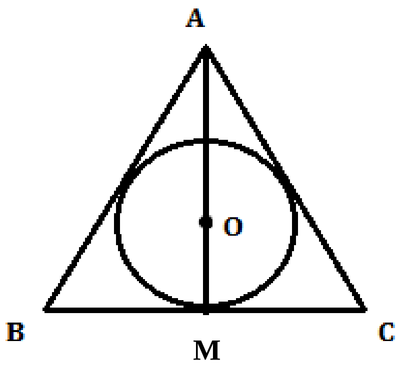


Рис. 6.

равностороннего треугольника $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AM{=}SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, потому что являются высотами равных граней.

Построим вписанную окружность в треугольнике ABC (рис. 6). Точка O - центр этой окружности – лежит на пересечении биссектрис. Так как треугольник равносторонний, точка O также лежит на пересечении высот и медиан. Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, следовательно, $AO = \frac{2AM}{3}$, $OM = \frac{AM}{3}$.

Рассмотрим треугольник SMA (рис. 7). Мы доказали, что $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $OM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Пусть угол SMO равен α.

$cos\,\alpha = \frac{OM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$\alpha = arccos\,\frac{1}{3}$

$\alpha \approx 70°30'$

$72^{\circ} \neq arccos\frac{1}{3}$

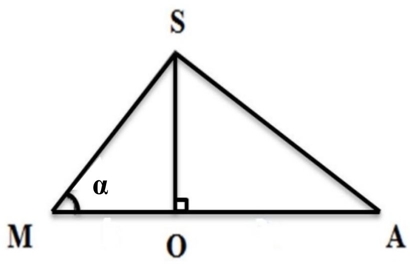


Рис. 7.

Из данного неравенства следует, что правильными тетраэдрами невозможно заполнить пространство. Мы доказали, что гипотеза неверна.

Опыт 4:

Используем модели равных октаэдров для заполнения пространства. При совмещении тела заполнили пространство не полностью, образовав щель, что может быть объяснено погрешностью при изготовлении моделей. Сформулируем гипотезу.

Гипотеза: правильные октаэдры могут заполнить пространство (рис. 8).

Проверим данную гипотезу. Итак, если правильными октаэдрами действительно можно заполнить пространство, то сечение, проходящее через боковое ребро и высоту, имеет угол 360˚:5=72˚.

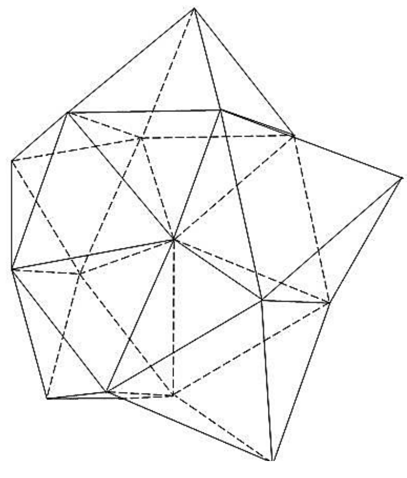


Рис. 8.

Рассмотрим октаэдр (рис. 9), все его ребра равны a, высота – SK.

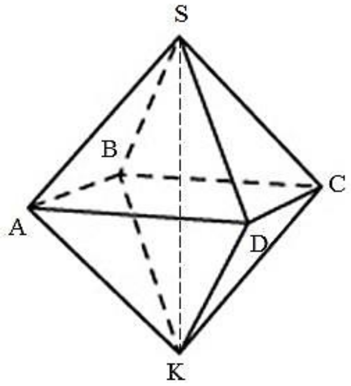


Рис. 9.

Рассмотрим четырехугольную пирамиду $ABCDS$, боковыми гранями которой являются правильные треугольники (рис. 10).

Проведем медианы SM и SK в треугольниках DSC и ASB. У данной пирамиды все боковые грани являются равносторонними треугольниками, то есть медианы SM и SK также и высоты, тогда по формуле высоты равностороннего треугольника $SM = SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

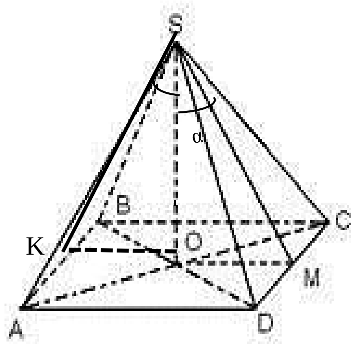


Рис. 10.

Рассмотрим треугольник KSM, SO – высота. $SM = SK$, следовательно, KSM равнобедренный треугольник, это означает, что SO не только высота, но и медиана. Получим $KO = OM = \frac{KM}{2} = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$. Пусть угол MSO равен α, тогда угол $KSM = 2$α. Найдем α.

$$sin\,\alpha = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2\alpha \approx 70^\circ\ 32'$$

$$2arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \neq 72^\circ$$

Таким образом, можно сделать вывод, что октаэдрами нельзя заполнить пространство.

Опыт 5:

Используем модели равных октаэдров и равных правильных тетраэдров для заполнения пространства. При совмещении в шахматном порядке тела заполнили пространство полностью. Сформулируем гипотезу.

Гипотеза: выложенные в шахматном порядке равные правильные тетраэдры и равные правильные октаэдры могут заполнить пространство (рис. 11).

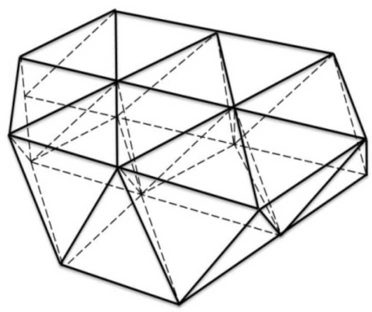


Рис. 11.

Проверим данную гипотезу. Итак, если данными многогранниками действительно можно заполнить пространство, то сумма углов, образованных двумя правильными октаэдрами и правильным тетраэдром, равна 180˚ (рис. 12).

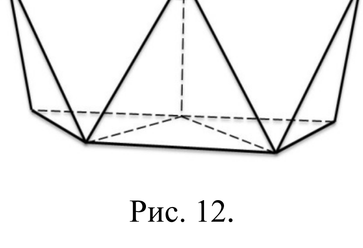


Рис. 12.

Рассмотрим правильный октаэдр *ABCDSK*, все его ребра равны a, высота – *SK*, *O* – центр квадрата *ABCD*. *MS* и *MK* – апофемы для пирамид *ABCDS* и *ABCDK*. Углы *SMO* и *OMK* равны, потому что октаэдр правильный.

Рассмотрим пирамиду *ABCDS* (рис. 14). Пирамида правильная, следовательно, все грани – равносторонние треугольники. Это значит, что апофема $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $OM = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$.

Пусть угол *SMO* равен α. Тогда сумма трёх углов, образованных в сечении тетраэдров и октаэдров равна 180^0, а это означает, что пространство заполнилось этими фигурами без пустот, если выкладывать их слоями, как соты. То есть мы доказали теорему.

Теорема 3:

Тетраэдрами и октаэдрами можно заполнить пространство.

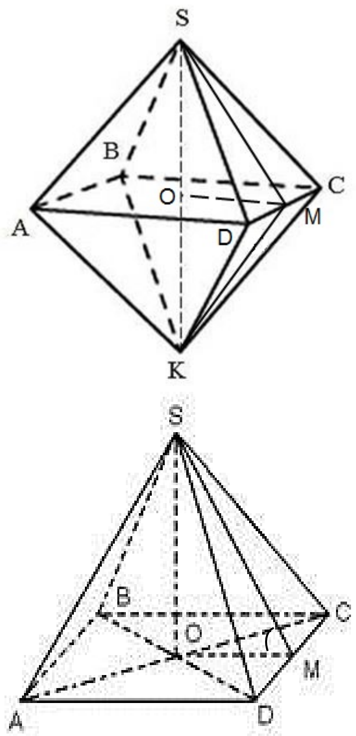


Рис. 14.

Заключение

Геометрия возникла как практическая наука, созданная для решения задач, с которыми люди сталкиваются каждый день в обыденной жизни. Человек привык взаимодействовать с трехмерными объектами, большая часть которых может быть приближена к форме многогранников, именно поэтому теория многогранников играет огромную роль в нашей жизни и так стремительно развивается.

Одной из задач, волнующих человечество с древних времен, является задача о заполнении пространства таким образом, чтобы тела не образовывали пустот и не перекрывали друг друга, то есть проблема рационального использования пространства в хозяйственных целях. Данное исследование посвящено этой проблеме.

В ходе работы изучались многогранники, которыми можно заполнить пространство. Особая группа таких многогранников, параллелоэдры, может заполнять пространство только с помощью параллельного переноса. Задачей этого исследования была попытка расширить понятие тел Федорова, рассмотрев другие виды движений, например, поворот и осевую симметрию.

В качестве двумерного прообраза данных преобразований мы рассмотрели построение паркетов. Паркетом называют множество фигур, заполняющих плоскость без пробелов и перекрытий друг другом. В ходе исследования было выяснено, какие существуют паркеты, из каких многоугольников они могут состоять; была доказана теорема о конечном множестве правильных и полуправильных паркетов.

Во второй части исследования рассматривались многогранники, которыми можно заполнить пространство, называемые сотами, а также частный случай сот – параллелоэдры или тела Федорова.

Для исследования был использован метод геометрического моделирования. Изготовлены модели многогранников и проведены опыты по совмещению этих многогранников для заполнения ими пространства. Результаты опытов мы проверили теоретически и сформулировали в виде теорем или опровержения гипотез.

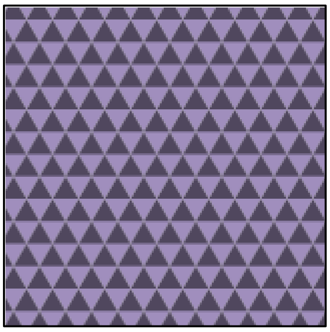
В ходе исследования было выяснено, что пространство можно заполнить прямым параллелепипедом, прямой треугольной призмой. Такими многогранниками как правильные тетраэдры и октаэдры по отдельности заполнить пространство нельзя. А комбинацией тетраэдров и октаэдров заполнить пространство без пустот удалось.

Полученные результаты позволяют расширить класс параллелоэдров за счет многогранников, заполняющих пространство с помощью различных видов движений, а не только параллельного переноса.

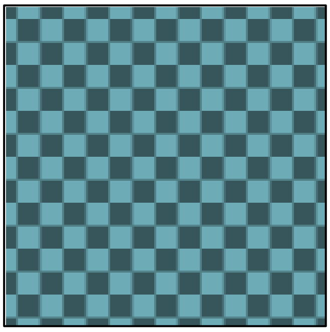
Библиографический список

1. Гарбер А. И. Комбинаторные свойства параллелоэдров. Краткое изложение заявки / Гарбер А. И. // Московский центр непрерывного математического образования. – 2012. - С. 1
2. Гарбер А. И. Параллелоэдры. Центральные проблемы и результаты / Гарбер А. И. // Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – 2012.
3. Магазинов А. Н. Комбинаторика параллелоэдров и ее связь с гипотезой Вороного: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.01.04) / Магазинов Александр Николаевич; Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук. – Москва, 2014. – С. 3-5.
4. Федоров Е.С. Начала учения о фигурах. / Федоров Е. С. – Ленинград: Издательство академии наук, 1953. – С. 283-302.
5. Федоров Е.С. Правильное деление плоскости и пространства / Федоров Е. С. – Ленинград: Наука, 1979. – С. 37-45.
6. Сайт «ХРОНОС: Всемирная история в интернете» http://www.hrono.ru/biograf/bio_f/fedorov_es.html
7. Сайт свободной энциклопедии «Википедия» https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D1%8D%D0%B4%D1%80
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D1%82%D1%8B_%28%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F%29

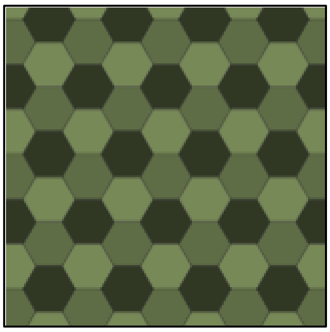
Приложение



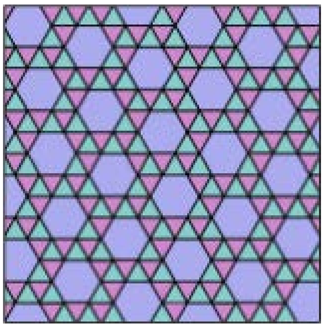
Правильный треугольный паркет



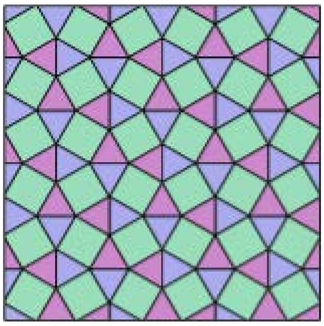
Правильный квадратный паркет



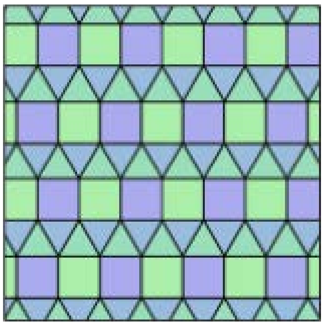
Правильный шестиугольный паркет



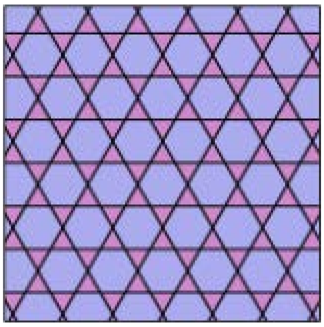
Курносый тришестиугольный паркет



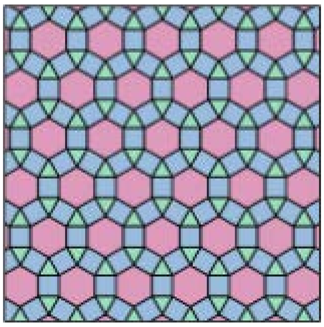
Курносый квадратный паркет



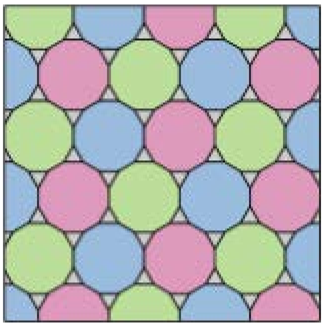
Изокурносый треугольный паркет



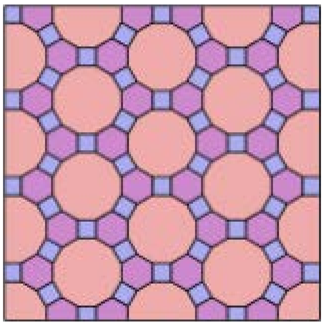
Тришестиугольный паркет



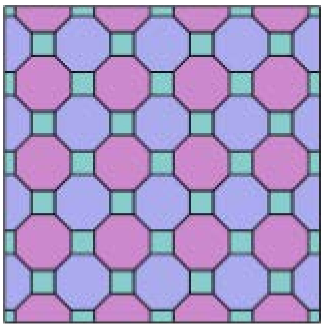
Ромботришестиугольный паркет



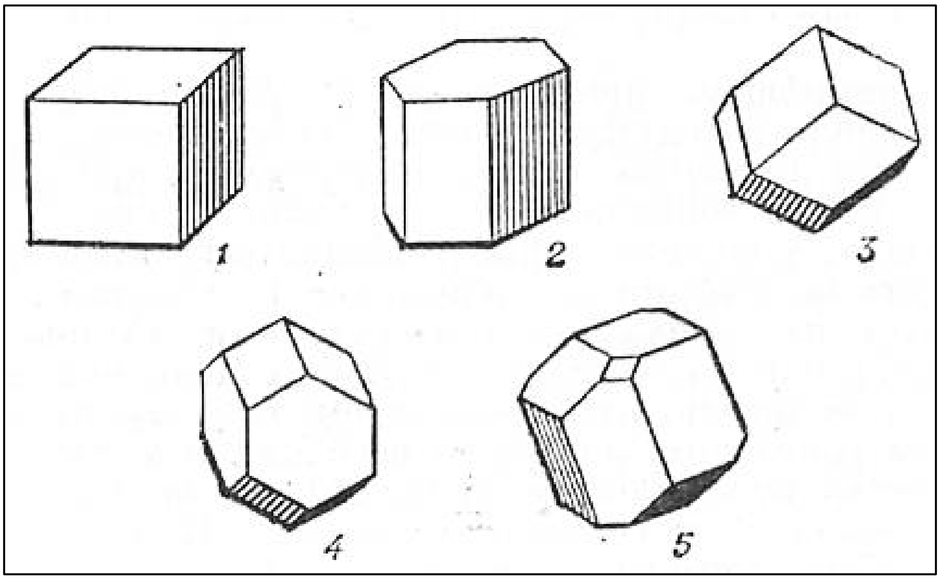
Усеченный шестиугольный паркет



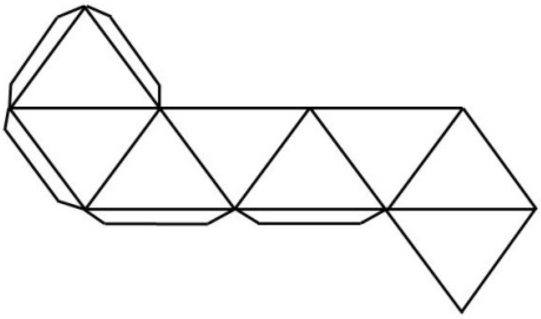
Ромбоусеченный тришестиугольный паркет



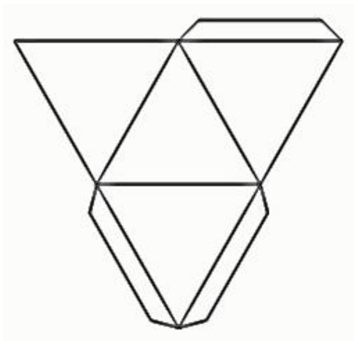
Усеченный квадратный паркет



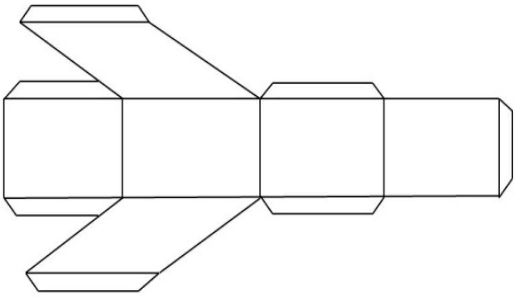
Тела Федорова (параллелоэдры). 1 – куб, 2 – шестиугольная призма, 3 – ромбододекаэдр, 4 – удлиненный додекаэдр («двусторонне заточенный карандашик»), 5 – усеченный октаэдр.



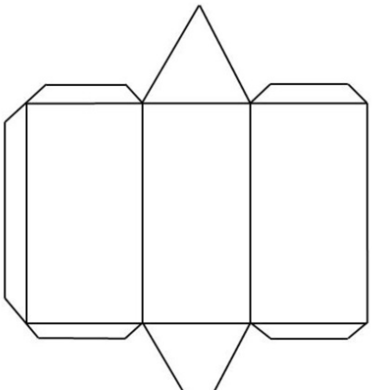
Развертка правильного октаэдра



Развертка правильного тетраэдра



Развертка прямого параллелепипеда, основание - параллелограмм



Развертка прямой треугольной призмы