Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Кориолисова сила

Одинцов Никита Сергеевич,

11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Евстафьева Анна Дмитриевна,

МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Кондратьев Никита Сергеевич,

с.н.с. кафедры ММСП ПНИПУ, к.ф.-м.н.

Пермь. 2016.

Введение

Цель – знакомство и изучение силы Кориолиса, и применение силы Кориолиса в решении задач. Исследование полёта материальной точки в различных системах отсчета.

А что между ними — реками, тайфунами, молекулами — общего? Разве только то, что всё состоит из молекул? Однако, их объединяет и нечто другое — явление, которое возникает при движении во вращающейся системе координат и которое связано с так называемыми ускорением Кориолиса и силой Кориолиса. Именно эта сила делает одни берега рек крутыми, другие — пологими, закручивает тайфуны и даже вторгается во внутреннюю «жизнь» молекул.

Рассмотрим два соседних кольцевых пояса на поверхности Земли, связанных с географическими параллелями θ_1 и θ_2. Эти два пояса отмечены на рис.1 разными цветами. Понятно, что чем больше широта θ, тем меньше линейная (окружная) скорость ($\upsilon_2 < \upsilon_1$). Например, на полюсе ($\theta = 90°$) она вообще равна нулю.

Пусть в северном полушарии течет река Некая с юга на север вдоль меридиана, т.е. перпендикулярно параллелям. Частицы воды при «пересадке» с параллели θ_1 наθ_2 по инерции стремятся сохранить скорость υ_1 (направленную к востоку) и, если бы поверхность Земли была гладкой и скользкой, они, попав на широту θ_2, отклонились бы вправо (пунктир на рис. 1), т.е. к востоку. Земной наблюдатель сказал бы, что на частицы воды действует сила, перпендикулярная скорости их движения, — уже упомянутая кориолисова сила (Гюстав Гаспар Кориолис, 1829 г). Но уж если река течет в своем русле, то эти частицы воды будут ударяться о правый берег (ведь он движется к востоку со скоростью $\upsilon_2 < \upsilon_1$) и, следовательно, будут постепенно его разрушать.

Если мы рассмотрим реку Такую-то, текущую с севера на юг, то убедимся, что она стремится отклониться к западу, но относительно своего движения опять же вправо.

Вот почему у всех меридиональных рек в северном полушарии правые берега крутые, левые — пологие. (И, конечно, уровень воды у правого берега всегда несколько выше, чем у левого.) Очевидно, что в южном полушарии меридиональные реки будут размывать левые берега.

Этот географический факт был сформулирован выдающимся естествоиспытателем Карлом Бэром (1857 г.) с учетом своих собственных и более ранних наблюдений русских исследователей (начиная с 1826 г.). При этом он верно объяснил подмеченное явление влиянием вращения Земли.

Особенно ярко действие кориолисовой силы проявляется при движении масс воды и воздуха в океане и атмосфере. Ну кто не знает, что самое знаменитое океанское течение Гольфстрим отклоняется вправо, обездоливая теплом Канаду и обогревая Европу! Ведь это та же река, только без берегов.

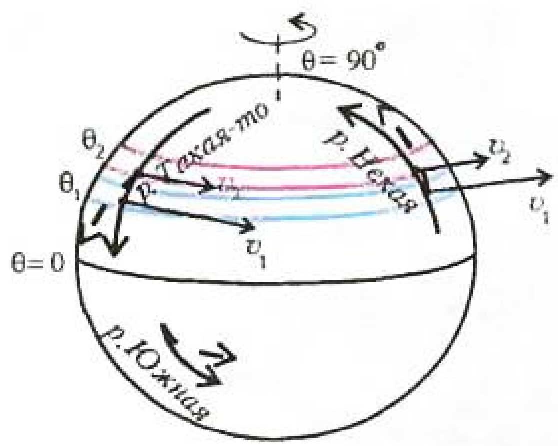


Рис. 1. Земля, с широтами θ_1 и θ_2 и реками Некая и Такая-то

А как образуются тайфуны — грозные атмосферные явления глобального масштаба (с характерным диаметром порядка тысячи километров), — производящие колоссальные разрушения? Пусть из-за неравномерного нагрева

Солнцем поверхности Земли и атмосферы где-то образуется область пониженного давления (барометр «падает», что очень неприятно для моряков). К ней радиально устремляются воздушные массы из соседних областей высокого давления. Но, как мы уже знаем, все эти движущиеся массы, вследствие вращения Земли, стремятся отклониться вправо в северном полушарии или влево — в южном. В результате возникает колоссальный вихрь, в котором массы воздуха вращаются против часовой стрелки в северном полушарии или по часовой — в южном (рис.2).

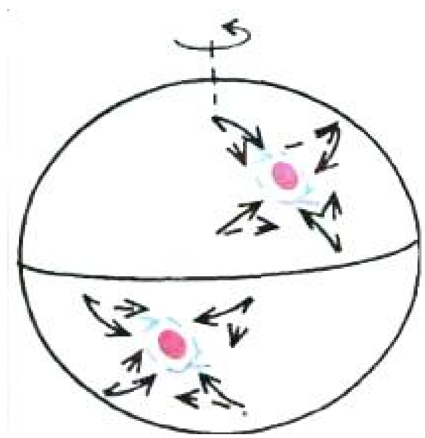


Рис2. Земля, с тайфунами в северном полушарии и южном

Перейдем теперь к молекулам, а именно — к молекулам газа. Известно, что они не только хаотически мечутся во всех направлениях между столкновениями друг с другом, но еще и быстро вращаются, причем энергия их вращательного движения того же порядка, что и энергия поступательного перемещения. А кроме того, при определенных условиях части молекул (например, атомы или в очень сложных молекулах группы атомов — радикалы) могут колебаться относительно центра масс (центра тяжести) молекулы, и опять же энергия этих колебаний того же порядка, что энергия поступательного и вращательного движений. (В физике этот факт называется принципом равнораспределения энергии по степеням свободы — но это лишь к слову.) Рассмотрим простейшую модель трехатомной молекулы, имеющей два одинаковых атома: одинаковые атомы соединены гибкими невесомыми пружинами с третьим центральным атомом (рис.3, 4). Например, это может быть молекула углекислого газа CO_2, очень важная для работы мощных инфракрасных лазеров. Если такая молекула ни с чем не взаимодействует, ее центр масс движется по прямой линии. Направим ось времени вправо и будем следить за движением ее атомов в системе координат, вращающейся вокруг

центра масс, — аналогично тому, как мы рассматривали движение рек, океанских течений и воздушных масс на вращающейся Земле.

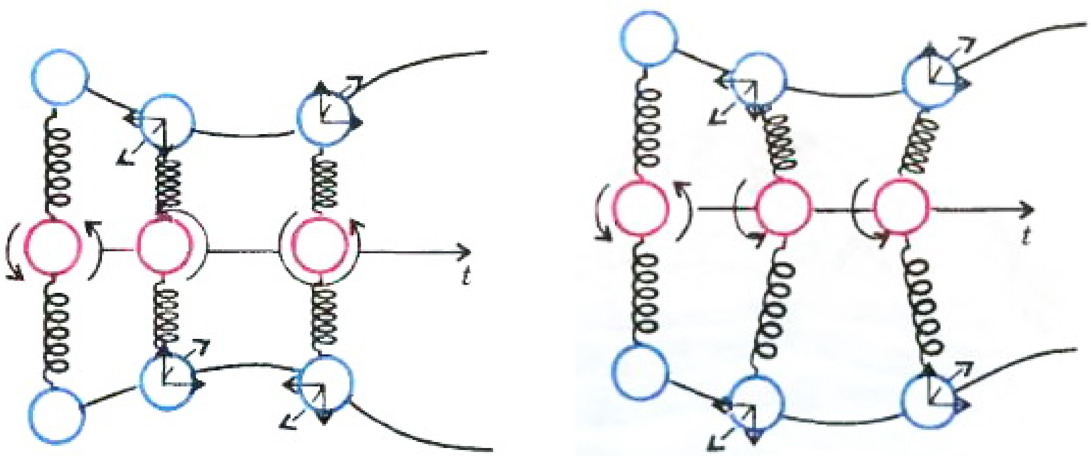


Рис. 3,4. Простейшая модель трехатомной молекулы, имеющей 2 одинаковых атома

Возможны два случая колебаний (как говорят физики, две моды): 1) крайние атомы движутся одновременно по направлению к центру масс или от него, т.е. обе пружинки одновременно сокращаются или удлиняются; 2) крайние атомы движутся одновременно в одну и ту же сторону — тогда одна из пружинок сокращается, а другая удлиняется. Можно показать, что в первом случае (см. рис.3) происходит либо ускорение, либо замедление вращения.

Например, при встречном движении атомов к центру на них действуют силы Кориолиса, отклоняющие их вправо (относительно их движения к третьему атому) и, следовательно, ускоряющие вращение. При удалении крайних атомов от центра масс силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но теперь это приводит к замедлению вращения. Точно так же фигурист на льду вращается быстрее, прижимая руки к телу. (К слову, эти явления связаны и с так называемым законом сохранения момента импульса).

А вот во втором случае наблюдается нечто еще более интересное (см. рис.4). Когда крайние атомы молекулы одновременно движутся в одну сторону, силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но одна из них стремится ускорить вращение относительно центра масс, а другая — замедлить, в результате молекула изогнется. Через четверть периода колебаний явление повторится, но теперь уже молекула будет изогнута в другую сторону. Значит, колебания атомов во вращающейся молекуле приводят к дополнительным изгибным колебаниям. Но поскольку энергии и, значит, скорости движения колебательного и вращательного движений одного порядка (как уже было сказано), их периоды и частоты могут оказаться близкими друг другу, так что дело пахнет резонансом. И поскольку молекулы излучают, все это обязательно скажется на спектре их инфракрасного излучения. Что и наблюдают физики-спектроскописты [4]. (Заметим, что во втором случае колебания крайних атомов и изгибы «пружинок» приведут к тому, что и центральный атом тоже станет как-то перемещаться относительно центра масс, но это не повлияет на рассмотренную нами качественную картину явлений.)

Сила Кориолиса

Кориолисово ускорение-это ускорение, относительно неинерциальной системы отсчёта, которое идёт на изменение относительной скорости при переносном движении и изменение переносной скорости при относительном движении. Это ускорение высчитывается по формуле (0)

$\mathbf{a}_{\text{кор}}=2[\mathbf{v}_{\text{пер}}\times\boldsymbol{\omega}]$ (0)

А сила: $\boldsymbol{F}_{\text{кор}}=2m[\mathbf{v}_{\text{пер}}\times\boldsymbol{\omega}]$

$\boldsymbol{F}_{\text{кор}}$ - сила Кориолиса, относительно неинерциальной СО;

$\mathbf{a}_{\text{кор}}$ – ускорение Кориолиса, относительно неинерциальной СО;

$\mathbf{v}_{\text{пер}}$ – переносная скорость;

$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость;

m – масса тела;

Маятник Фуко – это математический маятник, используемый для экспериментальной демонстрации вращения Земли. Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Маятник Фуко наглядно показывает действие силы Кориолиса.

Математическое моделирование

Моделирование - один из методов научного познания.

Объект исследования – это предметы, явления, процессы, существующие вне нашего сознания.

Модель **–** объект оригинал, который сохраняет некоторые важные его черты.

Свойства модели**:**

- Любая модель не равна исходному объекту, так как рассматриваются необходимые свойства и характеристики => любая модель неполна.
- Адекватность. Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя, могут служить основой для прогнозирования, поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель адекватна.
- Потенциальность - предсказательность. Модель должна давать возможность для получения новых знаний об исследуемом объекте

Классификация моделей

Материальная	Идеальная
Натурное или аналоговое	Интуитивное или научное

Математическое моделирование – это идеальное, научное, знаковое, формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели производится с использованием тех или иных математических методов.

Преимущества математического моделирования:

- ✓ Экономичность
- ✓ Можно моделировать гипотетически объекты, то есть пока несуществующие
- ✓ Возможность реализации опасных и трудно воспроизводственных режимов
- ✓ Возможность изменения масштабов времени
- ✓ Большая прогностическая сила

Задача

Мяч брошен под углом к горизонту с известной начальной скоростью v_0. Определить траекторию полёта мяча с учётом Кориолисовой силы.

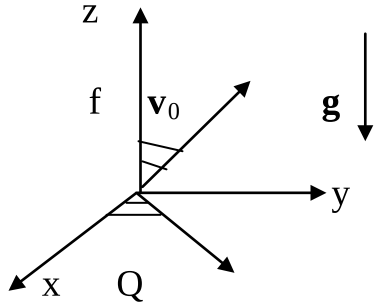
Известные параметры:

Начальные координаты, радиус земли, скорости мяча в трёхмерном пространстве, углы, под которыми был брошен мяч в трёхмерном пространстве, ускорение свободного падения, период вращения Земли.

Гипотезы:

Мяч считаем материальной точкой, пренебрегаем силой сопротивления воздуха, движение происходит в пространстве.

Для начала мы построили модель в инерциальной системе отсчёта, спроецировав мяч на оси x, y и z



$$\begin{cases} x(t)=x_0+\mathbf{v}0\cos(Q)\,\sin(f)\,t \\ y(t)=y_0+\mathbf{v}_0\sin(f)\,\sin(Q)\,t \\ z(t)=z_0+\mathbf{v}_0\cos(f)\,t-\mathbf{g}t^2/2 \end{cases}$$

Команда для построения графика в пакете Wolfram Mathematica в пространстве, по заданным параметрам:

$$P=\mathrm{ParametricPlot3D}[\{\mathrm{x0}+\mathrm{v0Cos}[Q]\mathrm{Sin}[f]t,\mathrm{y0}+\mathrm{v0Sin}[Q]\mathrm{Sin}[f]t,\mathrm{z0}+\mathrm{v0Cos}[f]t-(gt^2)/2\},\{t,0,1\},\mathrm{AxesLabel}\to\{x,y,z\},\mathrm{PlotStyle}\to\mathrm{Red}]$$

И получился график, показанный на Рис. (5).

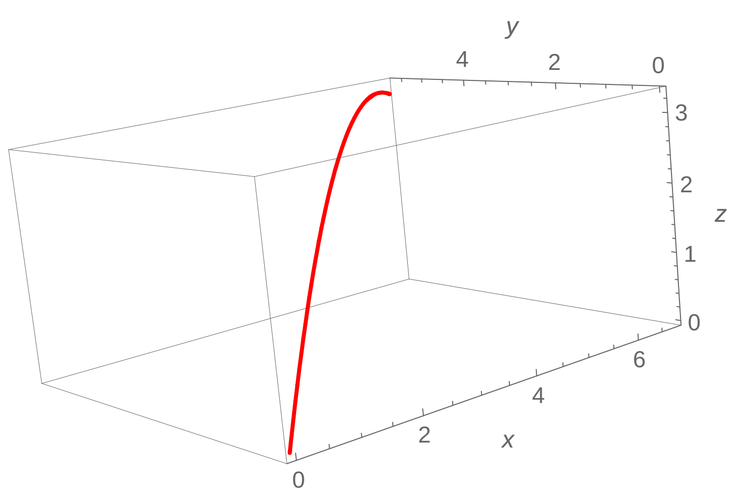


Рис.5. Мяч, брошенный под углом к горизонту без действия силы Кориолиса

Далее мы смотрим, как тело движется в неинерциальной системе отсчёта (Рис.6).

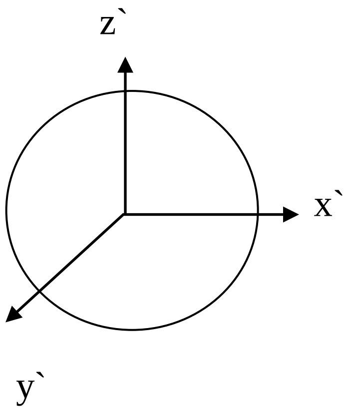
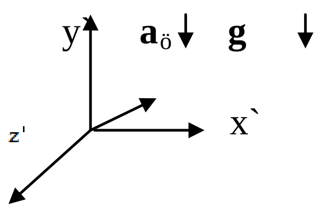


Рис.6. Земля, подвижная система отсчёта, которая вращается вокруг своей оси. Вращение происходит вокруг оси z`

Увеличим масштаб:



$\mathbf{a}_{а}$ – абсолютное ускорение;

$\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения;

$\mathbf{a}_{аб}=d\mathbf{v}_{аб} / dt=d\mathbf{v}_{от} / dt + d\mathbf{v}_{пер} / dt$ (1)

$\mathbf{a}_{аб}$ – абсолютное ускорение; $\mathbf{v}_{аб}$ – абсолютная скорость, скорость относительно неинерциальной СО; $\mathbf{v}_{пер}$ – переносная скорость, скорость относительно инерциальной СО; $\mathbf{v}_{отн}$ – относительная скорость, скорость инерциальной, относительно неинерциальной СО ;

Если условиться изменения, которые векторы $v_{пер}$ и $v_{отн}$ получают при относительном движении, отмечать индексом «1», а при переносном движении –индексом «2», то равенство (1) примет вид:

$\mathbf{a}_{аб}=(d\mathbf{v}_{от})_1 / dt + (d\mathbf{v}_{от})_2 / dt + (d\mathbf{v}_{пер})_1/dt + (d\mathbf{v}_{пер})_2 / dt$ (2)

Относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении:

$\mathbf{a}_{отн}=(d\mathbf{v}_{отн})_1 / dt$ (3)

Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении, так как $a_{пер=}a_{тела}$

$\mathbf{a}_{пер}=(d\mathbf{v}_{пер})_2 / dt$ (4)

В результате, подставив равенства (3) и (4) в (2), получим:

$\mathbf{a}_{аб}= \mathbf{a}_{отн} + \mathbf{a}_{пер} + (d\mathbf{v}_{от})_2 / dt + (d\mathbf{v}_{пер})_1 / dt$ (5)

Вводим обозначение:

$\mathbf{a}_{кор}=(d\mathbf{v}_{от})_2 / dt + (d\mathbf{v}_{пер})_1 / dt$ (6)

Подставив (6) в (5) получим:

$\mathbf{a}_{а}=\mathbf{a}_{от} + \mathbf{a}_{пер} + \mathbf{a}_{кор}$ – Теорема Кориолиса о сложении ускорений (11)

$a_а$ – абсолютное ускорение; $a_{от}$ – относительное ускорение; $a_{пер}$ – переносное ускорение; $a_{кор}$ – Кориолисово ускорение

Она говорит о том, что при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трёх ускорений: относительного, переносного и поворотного или Кориолисова.

Вывод формулы взят из [1]

2-ой закон Ньютона в случае Кориолисовой силы использовать нельзя, но можно его модифицировать:

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_а$-2-ой з-н Ньютона (10) $\mathbf{F} \neq m\mathbf{a}_{отн}$

$\mathbf{a}_{отн}$-Ускорение относительно неинерциальной системы отчёта

$\mathbf{a}_{а}$-Ускорение относительно инерциальной системы отчёта

2-ой з-н Ньютона будет работать, если добавить $F_{и,}$ это та сила, которую нужно добавить к обычной силе F, и он будет выполняться, если эта сила будет равна произведению массы тела на разность относительного и абсолютного ускорения тел.

$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{и}=m\mathbf{a}_{отн}$ (8) $\mathbf{F}_{и}=m(\mathbf{a}_{от} - \mathbf{a}_{а})$ (9)

Подставив (9) в (8), мы получим тот же 2-ой закон Ньютона, как в уравнении(10)

Из уравнения (11) получим:

$\mathbf{a}_{от} - \mathbf{a}_{а} = - \mathbf{a}_{пер} - \mathbf{a}_{кор}$

И подставим в (8)

$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{пер} - m\mathbf{a}_{кор} = m\mathbf{a}_{отн}$

$F=mg$; $\mathbf{a}_{пер=}\mathbf{a}_{ц}$; $\mathbf{a}_{\mathbf{кор}}=2[\mathbf{v}_{пер} \times \boldsymbol{\omega}]$

$m\mathbf{g}- m\mathbf{a}_{ц} – m\,2[\mathbf{v}_{пер} \times \boldsymbol{\omega}] = m\mathbf{a}_{отн\,–}$ Массы сокращаются

$\mathbf{g}- \mathbf{a}_{ц} - 2[\mathbf{v}_{пер} \times \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{a}_{отн}$; $\mathbf{a}_{ц=}(4\,Pi^2/T^2)$

Проецируем на на x*, y* и z*

$$\begin{cases} x^*= -2[v_{пер} \times \omega]_x= a_{отн\ x} \\ y^*= -g-+a_{ц} + 2[v_{пер} \times \omega]_y = a_{отн\ y} \\ z^*_{=}-2[v_{пер} \times \omega]_z= a_{отн\ z} \end{cases}$$

Посчитал [$v_{пер} \times \omega$] в пакете: $\mathrm{Cross}[\{0,0,2\,\mathrm{PI}/T\},\{x,y,z\}*(-2)]$ и получилось $\{\frac{4\mathrm{PI}y}{T}, -\frac{4\mathrm{PI}x}{T}, 0\}$.

$$
\begin{cases}
x^*:\ \frac{4\mathrm{PI}y^{`}}{T} = x^{``} \\
y^*:\ -g-+(4\,\mathrm{Pi}^2/T^2)R - \frac{4\mathrm{PI}x^{`}}{T} = y^{``} \\
z^*:\ 0 = z^{``}
\end{cases}
$$

Интегрируем всё полученное:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Kor} = \mathrm{NDSolve}[\{&D[D[\mathrm{x2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}],\mathrm{t2}] == (4\,\mathrm{Pi}/T), (D[\mathrm{x2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}]/.\mathrm{t2} \to \mathrm{t0}) = \\
&= \mathrm{v0x}, \mathrm{x2}[0] == \mathrm{x0}, D[D[\mathrm{z2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}],\mathrm{t2}] == 0, (D[\mathrm{z2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}]/.\mathrm{t2} \\
&\to \mathrm{t0}) == \mathrm{v0z}, \mathrm{z2}[0] == \mathrm{z0}, D[D[\mathrm{y2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}],\mathrm{t2}] = \\
&= -g + ((4\mathrm{Pi}^2)/T^2)R - (4\,\mathrm{Pi}/T), (D[\mathrm{y2}[\mathrm{t2}],\mathrm{t2}]/.\mathrm{t2} \to \mathrm{t0}) = \\
&= \mathrm{v0y}, \mathrm{y2}[0] == \mathrm{y0}\}, \{\mathrm{x2},\mathrm{z2},\mathrm{y2}\}, \{\mathrm{t2},\mathrm{t0},\mathrm{tc1}\}]
\end{aligned}
$$

Далее строим график, для каждой оси:

Plot[Evaluate[x2[t2]/.Kor[[1,1]]],{t2,t0,tc1}]

Plot[Evaluate[z2[t2]/.Kor[[1,2]]],{t2,t0,tc1}]

Plot[Evaluate[y2[t2]/.Kor[[1,3]]],{t2,t0,tc1}]

И строим всё это в плоскости:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{g2} = \mathrm{ParametricPlot3D}[\{&\mathrm{Evaluate}[\mathrm{x2}[\mathrm{t2}]/.\mathrm{Kor}[[1,1]]], \mathrm{Evaluate}[\mathrm{z2}[\mathrm{t2}] \\
&/.\mathrm{Kor}[[1,2]]], \mathrm{Evaluate}[\mathrm{y2}[\mathrm{t2}]/.\mathrm{Kor}[[1,3]]]\}, \{\mathrm{t2},\mathrm{t0},\mathrm{tc1}\}, \mathrm{AxesLabel} \\
&\to \{\mathrm{x2},\mathrm{z2},\mathrm{y2}\}, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{Purple}]
\end{aligned}
$$

Получилось (Рис.7):

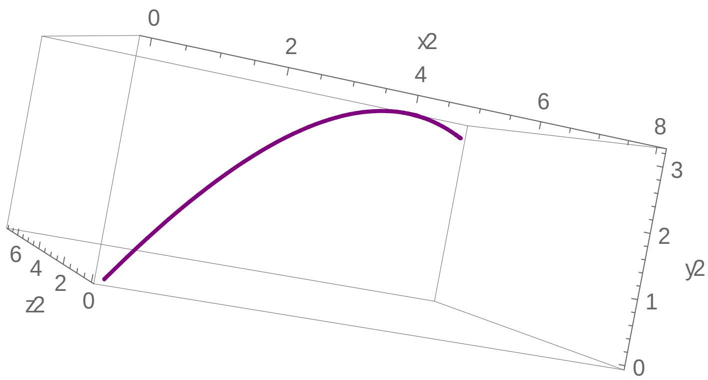
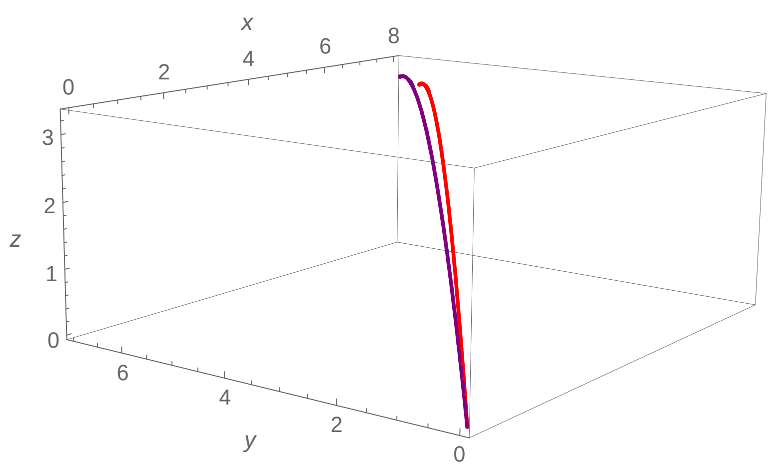


Рис.7. Мяч, брошенный под углом к горизонту, с действием силы Кориолиса

Совместив 2 графика, мы получаем:



Красный график - без силы Кориолиса

Фиолетовый график - с силой Кориолиса

Вывод: построив эти 2 графика, мы видим, как сила Кориолиса действует на мяч, брошенный под углом к горизонту. Различие небольшое, но на построенной модели его можно заметить

Список литературы

1. Мякишев Г.Я. Физика: Механика. 10кл. Углублённый уровень. М.: Дрофа. 2015. 510 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. Шк., 1986. 416 с.

3. Ашихмин В.Н. Введение в математическое модели ование, Изд.:Униве ситетская книга, Логос, 2015 г., 440 ст .

4. Стасенко А.Л. Вращение: реки, тайфуны, молекулы //Квант. — 1997. — №5. — С. 30-31

5. Смородинский Я. , Сила Кориолиса //Квант. 1975 год >> номер 4. - С. 2-8