Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Построение графиков функций, содержащих модуль

Габова Анжела Юрьевна,

10 класс, МОБУ «Гимназия №3» г. Кудымкар,

Пикулева Надежда Ивановна,

учитель математики

МОБУ «Гимназия №3» г. Кудымкар

Пермь, 2016

Содержание:

Введение

Построение графиков функций - одна их интереснейших тем в школьной математике. Крупнейший математик нашего времени Израиль Моисеевич Гельфанд писал: «Процесс построения графиков является способом превращения формул и описаний в геометрические образы. Это – построение графиков – является средством увидеть формулы и функции и проследить, каким образом эти функции меняются. Например, если написано $y = x^2$, то вы сразу видите параболу; если $y = x^2 - 4$, вы видите параболу, опущенную на четыре единицы; если же $y = -(x^2 - 4)$, то вы видите предыдущую параболу, перевернутую вниз. Такое умение видеть сразу формулу, и ее геометрическую интерпретацию – является важным не только для изучения математики, но и для других предметов. Это умение, которое остается с вами на всю жизнь, подобно умению ездить на велосипеде, печатать на машинке или водить машину».

Азы решения уравнений с модулями были получены в 6-ом – 7-ом классах. Я выбрала именно эту тему, потому что считаю, что она требует более глубокого и досконального исследования. Я хочу получить более широкие знания о модуле числа, различных способах построения графиков, содержащих знак абсолютной величины.

Когда в «стандартные» уравнения прямых, парабол, гипербол включают знак модуля, их графики становятся необычными и даже красивыми. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения базовых фигур, а также твердо знать и понимать определение модуля числа. В школьном курсе математики графики с модулем рассматриваются недостаточно углубленно, именно поэтому мне захотелось расширить свои знания по данной теме, провести собственные исследования.

Не зная определения модуля, невозможно построить даже самого простого графика, содержащего абсолютную величину. Характерной особенностью графиков функций, содержащих выражения со знаком модуля, является наличие изломов в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком модуля, изменяет знак.

Цель работы: рассмотреть построение графика линейной, квадратичной и дробно – рациональной функций, содержащих переменную под знаком модуля.

Задачи:

1) Изучить литературу о свойствах абсолютной величины линейной, квадратичной и дробно- рациональной функций.

2) Исследовать изменения графиков функций в зависимости от расположения знака абсолютной величины.

3) Научиться стоить графики уравнений.

Объект исследования: графики линейной, квадратичной и дробно – рациональных функций.

Предмет исследования: изменения графика линейной, квадратичной и дробно – рациональной функций в зависимости от расположения знака абсолютной величины.

Практическая значимость моей работы заключается:

1) в использовании приобретенных знаний по данной теме, а также углубление их и применение к другим функциям и уравнениям;

2)в использовании навыков исследовательской работы в дальнейшей учебной деятельности.

Актуальность: Задания на построение графиков традиционно - это одна из самых трудных тем математики. Перед нами выпускниками стоит проблема – удачно сдать ГИА и ЕГЭ.

Проблема исследования: построение графиков функций, содержащих знак модуля, из второй части ГИА.

Гипотеза исследования: применение разработанной на основе общих способов построения графиков функций, содержащих знак модуля, методики решения заданий второй части ГИА позволит учащимся решать эти задания на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный метод решения, применять разные методы решении и успешнее сдать ГИА.

Методы исследования, используемые в работе:

1.Анализ математической литературы и ресурсов сети Интернет по данной теме.

2.Репродуктивное воспроизведение изученного материала.

3.Познавательно- поисковая деятельность.

4.Анализ и сравнение данных в поиске решения задач.

5.Постановка гипотез и их поверка.

6.Сравнение и обобщение математических фактов.

7. Анализ полученных результатов.

При написании данной работы использовались следующие источники:

Интернет ресурсы, тесты ОГЭ, математическая литература.

I. Основная часть

1.1 Историческая справка.

В первой половине XVII века начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601-1665) и Рене Декарт (1596-1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон (1643-1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин "функция" (от латинского function – исполнение , совершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц(1646-1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем швейцарский математик Иоганн Бернулли(1667-1748) и член Петербургской Академии наук знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер(1707-1783) рассматривали функцию как аналитическое выражение. У Эйлера имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера». Это многозначное слово (омоним), которое имеет множество значений и применяется не только в математике, но и в архитектуре, физике, технике, программировании и других точных науках.

<u>В архитектуре</u> - это исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения и служащая для выражения кратных соотношений его составных элементов.

<u>В технике</u> - это термин, применяемый в различных областях техники, не имеющий универсального значения и служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например модуль зацепления, модуль упругости и т.п.

Модуль объемного сжатия(в физике)-отношение нормального напряжения в материале к относительному удлинению.

2.Основные определения и свойства функций

Функция – одно из важнейших математических понятий. Функцией называют такую зависимость переменной **у** от переменной **х**, при которой каждому значению переменной **х** соответствует единственное значение переменной **у**.

Способы задания функции:

1) аналитический способ (функция задается с помощью математической формулы);

2) табличный способ (функция задается с помощью таблицы);

3) описательный способ (функция задается словесным описанием);

4) графический способ (функция задается с помощью графика).

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

2.1 Квадратичная функция

Функция, определяемая формулой $y=ax^2+вx+c$, где **х** и **у** переменные, а параметры **а, в** и **с** – любые действительные числа, причём **а =0**, называется квадратичной.

График функции $y=ax^2+вx+c$ есть парабола; осью симметрии параболы $y=ax^2+вx+c$ является прямая, при **а>0** «ветви» параболы направлены вверх, при **а<0** – вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

1) найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости;

2) построить ещё несколько точек, принадлежащих параболе;

3) соединить отмеченные точки плавной линией.[1],[2].

2.2Линейная функция — функция вида

$y = kx + b$ (для функций одной переменной).

Основное свойство линейных функций: приращение функции пропорционально приращению аргумента. То есть функция является обобщением прямой пропорциональности.

Графиком линейной функции является прямая линия, с чем и связано ее название. Это касается вещественной функции одной вещественной переменной.

1) При $k > 0$, прямая образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.
2) При $k < 0$, прямая образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.
3) b является показателем ординаты точки пересечения прямой с осью ординат.
4)При $b = 0$, прямая проходит через начало координат. [2],[10]

2.3Дробно-рациональная функция — это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены. Она имеет вид

$$\frac{P_n(x_1, \ldots, x_n)}{Q_m(x_1, \ldots, x_m)}$$

где $P_n(x_1, \ldots, x_n)$, $Q_m(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлены от любого числа переменных.

Частным случаем являются рациональные функции одного переменного: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

1) Любое выражение, которое можно получить из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью четырёх арифметических действий, является рациональной функцией.

2) Множество рациональных функций замкнуто относительно арифметических действий и операции композиции.
3) Любая рациональная функция может быть представлена в виде суммы простейших дробей -это применяется при аналитическом интегрировании. . [2],[9]

3.Алгоритмы построения графиков с модулем

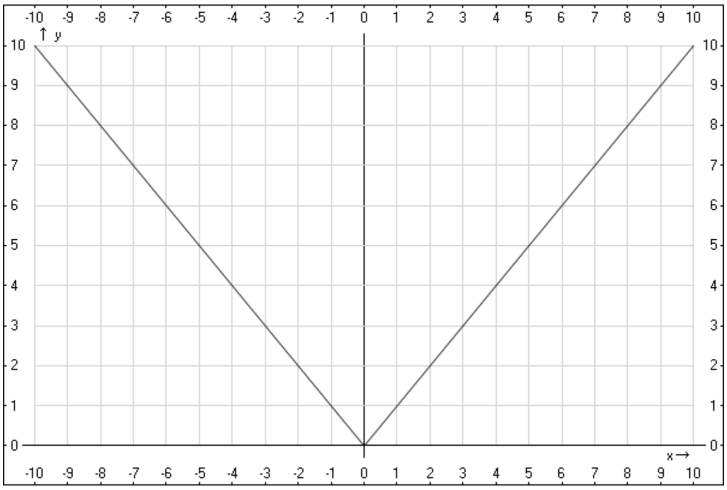
3.1 Определение модуля

Модулем действительного числа **а** называется само число **а**, если оно неотрицательно, и число противоположное **а**, если **а** отрицательное.

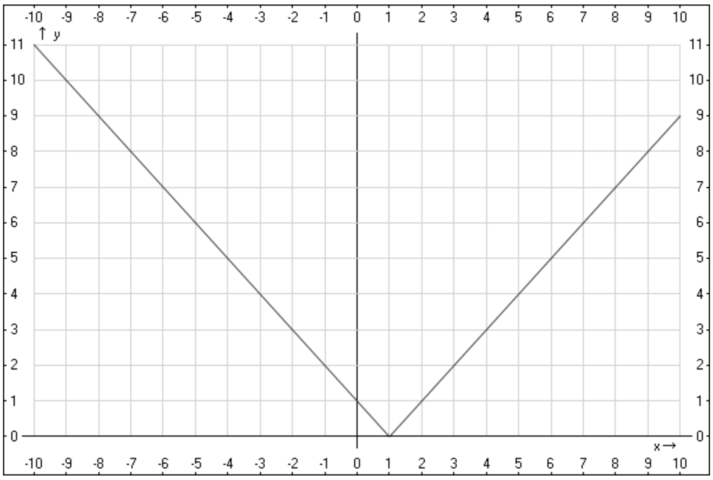
$$|a| = \begin{cases} a, если..a \geq 0 \\ -a, если..a < 0 \end{cases}$$

3.2 Алгоритм построения графика линейной функции с модулем

Чтобы построить графики функций **y=|x|** нужно знать, при положительных **x** имеем **|x|=x**. Значит, для положительных значений аргумента график **y=|x|** совпадает с графиком **y=x**, то есть эта часть графика является лучом, выходящим из начала координат под углом 45 градусов к оси абсцисс. При **x< 0** имеем **|x|= -x**; значит, для отрицательных x график **y=|x|** совпадает с биссектрисой второго координатного угла. Впрочем, вторую половину графика (для отрицательных **X**) легко получить из первой, если заметить, что функция **y=|x|** — чётная, так как **|-a|=|a|**. Значит, график функции **y=|x|** симметричен относительно оси **Oy**, и вторую половину графика можно приобрести, отразив относительно оси ординат часть, начерченную для положительных x. Получается график:**y=|x|**



Для построения берём точки (-2; 2) (-1; 1) (0; 0) (1; 1) (2; 2). Теперь построим график **y=|x-1|**.Если А — точка графика **y=|x| с** координатами (a;|a|), то точкой графика y=|x-1| с тем же значением ординаты Y будет точка A1(a+1;|a|). Эту точку второго графика можно получить из точки А(a;|a|) первого графика сдвигом параллельно оси Ox вправо. Значит, и весь график функции y=|x-1|получается из графика функции y=|x| сдвигом параллельно оси Ox вправо на 1.
Построим графики:
y=|x-1|



Для построения берём точки (-2; 3) (-1; 2) (0; 1) (1; 0) (2; 1).

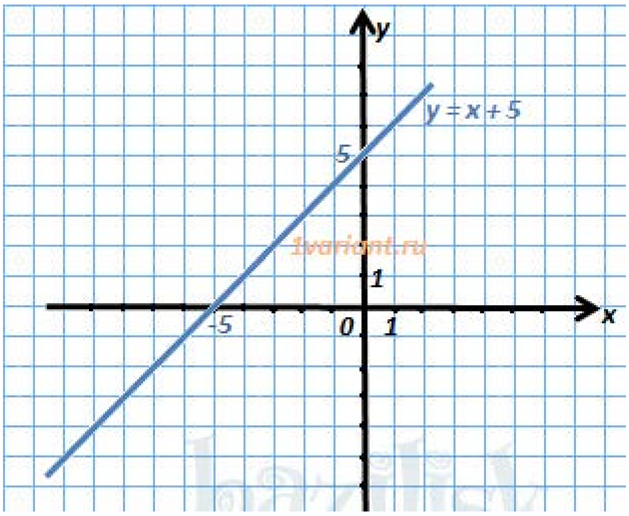
3.3 Построение графиков функций, содержащих в формуле «вложенные модули»

Рассмотрим алгоритм построения на конкретном примере

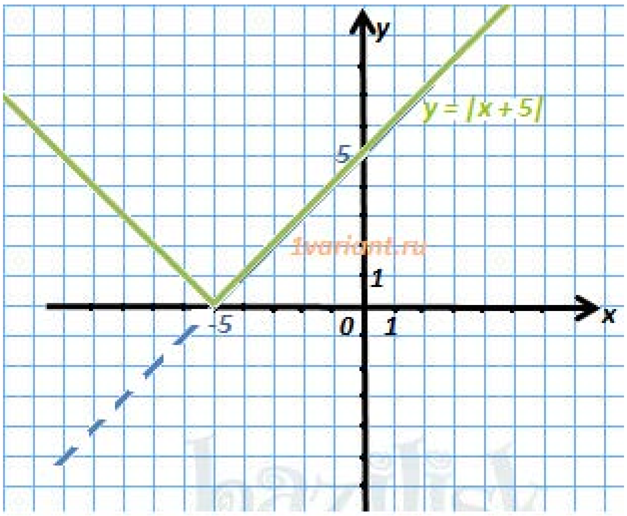
Построить график функции:

y=I-2-Ix+5II

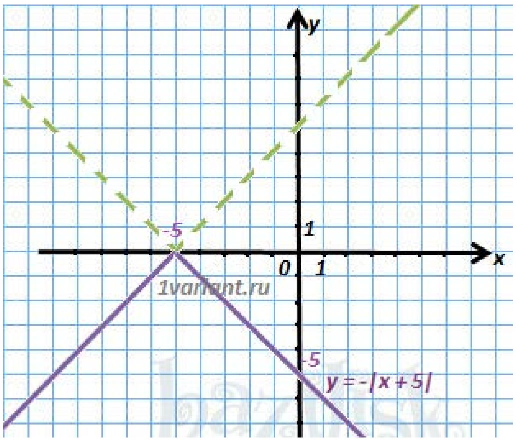
1. Строим **график функции** $y = x + 5$.



2. График нижней полуплоскости отображаем вверх **симметрично** относительно оси OX и получаем**график функции** $y = |x + 5|$.

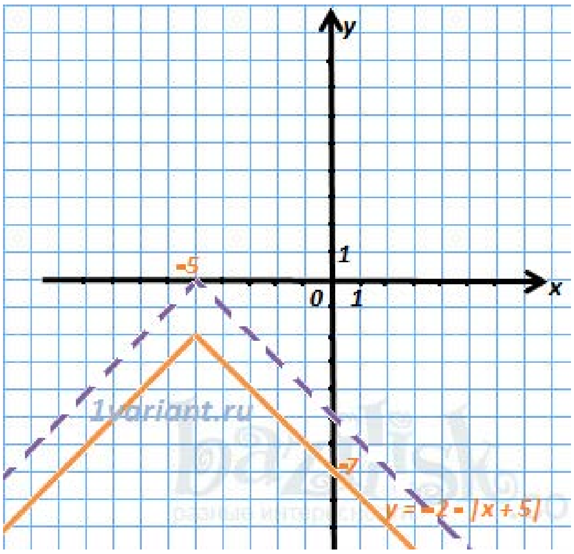


3. График функции $y = |x + 5|$ отображаем вниз симметрично относительно оси OX и получаем график функции $y = -|x + 5|$

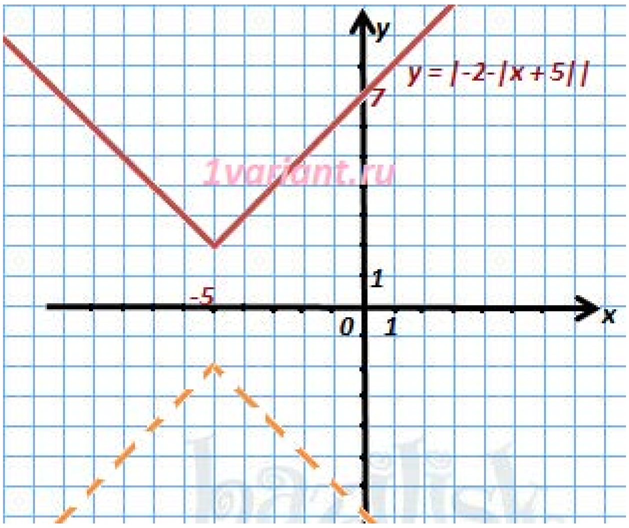


.

4. График функции $y = |x + 5|$ отображаем вниз симметрично относительно оси OX и получаем график функции $y = -|x + 5|$



5. Отображаем график функции $y = -2 - |x + 5|$ относительно оси OX и получаем график $y = \left|-2 - |x + 5|\right|$.



6. В итоге график функции выглядит следующим образом [3]

3.4. Алгоритм построения графиков функций вида

$y = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \ldots + a_n|x - x_n| + ax + b$.

В предыдущем примере было достаточно легко раскрыть знаки модуля. Если же сумм модулей больше, то рассмотреть всевозможные комбинации знаков подмодульных выражений проблематично. Как же в этом случае построить график функции?

Заметим, что графиком является ломаная, с вершинами в точках, имеющих абсциссы -1 и 2. При x = -1 и x = 2 подмодульные выражения равны нулю. Практическим путем мы приблизились к правилу построения таких графиков:

Графиком функции вида $y = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \ldots + a_n|x - x_n| + ax + b$ является ломаная с бесконечными крайними звеньями. Чтобы построить такую ломаную, достаточно знать все ее вершины (абсциссы вершин есть нули подмодульных выражений) и по одной контрольной точке на левом иправом бесконечных звеньях.

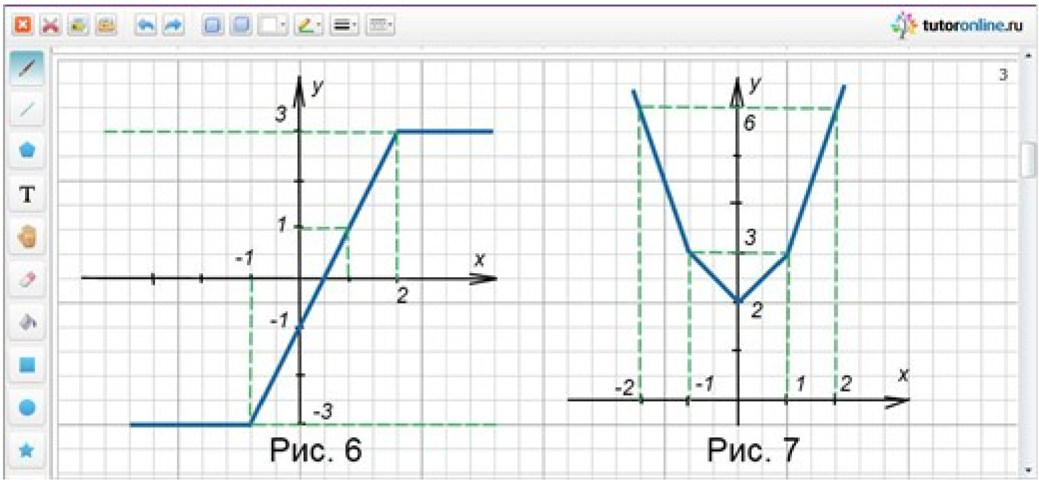


Рис. 6 Рис. 7

Задача.

Построить график функции $y = |x| + |x - 1| + |x + 1|$ и найти ее наименьшее значение.

Решение:

1.Нули подмодульных выражений: 0; -1; 1.

2. Вершины ломаной (0; 2); (-1; 3); (1; 3).(нули подмодульных выражений подставляем в уравнение)

3Контрольная точка справа (2; 6), слева (-2; 6). Строим график (рис. 7), наименьшее значение функции равно 2

3.5.Алгоритм построения графика квадратичной функции с модулем

Составление алгоритмов преобразования графиков функций.

1.Построение графика функции $y= f(|x|)$. По определению модуля данная функция распадается на совокупность двух функций.

Следовательно, график функции $y= f(|x|)$ состоит из двух графиков: $y= f(x)$ – в правой полуплоскости, $y= f(-x)$ – в левой полуплоскости.

Исходя из этого, можно сформулировать правило (алгоритм).

График функции $y= f(|x|)$ получается из графика функции $y= f(x)$ следующим образом: при $x\geq 0$ график сохраняется, а при $x < 0$полученная часть графика отображается симметрично относительно оси ОУ.

2.Построение графика функции $y= |f(x)|$.

а). Строим график функции $y= f(x)$.

б). Часть графика $y= f(x)$, лежащая над осью ОХ, сохраняется, часть его, лежащая под осью ОХ, отображается симметрично относительно оси ОХ.

3.Чтобы построить график функции y= |f(|x|)|, надо сначала построить график функции
y= f(x) при x> 0, затем при x< 0 построить изображение, симметричное ему относительно оси ОУ, а затем на интервалах, где f(|x|) <0 ,построить изображение, симметричное графику y= f(|x|) относительно оси ОХ.
4.Для построения графиков вида |y| = f(x)достаточно построить график функции y= f(x) для тех x из области определения, при которых f(x) ≥ 0 , и отобразить полученную часть графика симметрично относительно оси абсцисс.

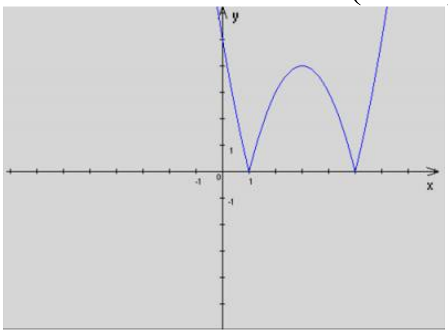
Пример
Построим график функции y = |x^2 – 6x +5|.
Сначала построим параболу y= x^2– 6x +5. Чтобы получить из неё график функции y = |x^2 - 6x + 5|, нужно каждую точку параболы с отрицательной ординатой заменить точкой с той же абсциссой, но с противоположной (положительной) ординатой. Иными словами, часть параболы, расположенную ниже оси Ox, нужно заменить линией, ей симметричной относительно оси Ox (Рис.1).


Рис.1.

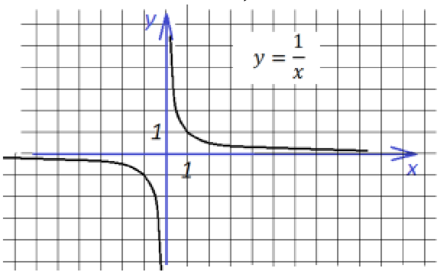
3.6 Алгоритм построения графика дробно – рациональной функции с модулем

1. Начнем с построения графика

$$y = \left|\frac{2}{x-3} + 2\right|$$

В “основе” его лежит график функции

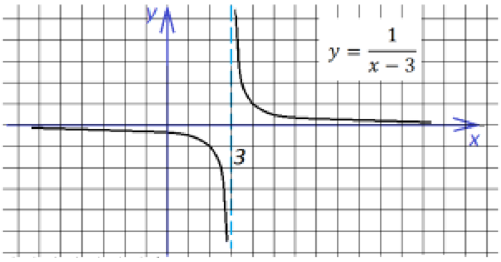
$$y = \frac{1}{x}$$

и все мы знаем, как он выглядит:


Теперь построим график

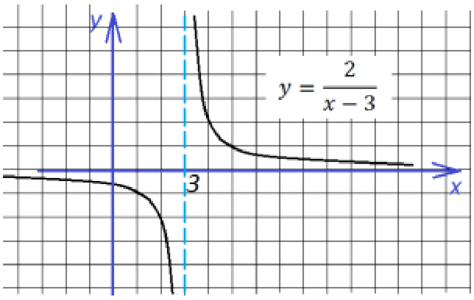
$$y = \frac{1}{x-3}$$

Чтобы получить этот график, достаточно всего лишь сдвинуть полученный ранее график на три единицы вправо. Заметим, что, если бы в знаменателе дроби стояло бы выражение x+3, то мы сдвинули бы график влево:



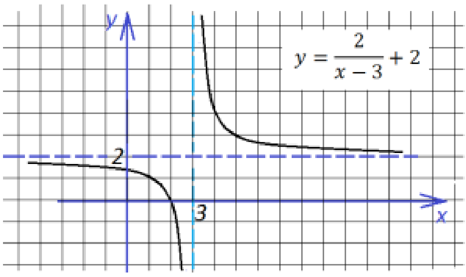
Теперь необходимо умножить на два все ординаты, чтобы получить график функции

$$y = \frac{2}{x-3}$$



Наконец, сдвигаем график вверх на две единицы:

$$y = \frac{2}{x-3} + 2$$



Последнее, что нам осталось сделать, это построить график данной функции, если она заключена под знак модуля. Для этого отражаем симметрично вверх всю часть графика, ординаты которой отрицательны (ту часть, что лежит ниже оси x):

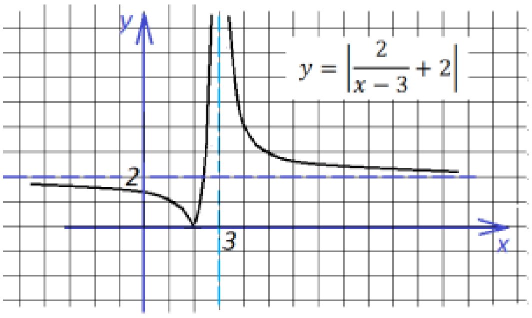


Рис.4

4.Изменения графика квадратичной функции в зависимости от расположения знака абсолютной величины.

Постройте график функции $y=\frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$

1) Поскольку **$|x| = x$ при $x \geq 0$,** требуемый график совпадает с параболой **$y=0{,}25\ x^2 - x - 3$.** Если $x<0$, то поскольку $x^2 = |x|^2$, $|x|=-x$ и требуемый график совпадает с параболой **$y=0{,}25\ x^2 + x - 3$.**

2) Если рассмотрим график **$y=0{,}25\ x^2 - x - 3$ при $x \geq 0$ и отобразить его относительно оси ОУ мы получим тот же самый график.**

(0; - 3) координаты точки пересечения графика функции с осью ОУ.

$y=0$, $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

Имеем, $x_1 = -2$; $x_2 = 6$.

(-2; 0) и (6; 0) - координаты точки пересечения графика функции с осью ОХ.

Если $x<0$, ордината точки требуемого графика такая же, как и у точки параболы, но с положительной абсциссой, равной $|x|$. Такие точки симметричны относительно оси ОУ(например, вершины (2; -4) и -(2; -4).

Значит, часть требуемого графика, соответствующая значениям $x<0$, симметрична относительно оси ОУ его же части, соответствующей значениям $x>0$.

б) Поэтому достраиваю для $x<0$ часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ.

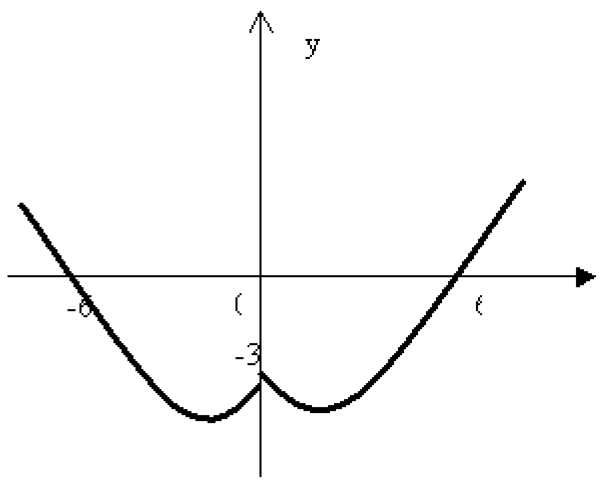


Рис. 4

График функции $y = f|(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ на множестве неотрицательных значений аргумента и симметричен ему относительно оси ОУ на множестве отрицательных значений аргумента.

Доказательство: Если $x \quad 0$, то $f|(x)|= f(x)$, т.е. на множестве неотрицательных значений аргумента графики функции $y = f(x)$ и $y = f|(x)|$ совпадают. Так как $y = f|(x)|$ - чётная функция, то её график симметричен относительно ОУ.

Таким образом, график функции $y = f|(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом:

1. построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$;

2. Для $x<0$, симметрично отразить построенную часть относительно оси ОУ.

Вывод: Для построения графика функции $y = f|(x)|$

1. построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$;

2. Для $x<0$, симметрично отразить построенную часть

относительно оси ОУ.

Построить график функции $y = |x^2 - 2x|$

Освободимся от знака модуля по определению

Если $x^2 - 2x \geq 0$, т.е. если $x \leq 0$ и $x \geq 2$, то $|x^2 - 2x|= x^2 - 2x$

Если $x^2 - 2x<0$, т.е. если $0<x< 2$, то $|x^2 - 2x|=- x^2 + 2x$

Видим, что на множестве $x \leq 0$ и $x \geq 2$ графики функции

$y = x^2 - 2x$ и $y = |x^2 - 2x|$совпадают, а на множестве (0;2)

графики функции $y = -x^2 + 2x$ и $y = |x^2 - 2x|$ совпадают. Построим их.

График функции $y = |f(x)|$ состоит из части графика функции $y = f(x)$ при y ?0 и симметрично отражённой части $y = f(x)$ при $y <0$ относительно оси ОХ.

Построить график функции $y = |x^2 - x -6|$

1) Если $x^2 - x -6 \geq 0$, т.е. если $x \leq -2$ и $x \geq 3$, то $|x^2 - x -6|= x^2 - x -6$.

Если x^2 - x -6<0, т.е. если -2<x< 3, то $|x^2 - x - 6| = -x^2 + x + 6$.

Построим их.

2) Построим $y = x^2 - x - 6$. Нижнюю часть графика

симметрично отбражаем относительно OX.

Сравнивая 1) и 2), видим что графики одинаковые.

Работа на тетрадях.

Докажем, что график функции **y = | f (x)|** совпадает с графиком функции y = f (x) для f(x) >0 и симметрично отражённой частью y = f(x) при y <0 относительно оси OX.

Действительно, по определению абсолютной величины, можно данную функцию рассмотреть как совокупность двух линий:

y = f(x), если f(x) ≥0; y = - f(x), если f(x) <0

Для любой функции y = f(x), если f(x) >0, то

| f (x)| = f(x), значит в этой части график функции

y = | f (x)| совпадает с графиком самой функции

y = f(x).

Если же f(x) <0, то | f (x)| = - f(x),т.е. точка (x; - f(x)**)** симметрична точке (x; f (x)) относительно оси OX. Поэтому для получения требуемого графика отражаем симметрично относительно оси OX "отрицательную" часть графика y = f(x).

Вывод: действительно для построения графика функции y = |f(x) | достаточно:

1.Построить график функции y = f(x) ;

2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где f(x) <0, симметрично отражаем относительно оси абсцисс. (Рис.5)

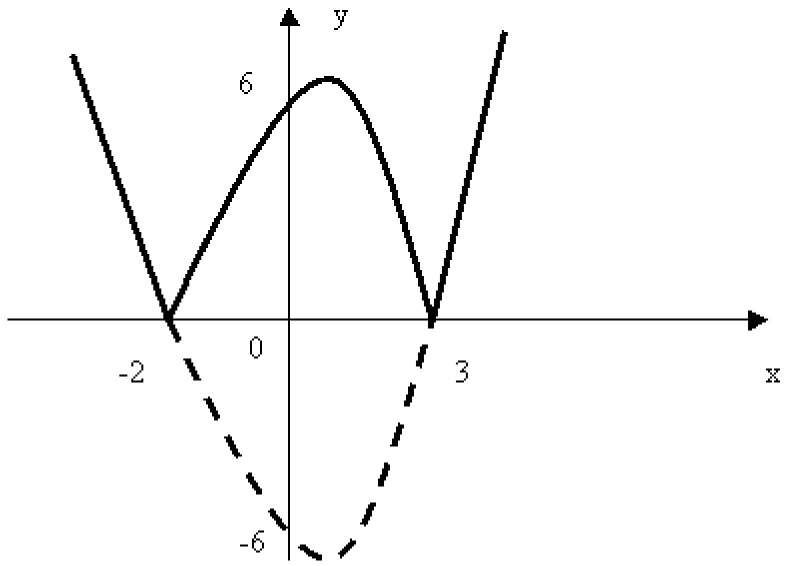


Рис.5

Вывод: Для построения графика функции $y=|f(x)|$

1.Построить график функции $y=f(x)$;

2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) < 0$, строим кривые, симметричные построенным графикам относительно оси абсцисс.

(Рис.6, 7.)

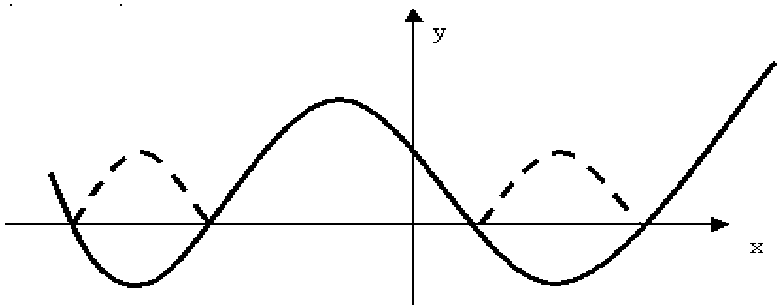


Рис.6

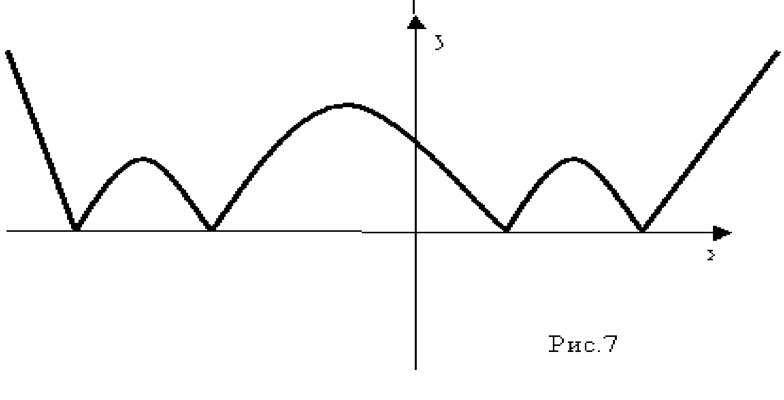


Рис.7

Исследовательская работа по построению графиков функции $y=|f|(x)||$

Применяя определение абсолютной величины и ранее рассмотренные примеры, построим графиков функции:

y = |2|x| - 3|

y = $|x^2$ - 5|x||

y = | $|x^2|$ - 2| и сделал выводы.

Для того чтобы построить график функции y = | f |(x)| надо:

1. Строить график функции y = f(x) для x>0.

2. Строить вторую часть графика, т. е. построенный график симметрично отражать относительно ОУ, т.к. данная функция четная.

3. Участки получившегося графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовывать на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

Построить график функции y = | 2|x | - 3| (1-й способ по определению модуля)

1. Строим y = **2|x | - 3** , для **2 |x| - 3** > 0 , |x |>1,5 т.е. x< -1,5 и x>1,5

а) y = **2x - 3** , для x>0

б) для x<0, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.

2. Строим y = **-2 |x| + 3**, для **2|x | - 3** < 0. т.е. -1,5<x<1,5

а) y = **-2x + 3**, для x>0

б) для x<0, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.

У = | 2|x | - 3|

1) Строим y = 2x-3, для x>0.

2) Строим прямую, симметричную построенной относительно оси ОУ.

3) Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаю симметрично относительно оси ОХ.

Сравнивая оба графика, видим, что они одинаковые.

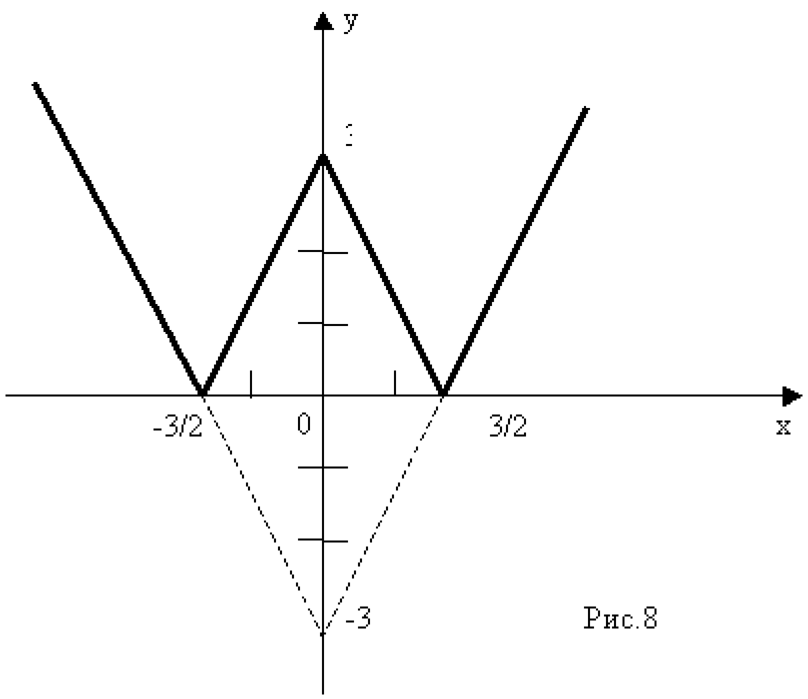


Рис.8

Примеры задач

Пример 1.
Рассмотрим график функции $y = |x|^2 – 6x + 5$.
Т. к. $|x|$ возводится в квадрат, то независимо от знака числа x после возведения в квадрат он будет положительным. Отсюда следует, то график функции $y = |x|^2 - 6x + 5$ будет идентичен графику функции $y = x^2 - 6x + 5$, т.е. графику функции, не содержащей знака абсолютной величины (Рис.2).

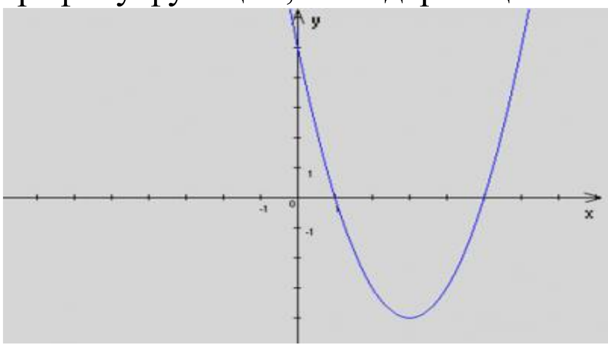


Рис.2

Пример 2.
Рассмотрим график функции $y = x^2 – 6|x| + 5$.
Воспользовавшись определением модуля числа, заменим формулу
$y = x^2 – 6|x| + 5$
Теперь мы имеем дело с хорошо знакомым нам кусочным заданием зависимости. Строить график будем так:
1) построим параболу $y = x^2 - 6x + 5$ и обведём ту её часть, которая

соответствует неотрицательным значениям x, т.е. часть, расположенную правее оси Oy.
2) в той же координатной плоскости построим параболу $y = x^2 + 6x + 5$ и обведём ту её часть, которая соответствует отрицательным значениям x, т.е. часть, расположенную левее оси Oy. Обведённые части парабол вместе образуют график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$ (Рис.3).

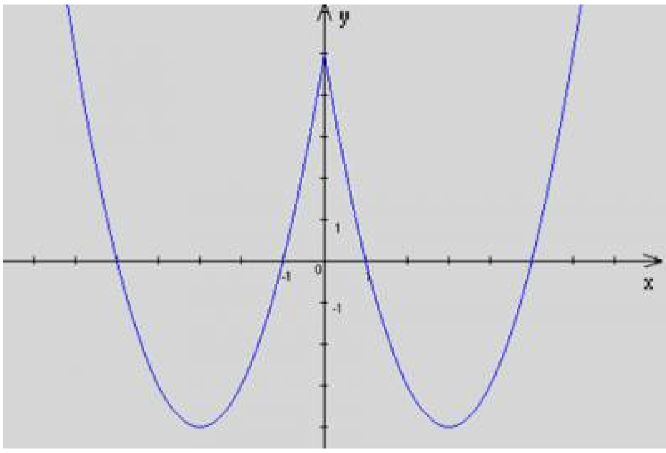


Рис.3

Пример 3.
Рассмотрим график функции $y = |x|^2 - 6|x| + 5$.
Т.к. график уравнения $y = |x|^2 – 6x + 5$ такой же, как и график функции без знака модуля (рассмотрено в примере 2) то следует, что график функции $y = |x|^2 – 6|x| + 5$ идентичен графику функции $y = x^2 – 6|x| + 5$, рассмотренному в примере 2(Рис.3).

Пример 4.
Построим график функции $y = |x^2 – 6x| + 5$.
Для этого построим график функции $y = x^2 - 6x$. Чтобы получить из неё график функции $y = |x^2 - 6x|$, нужно каждую точку параболы с отрицательной ординатой заменить точкой с той же абсциссой, но с противоположной (положительной) ординатой. Иными словами, часть параболы, расположенную ниже оси x, нужно заменить линией ей симметричной относительно оси x. Т.к. нам нужно построить график функции $y = |x^2 - 6x| + 5$, то график рассмотренной нами функции $y = |x^2 - 6x|$ нужно просто поднять по оси y на 5 единиц вверх (Рис.4).

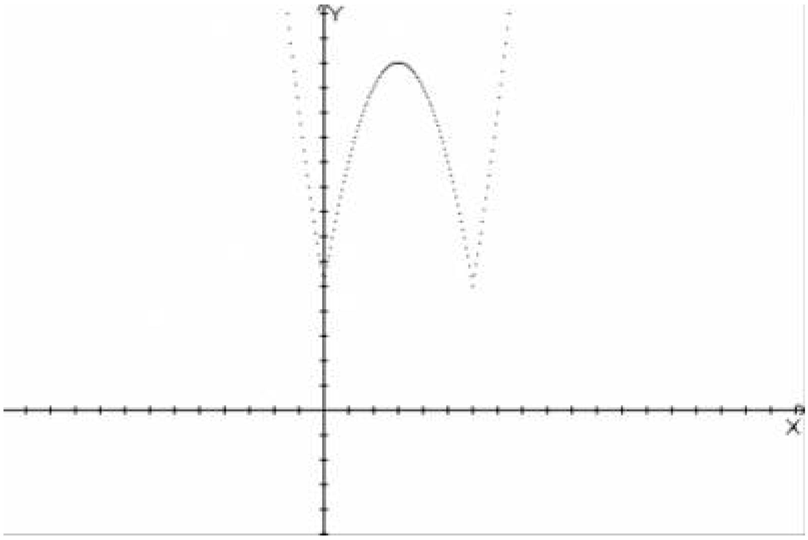


Рис.4

Пример 5.

Построим график функции $y = x^2 - |6x+5|$. Для этого воспользуемся хорошо нам известной кусочной функцией. Найдём нули функции [6]

$y = 6x +5$
$6x + 5 = 0$ при .
Рассмотрим два случая:
1)Если , то уравнение примет вид $y = x^2 – 6x -5$. Построим эту параболу и обведём ту её часть, где .
2)Если , то уравнение принимает вид $y = x^2+ 6x +5$. Постоим эту параболу и обведём ту её часть, которая расположена левее точки с координатами (Рис.5).

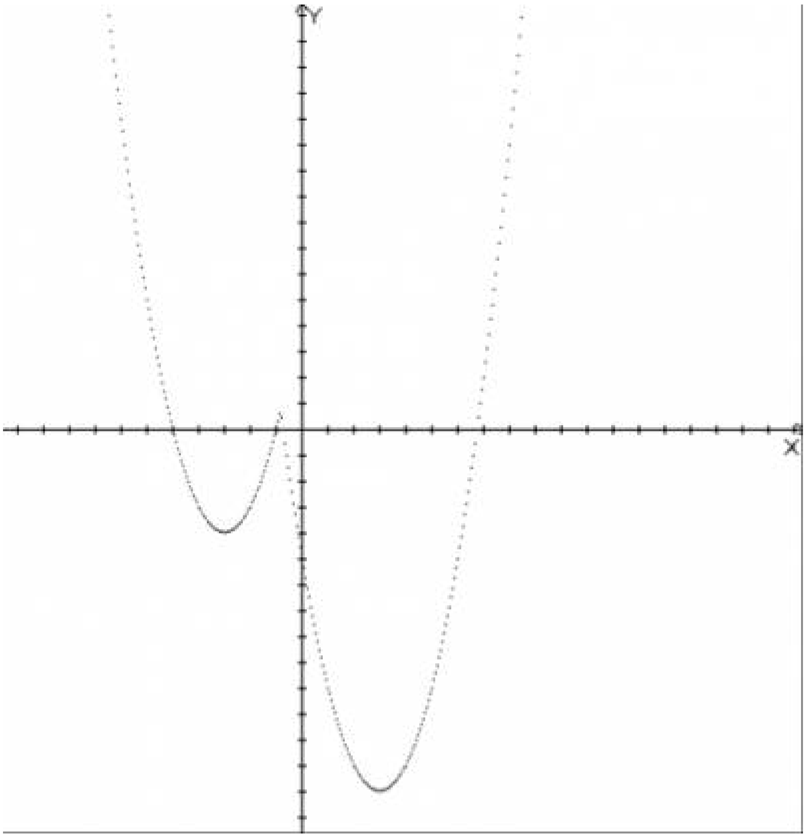


Рис.5

***Пример*6.**

Построим график функции $y = |x^2 - 6|x| + 5|$. Для этого мы построим график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$. Построение этого графика мы проводили в примере 3. Т. к. наша функция полностью находится под знаком модуля, то для того, чтобы построить график функции $y = |x^2 - 6|x| + 5|$, нужно каждую точку графика функции $y = x^2 - 6|x| + 5$ с отрицательной ординатой заменить точкой с той же абсциссой, но с противоположной (положительной) ординатой, т.е. часть параболы, расположенную ниже оси Ох, нужно заменить линией ей симметричной относительно оси Ох (Рис.6).

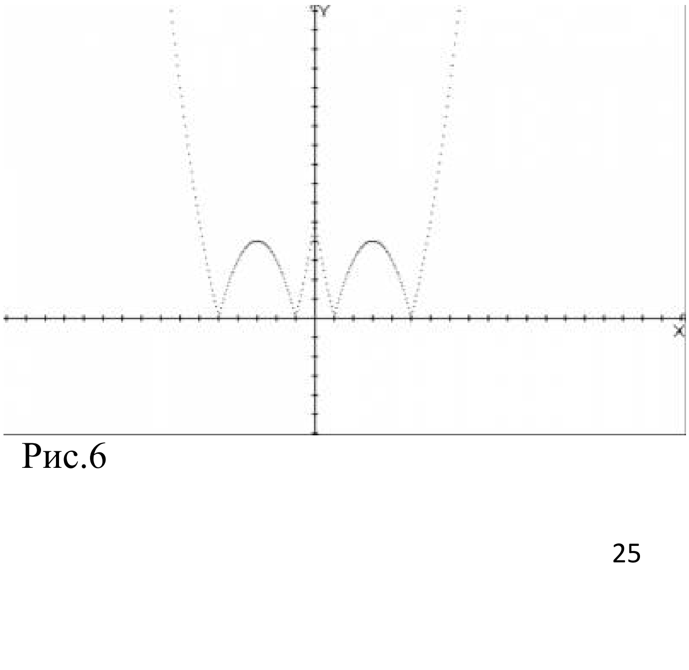


Рис.6

II.Заключение

«Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно». А.Н. Колмогоров.

Данные задачи представляют большой интерес для учащихся девятых классов, так как они очень часто встречаются в тестах ОГЭ. Умение строить данные графики функций позволит более успешно сдать экзамен. французские математики Пьер Ферма (1601-1665) и Рене Декарт (1596-1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон (1643-1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

III.Список литературы и источников

1.Галицкий М. Л., Гольдман А. М. , Звавич Л. И. Сборник задач по алгебредля 8 – 9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики – 2 –е изд. – М.: Просвящение, 1994.

2.Дорофеев Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 9 кл.:М34 Учеб. для общеобразовательных учеб. заведний – 2-е изд., стереотип. –М.: Дрофа, 2001

3.Соломоник В.С.Сборник вопросов и задач по математике – М.: «Высшая школа», 1970.

4. ЯщенкоИ.В. ГИА. Математика: типовые экзаменационные варианты: О-39 36 вариантов .М.: «Национальное образование» , 2014.- 240 с.

5. Ященко И.В. ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: О-39 36 вариантов .М.: «Национальное образование» , 2015.-240 с.

6. Ященко И.В. ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: О-39 36 вариантов .М.: «Национальное образование» , 2016.-240 с.

7.http://www.tutoronline.ru/blog/grafiki-funkcij-s-modulem

8.http://easy-physic.ru/postroenie-funktsij-soderzhashhih-modul/

9.https://ru.wikipedia.org/wiki/Рациональная_функция

10.https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейная_функция

Приложение

Пример 1.

Построить график функции $y = x^2 - 8|x| + 12$.

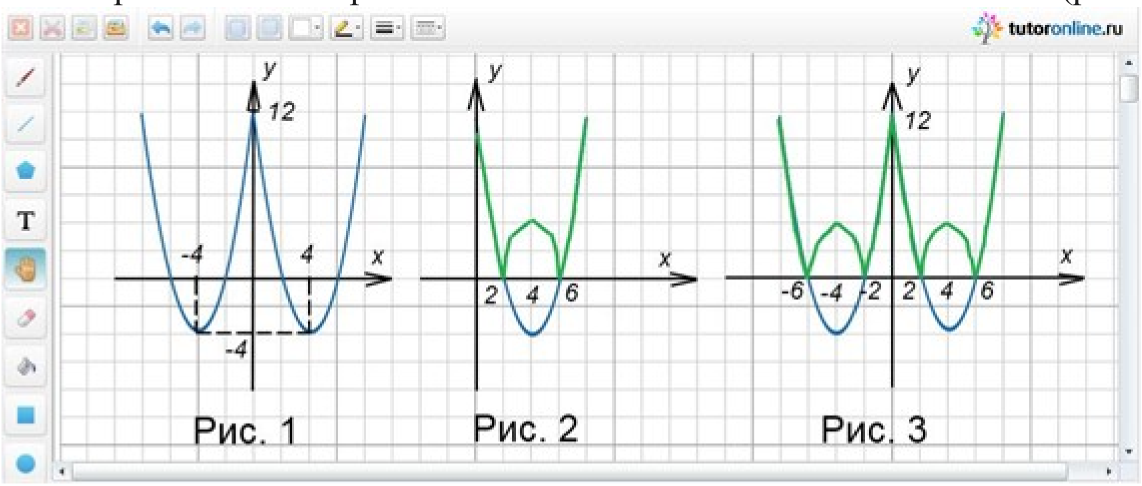
Решение.

Определим четность функции. Значение для y(-x) совпадает со значением для y(x), поэтому данная функция четная. Тогда ее график симметричен относительно оси Oy. Строим график функции $y = x^2 - 8x + 12$ для $x \geq 0$ и симметрично отображаем график относительно Oy для отрицательных x (рис. 1).

Пример 2.

Следующий график вида $y = |x^2 - 8x + 12|$.

Это значит, что график функции получают следующим образом: строят график функции $y = x^2 - 8x + 12$, оставляют часть графика, которая лежит над осью Ox, без изменений, а часть графика, которая лежит под осью абсцисс, симметрично отображают относительно оси Ox (рис. 2).



Пример 3.

Для построения графика функции $y = |x^2 - 8|x| + 12|$ проводят комбинацию преобразований:

$y = x^2 - 8x + 12 \rightarrow y = x^2 - 8|x| + 12 \rightarrow y = |x^2 - 8|x| + 12|$.

Ответ: рисунок 3.

Пример 4

$$y = |3x - 2| + x - 5$$

Выражение, стоящее под знаком модуля, меняет знак в точке x=2/3. При x<2/3 функция запишется так:

$$y = 2 - 3x + x - 5 = -2x - 3$$

При x>2/3 функция запишется так:

$$y = \ 3x - 2 \ + x - 5 = 4x - 7$$

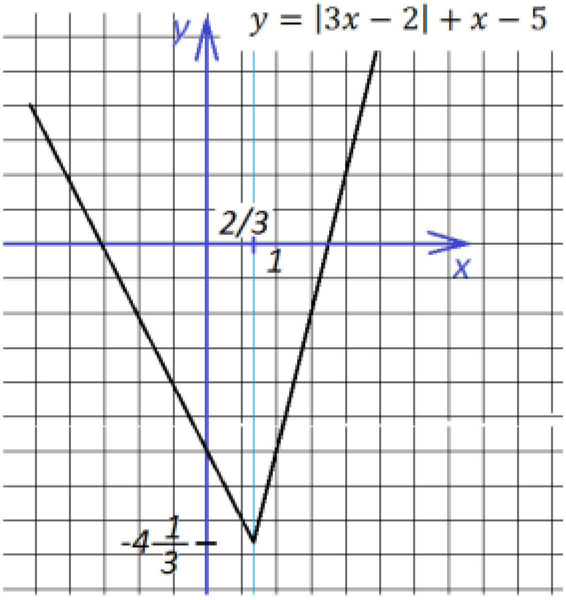
То есть точка x=2/3 делит нашу координатную плоскость на две области, в одной из которых (правее) мы строим функцию

$$y = -2x - 3$$

а в другой (левее) – график функции

$$y = 4x - 7$$

Строим:



Пример 5

Следующий график – также ломаная, но имеет две точки излома, так как содержит два выражения под знаками модуля:

$$y = |1.5x - 3| + |x - 1.5| - x$$

Посмотрим, в каких точках подмодульные выражения меняют знак:

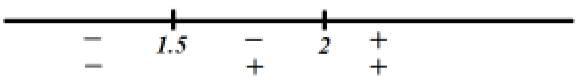
$$1.5x - 3 = 0$$

$$x = 2$$

$$x - 1.5 = 0$$

$$x = 1.5$$

Расставим знаки для подмодульных выражений на координатной прямой:



Раскрываем модули на первом интервале:

$$y = -1.5x + 3 - x + 1.5 - x = -3.5x + 4.5$$

На втором интервале:

$$y = -1.5x + 3 + x - 1.5 - x = -1.5x + 1.5$$

На третьем интервале:

$$y = 1.5x - 3 + x - 1.5 - x = 1.5x - 4.5$$

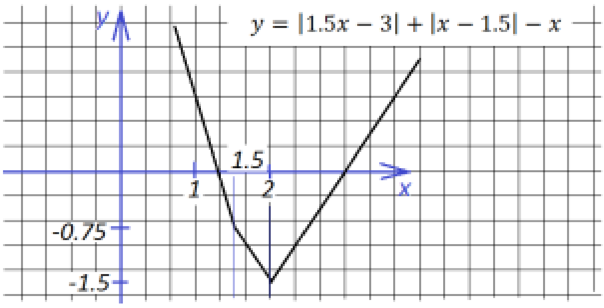
Таким образом, на интервале (-∞; 1.5] имеем график, записанный первым уравнением, на интервале [1.5; 2] – график, записанный вторым уравнением, и на интервале [2;∞) – график по третьему уравнению:

$$y = -3.5x + 4.5$$

$$y = 1.5x - 4.5$$

$$y = -1.5x + 1.5$$

Строим:



Пример 6

Теперь можем построить график, похожий на один из предыдущих, и все же отличающийся:

$$y = \left|\frac{2}{|x| - 3} + 2\right|$$

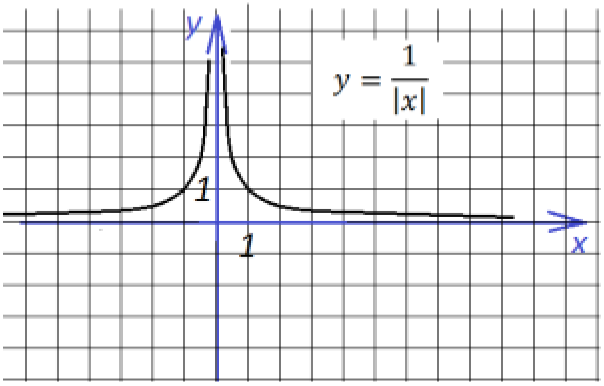
В основе опять знакомый нам график функции

$$y = \frac{1}{x}$$

но, если в знаменателе x стоит под знаком модуля,

$$y = \frac{1}{|x|}$$

то график имеет вид:



Теперь произведем сдвиг на три единицы,

$$y = \frac{1}{|x| - 3}$$

при этом сдвинутся обе части: правая – вправо, левая – влево (своеобразное зеркало : отходишь дальше – видно больше)

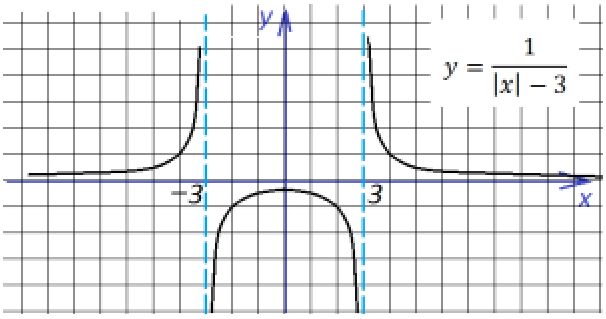
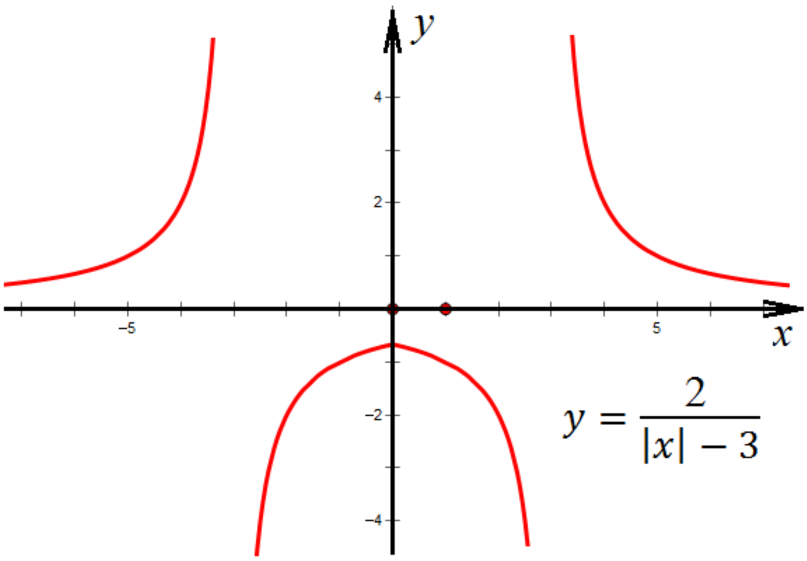


График этой функции, умноженной на два,

$$y = \frac{2}{|x| - 3}$$

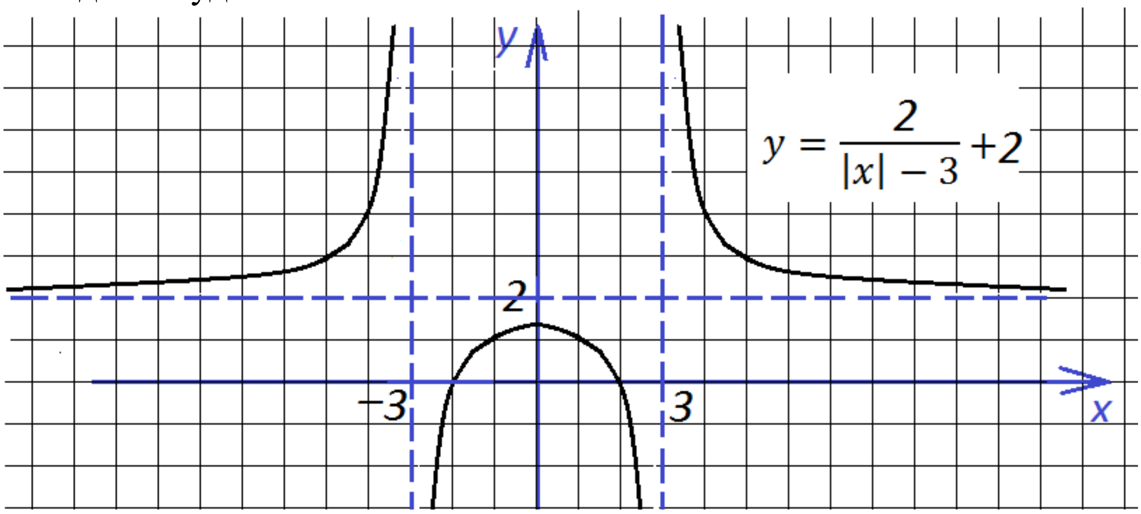
выглядит так:



Теперь можно поднять график по оси y:

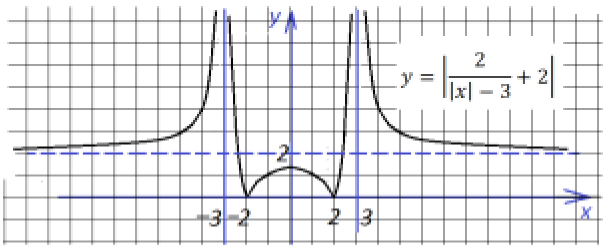
$$y = \frac{2}{|x| - 3} + 2$$

и тогда он будет таким:



Наконец, строим окончательный вид графика, отражая все, что ниже оси абсцисс, вверх:

$$y = \left|\frac{2}{|x| - 3} + 2\right|$$



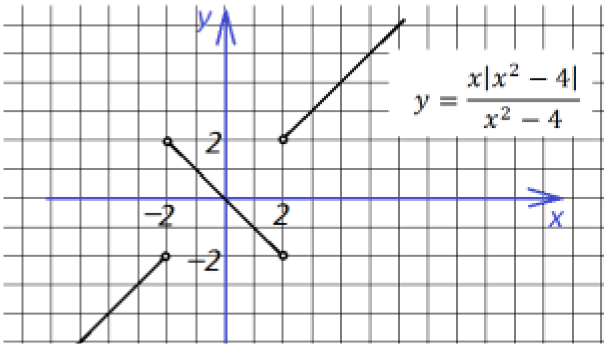
5.Очень интересно выглядит график функции

$$y = \frac{x|x^2 - 4|}{x^2 - 4}$$

В точках 2 и (-2) знак подмодульного выражения меняет знак, поэтому функция состоит из трех кусков (точки 2 и (-2) выколоты). На участках (-∞; -2) и (2; ∞) справедливо первое уравнение, а на участке (-2;2) – второе:

$$y = x$$

$$y = -x$$


y
x
2
−2
2
−2
$y = \frac{x|x^2 - 4|}{x^2 - 4}$