

Краевая научно-практическая конференция  
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Применение теории графов в решении практических задач**

Голыжбина Юлия Юрьевна,  
6А класс, МАОУ СОШ №3, г. Краснокамск,  
Собянина Анастасия Сергеевна,  
учитель математики  
МАОУ СОШ №3, г. Краснокамск.

Пермь. 2016.

## Введение.

Однажды наш факультатив по математике начался с задачи: каким образом можно соединить пять точек плоскости так, чтобы все они были задействованы? Действительно, задача не из сложных, вариантов было множество, но именно с нее и началось мое знакомство с элементами теории графов.

У меня возник вопрос: «Какие еще задачи можно решать, используя графы?» Оказалось, что это одна из универсальных моделей, применяемых в решении. С помощью них можно моделировать сеть дорог, ветки железнодорожных путей. Если вершины – это люди, а ребра – это каналы связи между ними, то можно построить схему, по которой несложно выяснить может ли информация от одного человека быть передана другому? Также, графы используют при составлении карт и блок-схем. Работа с картами мне показалась интересной, потому что это не только занимательно, но и полезно изучать свой край, район, рядом с которым ты живешь.

## Постановка задачи.

Для исследования, мы рассмотрели задачу об обслуживании нескольких районов пожарным депо:

В одном из районов Пермского края строится пожарная часть. Каким образом выбрать место для строительства, чтобы время, за которое пожарные доедут в самую отдаленную точку, было минимальным?

В качестве примера выберем Григорьевское сельское поселение Нытвенского района<sup>1</sup> Пермского края. (рис. 1)



Рис. 1

На территории района расположено 3 городских поселения — Нытвенское (центр г. Нытва), Новоильинское (центр пгт. Новоильинский) и Уральское (центр пгт. Уральский), 5 сельских поселений — Григорьевское (центр с. Григорьевское), Постановоговское (центр с. Постановоги), Шерьинское (центр с. Шерья), Чайковское (центр ст. Чайковская) и Чекменевское (центр д. Нижняя Гаревая), в состав которых входит 118 населённых пунктов.

1. **Нытвенский район** — муниципальный район на западе Пермского края.

## Теоретическая справка.

Для решения данной задачи мы воспользовались элементами теории графов, поэтому необходимо было ознакомиться со следующими понятиями:

*Граф* – это объект, состоящий из множества вершин и множества ребер;

Графы можно разделить по типу:

- *ориентированный граф* – граф, ребрам которого присвоено направление (рис. 2);
- *неориентированный граф* – соответственно, направление ребер не присвоено (рис. 3);

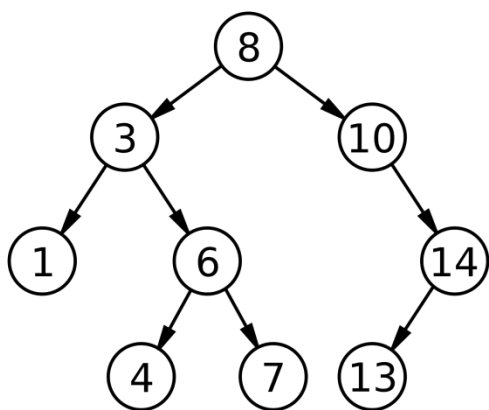


Рис. 2

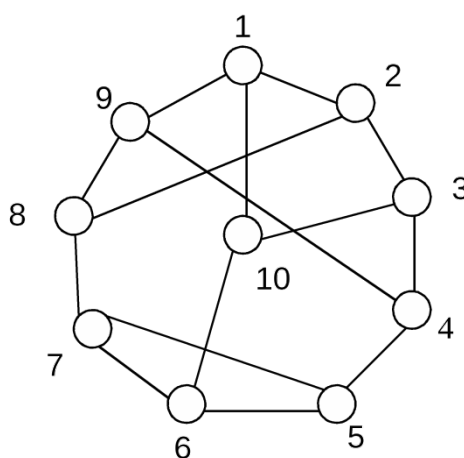


Рис. 3

Графу можно задать веса вершин и веса ребер:

*Вес ребра* – значение, поставленное в соответствие данному ребру;

*Вес вершины* – значение, поставленное в соответствие данной вершине;

*Расстояние между двумя вершинами в графе* – называется число, равное длине кратчайшего пути, соединяющего эти вершины;

*Центр графа* – это любая вершина  $v$ , такая, что расстояние от нее до наиболее отдаленной вершины минимально;

*Матрица* – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы (например, целых чисел), которая представляет собой

совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

*Матрица кратчайших расстояний графа* – это квадратная матрица типа «вершина-вершина», содержащая в качестве элементов кратчайшие расстояния между вершинами.

## Решение.

В случае размещения пожарного депо интересуются расстоянием (или временем), необходимым для проезда в наиболее отдаленный район. Следовательно, задача размещения данного пункта обслуживания состоит в минимизации это расстояния, а значит, для её решения нам необходимо найти центр графа.

### Алгоритм поиска центра

1. Находим матрицу длин кратчайших расстояний:  
 $A(v_{i,j}), i, j = 1,2,3,4,5,6,7$
2. Определяем  $MVB(i)$  для каждой вершины графа;
3. Из всех  $MVB(i)$  выбираем минимальное. Вершина, соответствующая минимальному  $MVB(i)$  будет являться центром графа.

$MVB(i)$  – максимальное расстояние от вершины  $v_i$  до  $v_j$ .

Смоделируем карту (рис. 1) в виде неориентированного графа (рис. 5), причем, в качестве села Мокино используем три вершины, так как данное поселение имеет площадь больше, чем другие населенные пункты (рис. 4).

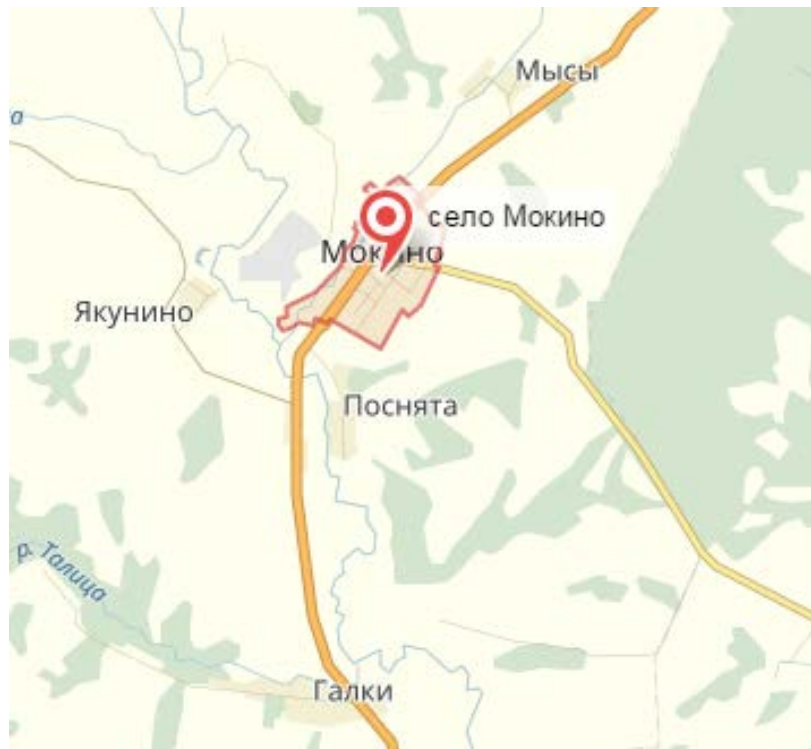


Рис. 4

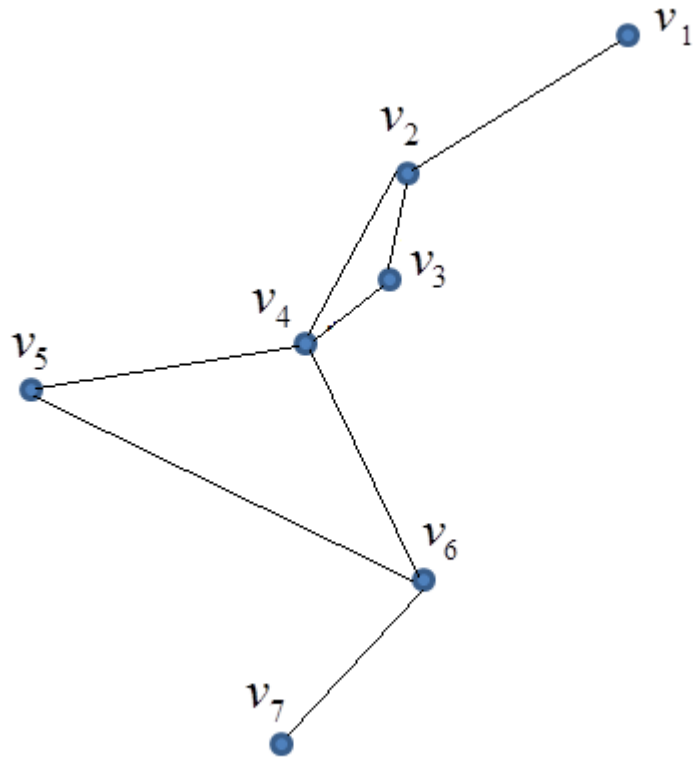


Рис. 5

Пусть вершины графа соответствуют жилым районам:

$v_1$  – Мысы,

$v_2$  – Мокино 1,

$v_3$  – Мокино 2,

$v_4$  – Мокино 3,

$v_5$  – Якунино,

$v_6$  – Поснята,

$v_7$  – Галки,

Будем считать, что веса вершин равны между собой единице, т. е. количество населения в каждом пункте одинаково. Рёбрам графа зададим вес  $d(i, j)$ , который равняется расстоянию (км), от пункта  $v_i$  до  $v_j$ :

$$d(1,2)=3$$

$$d(4,5)=3$$

$$d(2,3)=1$$

$$d(4,6)=1,6$$

$$d(2,4)=1,2$$

$$d(5,6)=3,3$$

$$d(3,4)=0,5$$

$$d(6,7)=3,6$$

После чего, наш граф будет выглядеть следующим образом (рис. 6):

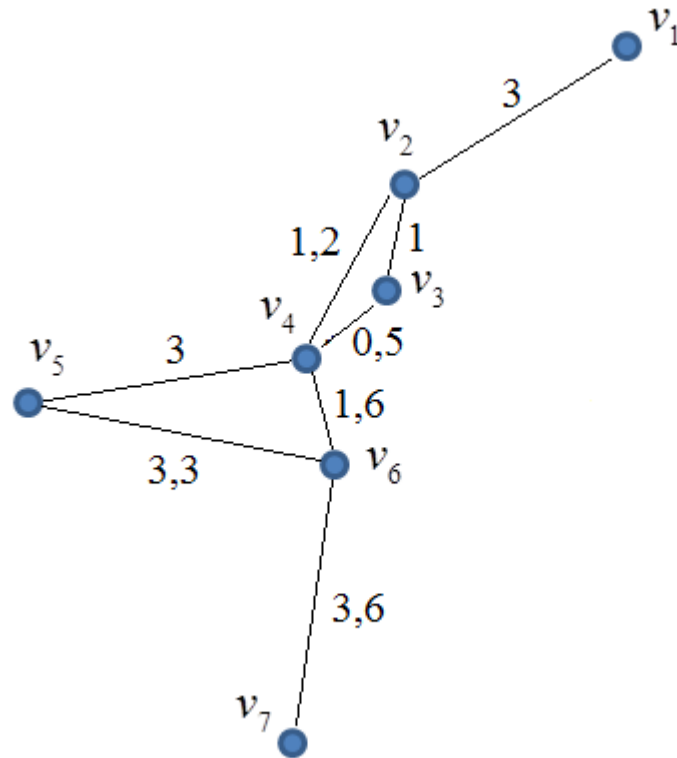


Рис. 6

В соответствии с алгоритмом нахождения центра графа необходимо составить матрицу длин кратчайших расстояний  $A(v_{i;j})$ , значение  $i, j$ -го элемента которой —  $v_{i;j}$  есть кратчайшее расстояние от вершины  $v_i$  до вершины  $v_j$ . Она имеет следующий вид (Табл. 1):

$$i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$A =$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$v_1$	0	3	4	4.2	7.2	5.8	9.4
$v_2$	3	0	1	1.2	4.2	2.8	6.4
$v_3$	4	1	0	0.5	3.5	2.1	5.7
$v_4$	4.2	1.2	0.5	0	3	1.6	5.2
$v_5$	7.2	4.2	3.5	3	0	3.3	6.9
$v_6$	5.8	2.8	2.1	1.6	3.3	0	3.6
$v_7$	9.4	6.4	5.7	5.2	6.9	3.6	0

Табл. 1



Основываясь на полученной нами матрице длин кратчайших путей, найдем  $MVB(i)$  для каждой вершины. Так как наш граф неориентированный, то  $MVB(i)$  достаточно найти для каждой строки; для столбцов значения будут аналогичными.

$$MVB(i) = \max\{v_{i,j}\}.$$

$$MVB(1) = \max\{v(1, j)\} = 9.4$$

$$MVB(2) = \max\{v(2, j)\} = 6.4$$

$$MVB(3) = \max\{v(3, j)\} = 5.7$$

$$MVB(4) = \max\{v(4, j)\} = 5.2$$

$$MVB(5) = \max\{v(5, j)\} = 7.2$$

$$MVB(6) = \max\{v(6, j)\} = 5.8$$

$$MVB(7) = \max\{v(7, j)\} = 9.4$$

Минимальное значение имеет  $MVB(4) = 5.2$ , а это значит, что вершина  $v_4$  является центром графа.

При решении данной задачи мы учитывали только лишь веса рёбер, при этом, считая веса вершин равными между собой единице. А если учитывать то, что в каждом поселении живет различное количество жителей, то поменяется ли тогда наш результат полученный ранее? Это мы и решили проверить.

На основании официального сайта Григорьевского сельского поселения зададим веса вершин, которые будут обозначать количество прописанного населения (Табл. 2)

Вершина	Населенный пункт	Количество жителей
$v_1$	Мысы	22 чел.
$v_2$	Мокино 1	407 чел.
$v_3$	Мокино 2	210 чел.
$v_4$	Мокино 3	179 чел.
$v_5$	Якунино	38 чел.
$v_6$	Поснята	23 чел.
$v_7$	Галки	80 чел.

Табл. 2

Введем обозначения:

Количество населения будем рассматривать как строку:

$k = [22, 203, 410, 183, 38, 23, 80]$ , где каждому элементу присвоим номер от 1 до 7 в соответствии с вершинами графа.

Пользуясь алгоритмом поиска центра, составим матрицу длин кратчайших расстояний  $B(v_{i,j})$ , элементы которой находятся по следующей формуле:

$$v_{i,j}(H) = v_{i,j} \cdot k_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

где  $v_{i,j}(H)$  - элементы новой матрицы, а  $v_{i,j}$  элементы матрицы  $A(v_{i,j})$ .

Матрица  $B$  имеет вид (Табл. 3):

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$v_1$	0	1221	840	751.8	273.6	133.4	752
$v_2$	66	0	210	214.8	159.2	64.4	512
$v_3$	88	407	0	89.5	133	48.3	456
$v_4$	92.4	488.4	105	0	114	36.8	416
$v_5$	158.4	1709.4	735	537	0	75.9	552
$v_6$	127.6	1139.6	441	286.4	125.4	0	288
$v_7$	206.8	2604.8	1197	930.8	262.2	82.8	0

Табл. 3

МВВ(i) для каждой вершины графа:

$$МВВ(1) = \max\{v(1, j)\} = 1221$$

$$МВВ(2) = \max\{v(2, j)\} = 512$$

$$МВВ(3) = \max\{v(3, j)\} = 456$$

$$МВВ(4) = \max\{v(4, j)\} = 488.4$$

$$МВВ(5) = \max\{v(5, j)\} = 1709.4$$

$$МВВ(6) = \max\{v(6, j)\} = 1139.6$$

$$МВВ(7) = \max\{v(7, j)\} = 2604.8, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Таким образом, получаем, что минимальное значение  $МВВ(3) = 456$ , а значит, вершина  $v_3$  является в данном случае центром графа.

## Вывод.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- 1) Если не учитывать количество населения проживающего в том или ином населенном пункте, то центром графа является вершина  $V_4$ , которая соответствовала поселению Мокино 3, а значит именно в ней необходимо построить пожарную станцию, так как расстояние до всех остальных пунктов является минимальным;
- 2) Если же мы учтем тот факт, что количество населения в каждом пункте разное и соответствует определенному числу жителей, то результат размещения пожарной станции измениться, в данном случае рациональнее её расположить в вершине  $V_3$  - Мокино 2.

Я считаю, что поставленная передо мной задача была выполнена. Данный метод исследования можно использовать для различных пунктов обслуживания будь то больница, магазин или сеть кафе.

## Список литературы.

1. Н. Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход /М.: Мир, 1978г.
2. О. И. Мельников. Незнайка в стране графов /М.: КомКнига, 2007г.
3. Л. Ю. Березина. Графы и их применение. Популярная книга для школьников и преподавателей /М.: Либроком, 2009 г.
4. <http://nytva.permarea.ru/grigorevskoe-sp/O-poselenii/Naselenije/>
5. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Нытвенский\\_район](https://ru.wikipedia.org/wiki/Нытвенский_район)