Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Сферическая геометрия

Кашина Светлана Андреевна,
10 класс, МАОУ «Лицей №3» г. Перми,
Глухова Марина Ивановна,
учитель математики МАОУ «Лицей №3», к.п.н.

Пермь.2016.

Содержание

Введение

Первой по времени геометрией, отличной от евклидовой, была сферическая геометрия. Учёные того времени считали, что планеты, Солнце, Луна и звёзды движутся по воображаемому «небесному шару», в связи с чем, для изучения их движения потребовались знания геометрии сферы. Эти знания были необходимы также путешественникам и мореплавателям, которые ориентировались по звёздам. Кроме того, сведения о сфере были необходимы и при решении сугубо земных задач — вычислении географических координат, составлении географических карт, нахождении курса корабля. Участки земной поверхности небольших размеров (по сравнению с радиусом Земли, равным 6370 км) можно считать практически плоскими, и для их математического изучения вполне пригодна планиметрия. Земные же участки больших размеров – протяженностью в сотни и тысячи километров, уже нельзя считать плоскими, поэтому для математического изучения таких участков нужна геометрия сферы. В настоящее время, существуют различные науки, в основе которых лежит сферическая геометрия.

Например, астрономия – наука о Вселенной, изучающая расположение, движение, строение, происхождение и развитие небесных тел и образованных ими систем; геодезия – наука о Земле, гравитационном поле, параметрах вращения Земли и их изменениях во времени; математическая картография, которая изучает способы отображения поверхности Земли на плоскости; навигация – процесс управления некоторым объектом в определённом пространстве передвижения.

Проблема исследования состоит в следующем: можно ли перенести свойства фигур евклидовой геометрии на фигуры сферической геометрии и наоборот; в чем сходства и различия этих свойств?

Цель исследования: установить сходства и различия свойств фигур сферической и евклидовой геометрий.

Объект исследования: сфера.

Предмет исследования: элементы сферы

Гипотеза исследования: фигуры, лежащие в евклидовой плоскости и на сфере не могут считаться равными, поскольку во втором случае плоскость имеет кривизну; в связи, с чем и свойства этих фигур имеют различия.

В соответствии с целью, предметом и гипотезой были поставлены следующие **задачи исследования**:

- Изучить основные понятия, определения и теоремы сферической геометрии
- Сравнить фигуры на плоскости и фигуры на сфере, их свойства, а так же теоремы сферической и евклидовой геометрий для треугольников.
- Рассмотреть решение задач сферической геометрии.

Для решения поставленных задач были использованы **методы исследования**:

- поисковый (поиск информации, изучение теоретических вопросов сферической геометрии и подбор практических задач по данной теме в специальной литературе);
- экспериментальный (доказательство теорем, работа с литературой и с интернет-источниками);
- аналитический (анализ изученного материала, сравнение евклидовой и сферической геометрий);
- практический (решение задач).

Из истории сферической геометрии

Первой по времени геометрией, отличной от евклидовой, была сферическая геометрия, или сферика, как её называли в древности. Сферика возникла позже, чем евклидова геометрия плоскости и пространства. Основными стимулами для возникновения геометрии плоскости и пространства были необходимость измерения площадей полей и других плоских фигур и вместимости сосудов и амбаров различной формы, т.е. объёмов различных тел. Основным стимулом для возникновения сферики было изучение звёздного неба.

Наблюдение небесных светил производилось ещё в Древнем Египте и Вавилоне, прежде всего с целью установления календаря. Мы обязаны египтянам разделением суток на 24 часа. Вклад вавилонян в развитии астрономии был более значителен: наблюдения затмений и звёзд первых веков «эры Набонасара», начавшейся в VIII в. до н. э. Древние греки познакомились с вавилонской астрономией по крайней мере в IV в. до н. э., когда первоначальные названия планет были заменены названиями планет по вавилонскому образцу, латинскими переводами которых являются общепринятые нами названия. Астрономия, изложенная в «Альмагесте» Птолемея, была результатом продолжавшегося несколько веков развития науки, впитавшей традиции как вавилонских астрономов, так и греческих геометров.

<u>Сферика Автолика.</u>

Первым античным математическим сочинением, сохранившимся до наших дней, является книга «О движущейся сфере» Автолика, жившего в конце IV в. до н. э. Предметом исследования этой книги является небесная сфера, рассматриваемая, однако, в весьма абстрактном виде. Книга Автолика состоит из 12 предложений. Определения относятся к равномерному движению. В предложении 1 доказывается, что если сфера равномерно движется вокруг оси, то все её точки, не лежащие на оси, описывают параллельные круги, имеющие те же полюсы, что и сфера, а плоскости этих кругов перпендикулярны оси сферы. Под кругами здесь понимаются плоские фигуры, ограниченные окружностями, а под выражением «точка описывает круг» понимается то, что точка пробегает окружность круга.

Доказательства большинства предложений этого трактата основаны на применении движения: предполагается, что утверждение предложения неверно, производится поворот сферы и обнаруживается, что предложение противоречит тому, что получилось в результате поворота сферы.

<u>Сферика Феодосия</u>.

Первое дошедшее до нас систематическое изложение сферической геометрии содержится в «Сферике» Феодосия, жившего во II-I вв. до н. э. «Сферика» Феодосия состоит из трёх книг, в первой из которых шесть определений и 23 предложения, во второй – одно определение и 23 предложения, в третьей – 14 предложений.

Определение Феодосия: «Сфера есть телесная фигура, содержащая внутри одной поверхности, такая, что все прямые, падающие на неё из одной точки внутри фигуры, равны между собой».

Большинство предложений «Сферики» Феодосия – стереометрические теоремы и задачи на построение. Когда Феодосий говорит о пересечении кругов на сфере под некоторым углом или о параллельности этих кругов, он имеет в виду пересечение под данным углом или параллельность их плоскостей; когда он говорит о рассечении кругами на сфере друг друга пополам, он имеет в виду рассечение пополам плоских фигур.

Наряду со стереометрическими предложениями, сформулированные в терминах геометрии на поверхности сферы. Например, предложения 20-21 из I книги – задача о построении большого круга на сфере, проходящего через две точки ее поверхности, и задача о построении полюса данного круга на сфере.

Сферика Менелая.

Значительно более развитую сферическую геометрию можно найти в трактате «О сфере» Менелая, жившего в конце I в. н. э. Сочинение Менелая состоит из трёх книг, содержащих соответственно 39, 21 и 25 предложений. Во введении к книге I Менелай даёт определение сферического треугольника («трёхсторонней фигуры»), т.е. части поверхности, ограниченной тремя дугами больших кругов, меньшими полукругами, и углов сферического треугольника. Если большинство предложений «Сферики» Феодосия были стереометрическими, сочинение Менелая посвящено геометрии на поверхности сферы, трактуемой по аналогии с планиметрией Евклида. Например, предложение 1 книги I – задача о проведении дуги большого круга под данным углом к данной дуге большого круга; предложения 2 и 3 книги I – теорема о равенстве углов при основании равнобедренного сферического треугольника и обратная ей. Из предложений не совпадающих с предложениями планиметрии, отметим предложения 10 и 11, из которых вытекает, что сумма углов сферического треугольника больше двух прямых углов.

«Предложение десятое. Если две стороны трёхсторонней фигуры вместе меньше полукруга, то внешний угол, примыкающий к одной из этих сторон, больше того противолежащего ему внутреннего угла, который является одним из двух углов, прилежащих к оставшейся стороне; если две стороны вместе больше полукруга, то внешний угол меньше противолежащего ему внутреннего угла; а если две стороны вместе равны полукругу, то внешний угол равен противоположному ему внутреннему».

Основные теоремы сферической тригонометрии были открыты учеными средневекового Востока. Например, соотношения, выражаемые теоремой косинусов, были установлены сирийским математиком и астрономом IX века ал-Баттани [5].

Основные понятия сферической геометрии

Сфера, большая и малая окружности.

Если основными понятиями геометрии Евклида являются точка, прямая и движение плоскости, то в сферической геометрии таковыми являются точка сферы, большая окружность и движение сферы.

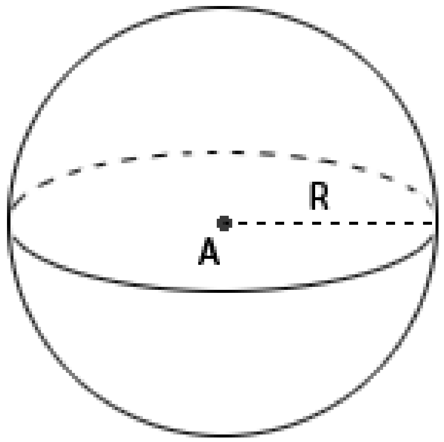

Рис. 1

Сферой называется геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от некоторой заданной точки(А), называемой центром сферы (рис.1).

Отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо его точкой, называется *радиусом сферы*(R). Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий, через её центр, называется диаметром. Из определения следует, что все радиусы равны и что диаметр равен удвоенному радиусу. Плоскость, проходящая через центр сферы, называется *диаметральной плоскостью*.

Пусть S-некоторая сфера с центром O радиуса R. Возьмём плоскость α, удалённую от точки O на расстояние, меньшее R. Тогда пересечения плоскости α и сферы S есть окружность. Радиус r этой окружности является катетом прямоугольного треугольника (рис.2), гипотенуза которого – радиус R, а второй катет – перпендикуляр h, опущенный из центра сферы на плоскость. Поэтому в силу теоремы Пифагора $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

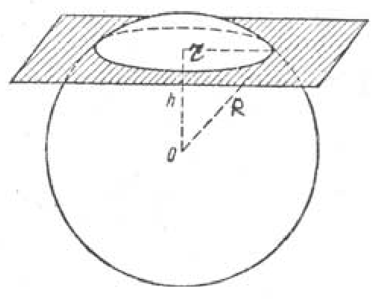

Рис. 2

Эта формула показывает, что величина r принимает максимальное значение r=R при h=0, то есть является диаметральной плоскостью. В этом случае окружность на сфере и называется большой окружностью. В геометрии на сфере большие окружности играют роль прямых на плоскости. При h>0 мы имеем r<R, окружность на сфере называется в этом случае малой окружностью. В отличие от прямой на плоскости, сферическая прямая замкнута, что следует из определения, и длину прямой легко можно найти из формулы длины окружности. Прямые на сфере обозначаются малыми буквами латинского алфавита, а точки сферы – заглавными латинскими буквами [1].

Диаметрально противоположные точки

Определение: две точки сферы, являющиеся концами одного диаметра, называются *диаметрально противоположными*.

Справедливы следующие теоремы.

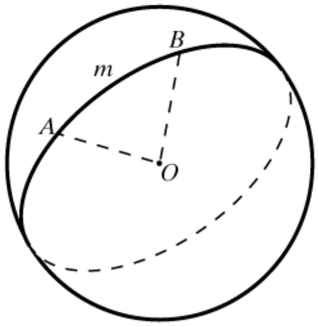

Рис. 3

Теорема 1: через две точки сферы, не являющиеся диаметрально противоположными, проходит единственная сферическая прямая (рис.3).

Действительно, две не диаметрально противоположные точки сферы A и B определяют вместе с её центром O единственную плоскость, которая пересечёт сферу по искомой сферической прямой m.

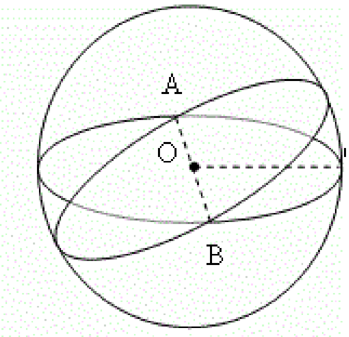

Рис. 4

Теорема 2: через две диаметрально противоположные точки проходит бесконечное множество сферических прямых.

К примеру, на рис. 2 через две диаметрально противоположные точки A и B проведены две сферические прямые, возможно провести и более.
Также из рис.4 можно заметить, что две прямые пересекаются в двух точках, в отличие от плоскости, где прямые пересекаются в одной.

Теорема 3: если точка лежит на сферической прямой, то диаметрально противоположная ей точка лежит на этой же прямой (рис.4).

Следствие: через две пары диаметрально противоположных точек проходит сферическая прямая и только одна.

Теорема 4: всякие две сферические прямые пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы.

Действительно, плоскости обеих сферических прямых имеют общую точку – центр сферы, поэтому пересекаются по прямой. Точки пересечения этой прямой со сферой и будут точками пересечения сферических прямых. Тем самым имеем отличие сферической геометрии от плоской, в которой через любые две точки проходит единственная прямая и две прямые пересекаются не более чем в одной точке.

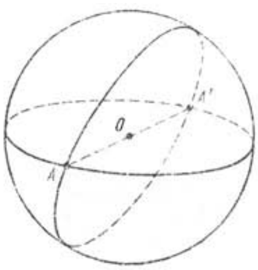

Рис. 5

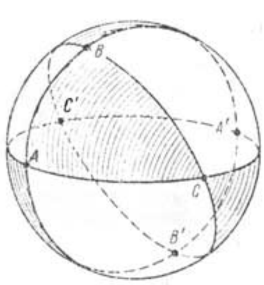

Рис.6

Плоскость делит пространство на две области, аналогично большая окружность делит сферу на две области (рис.3); эти области называются *полусферами*, а сама окружность – краем этих полусфер. Две пересекающееся плоскости делят пространство на четыре области, аналогично две большие окружности делят сферу на четыре области (рис.5). Наконец, три плоскости, пересекающиеся в одной точке, делят пространство на восемь областей, и три большие окружности, не пересекающиеся в одной точке, делят сферу на восемь областей (на рис.6).

Если первые два из этих свойств аналогичны свойствам прямых на плоскости, которая делится на две области прямой и на четыре области двумя пересекающимися прямыми, то третье из указанных свойств не вполне аналогично соответствующему свойству прямых на плоскости, так как три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие все три через одну точку, делят плоскость не на восемь, а на семь частей (рис.7).

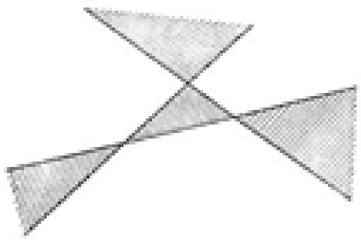

Рис. 7

Сферический отрезок

Если две точки сферы A и B не являются диаметрально противоположными, то существует единственная плоскость, проходящая через центр сферы и эти две точки. Линия пересечения этой плоскости со сферой есть большая окружность, а меньшую из двух дуг этой окружности, соединяющий точки A и B, является единственным сферическим отрезком, соединяющим точки A и B.

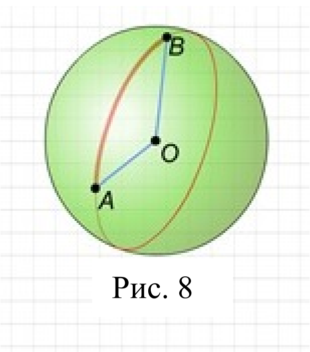

Рис. 8

Если точки A и B диаметрально противоположны на сфере, существует бесконечное число больших окружностей, проходящих через эти две точки, причем эти две точки делят каждую такую большую окружность на две полуокружности, которые являются сферическими отрезками, соединяющими точки A и B (рис.8).

Полюс и поляра

Всякой большой окружности соответствует две диаметрально противоположные точки сферы, высекаемые из нее диаметром, перпендикулярным к плоскости большой окружности. Эти две точки называются *полюсами* большой окружности; в частности, полюсами экватора Земли являются ее географические полюсы – Северный и Южный. Очевидно, что каждым двум диаметрально противоположным точкам на сфере соответствует единственная большая окружность, для которой эти точки являются полюсами; эта большая окружность называется *полярой* пары диаметрально противоположных точек. Каждая точка поляры называется *полярно сопряженной*

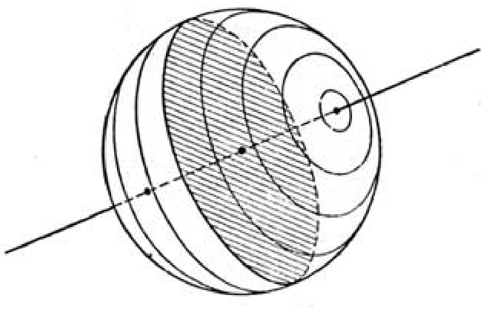

Рис. 9

с каждым из ее полюсов (рис.9). Понятно что все точки поляры удалены от своего полюса на расстояние, равное $\frac{\pi}{2}R$.

Углы между сферическими прямыми

Определение 1: углом на сфере называется совокупность некоторой точки и двух полупрямых, имеющих эту точку своим общим концом, эта точка называется вершиной угла, полупрямые – его сторонами.

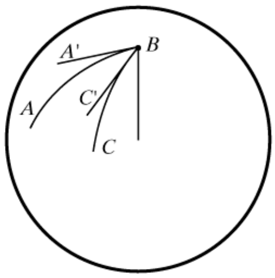

Рис. 10

Величина сферического угла равна величине двугранного угла, определяемого его сторонами. Например, величина внутреннего угла при вершине B сферического многоугольника, образованного дугами AB и BC на сфере, определяется как угол между двумя лучами $BA^{/}$ и $BC^{/}$, которые выходят из точки B и касаются дуг AB и BC в точке B (рис.10)

Определение 2: два угла, стороны одного из которых являются продолжением сторон другого угла, называются так же, как и в плоской геометрии, вертикальными (рис. 11). Очевидно, что они равны.

Определение 3: угол, стороны которого являются различными полупрямыми одной той же сферической прямой, называется развёрнутым.

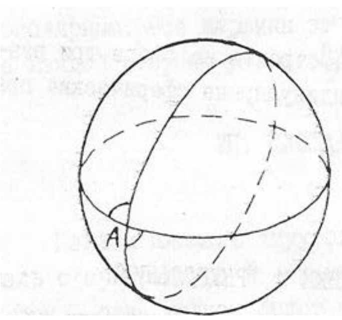

Рис.11

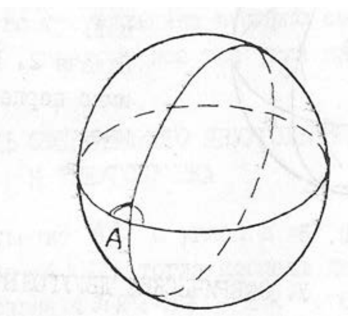

Рис.12

Определение 4: два угла, которые имеют общую сторону и составляют в сумме развёрнутый угол, называются смежными (рис. 12).

Определение 5: сферические прямые, при пересечении которых образуются прямые углы, называются перпендикулярными.

Теорема 1: всякая прямая, проходящая через полюсы данной прямой, перпендикулярна ей.

Действительно, всякая плоскость, проходящая через полюсы данной прямой, будет перпендикулярна этой прямой, т. к. её полюса перпендикулярны плоскости, определяемой прямой.

Теорема 2: две различные сферические прямые имеют единственную сферическую прямую, перпендикулярную им обоим.

Действительно, две прямые пересекают в диаметрально противоположных точках, которые имеют единственную поляру, она будет перпендикулярна данным прямым.

Для сравнения следует заметить, что все сферические прямые, перпендикулярные данной прямой, пересекаются в её полюсах, тогда как в евклидовой плоскости такие прямые параллельны.

Сферические двуугольники

Всякая прямая разбивает сферу на две области-полусферы. Если провести две сферические прямые, то они разбивают сферу на четыре области, каждая из областей называется простым двуугольником. Точки пересечения сферических прямых называются вершинами двуугольника, границы двуугольника – его стороны. На рис.13 изображены четыре двуугольника.

Двуугольник также можно построить, выбрав пару диаметрально противоположных точек и соединив их двумя полупрямыми.

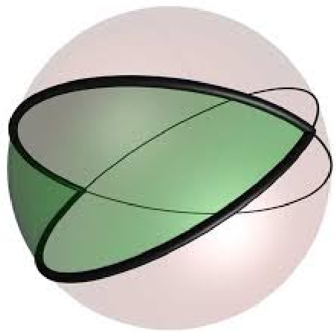

Рис. 13

Аналогом двуугольника на плоскости является угол. У любого двуугольника сторона равна длине полуокружности, т.е. πR.

Углы при вершинах равны, и каждый из них имеет величину α такую, что $0<\alpha<\pi$.

Сферические треугольники

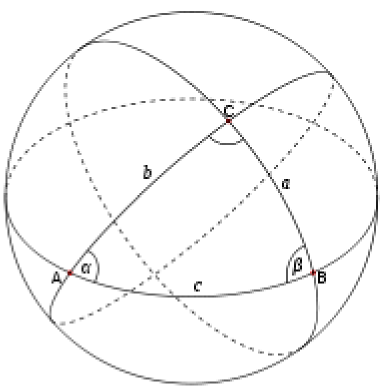

Рис. 14

Среди всех сферических многоугольников наибольший интерес представляет сферический треугольник. Он получается при пересечении трёх больших окружностей, причём таких треугольников на сфере образуется восемь. Зная элементы (стороны и углы) одного из них можно определить элементы всех остальных. Поэтому рассматривают соотношение между элементами одного из них, того, у которого все стороны меньше половины большой окружности (рис.14).

Сторонами сферического треугольника являются отрезки сферических прямых (a, b, c), вершинами – их концы (A, B, C), углами – углы, образуемые сторонами сферического треугольника в его вершинах(α, β, γ).

Многие свойства сферического треугольника почти полностью повторяют свойства обычного треугольника, среди них – неравенство треугольника три признака равенства треугольника. Однако, существуют и другие признаки равенства сферических треугольников, такие как:

1) Если все три угла одного треугольника равны соответственным углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Если две стороны одного треугольника равным двум соответственным сторонам другого треугольника, равны углы, лежащие против одной пары равных сторон, а углы, лежащие против другой пары равных сторон, одновременно острые или тупые, то такие треугольники равны.
3) Если два угла одного треугольника равны двум соответственным углам другого треугольника, равны стороны, лежащие против одной пары равных углов, а стороны, лежащие против другой пары равных углов, одновременно меньше или больше, то такие треугольники равны. [1].

Множество точек, равноудаленных от концов отрезка, будет и на сфере перпендикулярной к нему прямой, проходящий через его середину, откуда следует, что серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника имеют общую точку, точнее, две диаметрально противоположные общие точки являющиеся полюсами его единственной описанной окружности.

Легко перенести на сферу и теорему о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре его вписанной окружности. Теоремы о пересечение высот и медиан также остаются верными.

Сумма углов всякого сферического треугольника всегда больше 180^o, т. е каждый угол треугольника может быть больше или равен 90^o. Разность углов – величина положительная и называется сферическим избытком данного сферического треугольника.

Равнобедренные сферические треугольники

Определение: сферический треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

Всякий сферический треугольник, наложимый на треугольник, ему симметричный, – равнобедренный.

Действительно, мы знаем, что в силу того, что оба треугольника имеют противоположное расположение, невозможно наложить один треугольник на другой так, чтобы совпадали соответственные вершины, т.е. вершины, находящиеся первоначально на концах одного диаметра. Если бы среди сторон треугольника не было равных между собой, то такое наложение было бы невозможно никаким другим образом.

Обратно, всякий равнобедренный сферический треугольник наложим на треугольник, ему симметричный.

Если треугольник A'B'C' симметричен треугольнику ABC и, если AB равно AC, то два треугольника ABC и A'C'B', имеющие (при выбранном порядке вершин каждого из них) одно и тоже расположение, равны по второму признаку равенства.

Теорема: в равнобедренном сферическом треугольнике углы, противолежащие равным сторонам, равны.

Действительно, при совмещении треугольника ABC (AB=AC) с симметричным ему треугольником A'C'B' угол, совпадающий с углом B', есть угол C'; таким образом, оба эти угла равны, и тоже самое имеет место и для углов C и B'.

Обратно, всякий сферический треугольник, два угла которого равны, равнобедренный.

Действительно, если ABC сферический треугольник, в котором угол B равен углу C и треугольник A'B'C' – треугольник, ему симметричный, то треугольники ABC и A'C'B', имеющие одинаковое расположение равны по первому признаку равенства, и, следовательно, AB=A'C'=AC.

Полярные треугольники

<u>Определение</u>: сферический треугольник A'C'B' называется полярным по отношению к треугольнику ABC, если его вершины A', C', B' являются полюсами соответствующих сторон BC, AC, AB, лежащими от этих сторон по ту же строну, что и соответственно вершины A, B, C.

Также справедлива теорема: если сферический треугольник A'C'B' является полярным по отношению к треугольнику ABC, то и треугольник ABC полярен по отношению к треугольнику A'C'B'.

Сферический треугольник, полярный самому себе, называется автополярным. Все вершины этого треугольника полярно сопряжены, длина каждой стороны равна $\pi R/2$, поэтому все три угла прямые.

Площадь сферического двуугольника и треугольника

Найдём площадь двуугольника AB с углом в α радиан (рис.15). Площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$, тогда площадь двуугольника с углом в один радиан будет равна $4\pi R^2:2\pi=2R$. Отсюда искомая площадь равна $2R^2\alpha$.

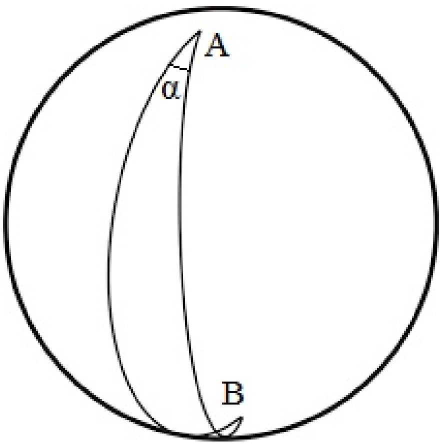

Рис.15

Если нам дан сферический треугольник ABC, то пара больших окружностей, проходящих через две его стороны, определяет два двуугольника, углы которых равны углу сферического треугольника между этими сторонами (рис. 14). Всего таким образом получается шесть двуугольников, два с углом A, два – с углом B и два – с углом C. Треугольник ABC и диаметрально противоположный ему треугольник A'B'C' (равный треугольнику ABC), входят в три двуугольника, остальные точки сферы (не лежащие на сторонах двуугольников) входят только в один двуугольник. Поэтому сумма площадей шести двуугольников равна сумме площади S всей сферы и учетверённой $S_{\Delta ABC}$, т.е. $2S_a+2S_b+2S_c=S+4S_\Delta$. Так как $S_A=2r^2A$, $S_B=2r^2B$, $S_C=2r^2C$, то мы получаем $4r^2\,(A+B+C) = 4\pi r^2+4S_\Delta$, т.е. $S_\Delta=r^2\,(A+B+C-\pi)$.

Так как величины S_Δ и r^2 положительны, то величина A+B+C-π также положительна, откуда следует, что A+B+C>π, т.е. сумма углов сферического треугольника больше развёрнутого угла. Величина A+B+C-π называется угловым избытком сферического треугольника.

Таким образом, площадь сферического треугольника равна произведению его углового избытка на квадрат радиуса сферы.

Заменяя в последнем неравенстве углы A, B и C равными им выражениями $\pi-\frac{a'}{r}, \pi-\frac{b'}{r}, \pi-\frac{c'}{r}$ где, a', b', c' – стороны полярного треугольника, мы получим неравенство a'+ b'+ c'< 2πr, показывающее, что сумма сторон сферического треугольника меньше длины большой окружности.

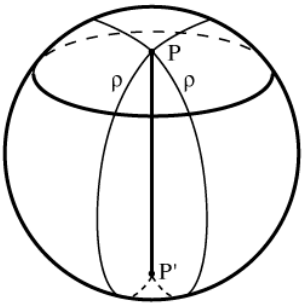

Рис. 16

Сферические окружности

<u>Определение:</u> сферической окружностью с центром P и радиусом ρ называется множество точек сферы, удалённых от P на расстояние ρ (рис. 16).

Также сферическую окружность можно определить как множество точек, равноудалённых от данной сферической прямой.

Сферическая теорема косинусов

Шесть основных признаков равенства сферических треугольников определяет шесть способов их задания. Например, если даны две стороны и угол между ними, то на сфере с точностью до расположения существует только единственный треугольник с такими данными. Это значит, что задание двух сторон и заключенного между ними угла вполне определяет остальные стороны, углы, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей, углы между медианами и сторонами и т.д. Все это наводит на мысль, что должны существовать формулы, выражающие все эти величины через длины двух сторон и угол между ними.

К одной из таких задач можно отнести следующую: в треугольнике даны две стороны и угол между ними; найдите третью сторону. Решение задачи приводит к *сферической теореме косинусов*:

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{a}{R}\cdot\sin\frac{b}{R}\cdot\cos\angle C \quad (1) \quad \text{(рис.17)}.$$

Если радиус сферы R равен 1, то равенство выглядит следующим образом:

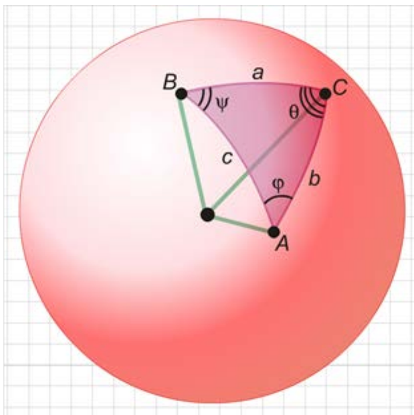

Рис.17

$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \angle C$. [1].

Уже у индийца Варахамихиры (V–VI вв.), у арабских математиков и астрономов начиная с IX в. (Сабит ибн Корра, ал-Баттани), а у западных математиков начиная с Региомонтана (XV в.) в различных формулировках встречается замечательная теорема о сферических треугольниках. Вот как она может быть сформулирована в современных обозначениях [5]:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Теорема косинусов для сферического треугольника математиками средневекового Востока в общем виде сформулирована не была, хотя при решении конкретных астрономических задач они иногда пользовались соотношениями, равносильными этой теореме. Эти соотношения, используемые при определении высоты Солнца, встречаются в сочинениях Сабита ибн Корры, ал-Махани, ал-Баттани, Ибн Юниса, ал-Бируни.

Впервые теорему косинусов в явном виде сформулировал в XV веке Региомонтан, назвав её «теоремой Альбатегния». [4].

Сферическая теорема Пифагора.

Если угол С прямой, то получим формулу $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

При радиусе сферы, стремящемся к бесконечности, сферическая теорема Пифагора переходит в теорему Пифагора планиметрии. Поэтому, поскольку радиус Земли велик, при небольших расстояниях прямоугольные треугольники на поверхности Земли (например, используемые для измерения расстояний и углов на местности) практически подчиняются теореме Пифагора планиметрии, тогда как для больших расстояний, сравнимых с радиусом Земли, уже необходимо применять сферическую теорему Пифагора. [6].

С применением сферической теоремы Пифагора можно получить формулы для разности долгот и расстояния между точками земной поверхности, а, следовательно, и соответствующие формулы для расстояний и координат точек на небесной сфере.

Из сферической теоремы Пифагора следует, что в прямоугольном сферическом треугольнике количество сторон, меньших 90 градусов, нечётно, а больших — чётно. Поэтому если оба катета прямоугольного сферического треугольника больше 90 градусов, то его гипотенуза меньше 90 градусов, то есть в этом случае гипотенуза короче каждого из двух катетов — положение, невозможное для прямоугольного треугольника на плоскости.

Теорема синусов

$$\frac{\sin^2 \frac{a}{R}}{\sin^2 \angle A} = \frac{\sin^2 \frac{b}{R}}{\sin^2 \angle B} = \frac{\sin^2 \frac{c}{R}}{\sin^2 \angle C}$$

При $R = 1$ теорема синусов формулируется следующим образом: в сферическом треугольнике синусы сторон пропорциональны синусам противолежащих углов: $\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}$.

Решение треугольников

Прежде чем приступить к решению сферического треугольника, нужно проверить, удовлетворяют ли элементы, задающие треугольник, условиям существования треугольника. Основные условия существования треугольника можно сформулировать следующим образом:

1. $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$;
2. $0<a+b+c<2\pi R$;
3. $\pi<A+B+C<3\pi$;
4. $A+B-C<\pi$, $B+C-A<\pi$, $C+A-B<\pi$
5. $A+B>\pi$, $a+b> \pi R$;
   $A+B< \pi$, $a+b<\pi R$;
   $A+B= \pi$, $a+b= \pi R$;
6. $a>b$, $A>B$; $a=b$, $A=B$;
7. В прямоугольном сферическом треугольнике число сторон, больших $\pi R/2$, всегда чётное.
8. Если a – катет прямоугольного сферического треугольника, то $a<\pi R/2$, $A<\pi/2$; $a=\pi R/2$, $A=\pi/2$. [1].

При решении треугольника, вычисляя искомые величины, нужно постоянно проверять, удовлетворяют ли они вместе с данными условиям 1-8. Те результаты, которые не удовлетворяют этим условиям, нужно отбрасывать. Может оказаться, что при данных в условии задачи значениях элементов сферический треугольник не существует.

Решение задач

Задачи и понятия навигации тесно связаны со сферической геометрией. Навигация – одна из наиболее древнейших наук. Простейшие задачи навигации – это определение кратчайшего маршрута и выбор направления движения, встали перед самыми первыми мореплавателями. В настоящее время эти задачи приходится решать и летчикам, и космонавтам.

Рассмотрим несколько из них.

Задача №1. Мореплаватель Кристофор Веспуччи проплыл 1800 миль в одном направлении из точки A к точке B (рис.18), повернул на 60 градусов и проплыл в новом направлении еще 2700 миль, оказался в точке C. Требуется найти расстояние между точками A и C (по поверхности земного шара). [6].

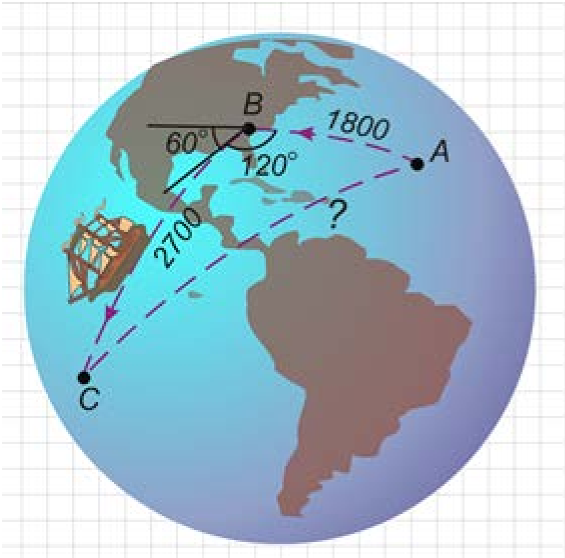

Рис.18

Решение:

Обозначим через a, b и c длины дуг BC, AC и AB соответственно,ψ — внутренний угол при вершине B сферического треугольника ABC. Тогда

$$\frac{c}{R} = 1800 \div \frac{10800}{\pi} = \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{a}{R} = 2700 \div \frac{10800}{\pi} = \frac{\pi}{4}$$, где R — радиус земного шара, выраженный в морских милях.

По теореме косинусов для сферического треугольника

$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{c}{R}\cdot\cos\frac{a}{R} + \sin\frac{c}{R}\cdot\sin\frac{a}{R}\cdot\cos\psi = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \cong 0.4356$$

По таблицам или с помощью калькулятора находим, что

$$\frac{b}{R} = \arccos(0.4356) \cong 0.90662$$ радиан.

Следовательно, длина дуги AC = b равна b = R*0.90662 = 3437.4*0.90662 ≅ 3116.7 миль.

Ответ: 3117 морских миль ≈ 5772 км.

Задача №2. На сфере радиуса 1 решить треугольник, в котором $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{6}$, $\angle A = \frac{5\pi}{6}$. [1].

<u>Решение:</u>

По теореме синусов $\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B}$. Откуда $\sin \angle B = \frac{\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Так как $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$, то $0 < \angle B_{1`} < \frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6} < \angle B_{2`} < \pi$. Так как $a + b = \frac{5\pi}{12} < \pi$, то $a + b < \pi$, т.е. $\angle B_{2`}$ не подходит.

Итак, $0 < \angle B_{1`} < \frac{\pi}{6}$ и $\sin \angle B = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

По теореме косинусов имеем:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \angle A, \\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \angle B; \end{cases}$$

$$\cos \angle B = \sqrt{1 - \sin^2 \angle B} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos c - \frac{1}{2} \cdot \sin c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos c + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin c \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{6} = \cos c - \frac{1}{2} \cdot \sin c\cdot, \\ \sqrt{6} = \cos c + \sin c \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое, получим $0 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\sin c,$

$\sin c = 0,\quad c_1 = 0,\quad c_2 = \pi.$ Первое значение не подходит. Следовательно, $c = \pi.$ Далее по теореме синусов $\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}$ находим: $\frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \frac{0}{\sin \angle C}$, $\sin \angle C = 0,$ т.е. $\angle C_1 = 0$ или $\angle C_2 = \pi.$ Так как угол треугольника не может быть равен 0, то $\angle C = \pi$. Но тогда получаем, что $\angle A + \angle C - \angle B > \pi$, что противоречит условию $\angle A + \angle C - \angle B < \pi$.

Итак, треугольник, у которого $a = \dfrac{\pi}{4}$, $b = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle A = \dfrac{5\pi}{6}$ не существует.

Задача №3. Изобразить на карте кратчайший воздушный пути между Махачкалой(42°с. ш., 47° в. д.) и Владивостоком(43° с. ш., 131 в. д.). [6].

Решение:

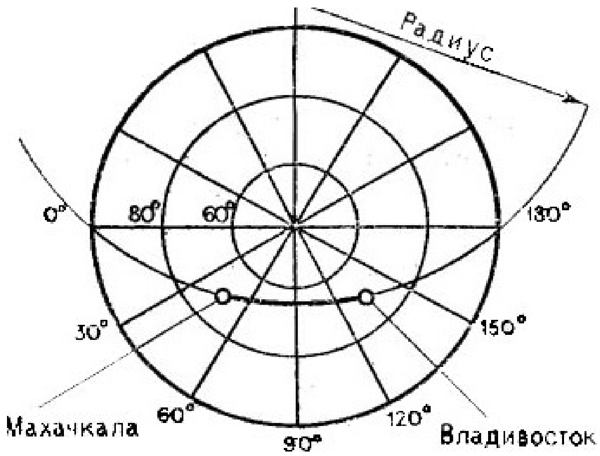

Рис. 19

На сфере кратчайшими линиями, соединяющими две точки, являются дуги больших окружностей, причём кратчайшая – это меньшая из двух дуг большой окружности. В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели, отличной от экватора между теми же точками на земной поверхности. Поэтому при дальних полётах и дальних плаваниях, если возможно, летят или плывут не по постоянной широте, а в северном полушарии забирают на север – по дуге большой окружности.

Для решения задачи возьмем циркуль и, передвигая его иглу вдоль линии меридиана, расположенного посередине между пунктами, подберем такой радиус, чтобы дуга окружности проходила через оба пункта и опиралась на диаметр полушария (рис.19). Кратчайший путь в нашем примере проходит по дуге, показанной на рисунке утолщенной линией. Данный прием нанесения кратчайшего маршрута на карту полушария можно применить и для пунктов, имеющих различную долготу и различную широту. Однако в последнем случае подобрать радиус и найти центр окружности, дуга которой проходила бы через оба пункта и концы диаметра, не так-то легко.

Оригинальный способ решения задачи на нахождения расстояния между городами предложил русский математик П. Л. Чебышев. Прежде всего, находят географические координаты пунктов, между которыми определяют расстояние. Затем вычисляют разности координат, не учитывая знаков, и разность широт умножают на 120, а разность долгот - на 60. Большее из полученных двух чисел умножают на 7, а меньшее - на 3. Складывают оба числа, сумму делят на 7,5, и в результате получают расстояние между пунктами в километрах.[6].

В качестве примера определим расстояние между Москвой и Ленинградом по их координатам. Москва: 55,7° с. ш., 37,5° в. д.; Ленинград: 59,9° с. ш., 30,3° в. д.

55,7° - 59,9° = 4,2*120 = 504*7 = 3528;

37,5° - 30,3° = 7,2*60 = 432*3 = 1296;

(3528 + 1296):7,5 = 643.

Сумма полученных чисел равна 4824. При делении этого числа на 7,5 получим расстояние между Москвой и Ленинградом, равное 643 км.

Задача №4. Перед вами одинаковые кастрюли, наполненные доверху картофелем. Картофель надо почистить, причём побыстрее. В одной кастрюле вся картошка крупная, в другой – мелкая. Какую кастрюлю вы выберете? Объясните свой выбор. [2].

Решение. Меньше времени уйдёт на чистку картофеля, у которого общая площадь поверхности наименьшая. Докажем это.

Возьмём форму картофелин за отдельные сферы. Пусть m – количество маленьких картофелин, n – количество больших картофелин, причём, очевидно, что m>n. обозначим радиус одной маленькой картофелины r, а радиус большой – R, причем r<R.

Так как объём у кастрюль одинаковый, следовательно, и суммарный объём всех картофелин приблизительно одинаковый. Запишем формулы для вычисления общего объёма тех и других картофелин.

$V_{м.к.} = m*4/3\pi r^3$, $V_{б.к.} = n*4/3\pi R^3$; $V_{м.к.} = V_{б.к}$;

$m*4/3\pi r^2 = n*4/3\pi R^2$. Откуда $\frac{m}{n} = \frac{R^3}{r^3}$. Кроме того, суммарная площадь малых и больших картофелин соответственно равна $S_{м.к.} = m*4\pi r^2$ и $S_{б.к.} = n*4\pi R^2$. Разделим первое на второе: $\frac{m \cdot 4\pi r^2}{n \cdot 4\pi R^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{R}{r} > 1$, следовательно, $S_{м.к.} > S_{б.к}$.

Заключение

Изучая теорию по сферической геометрии и рассматривая практические задачи, я установила, что элементы сферы: углы, прямые, отрезки, многоугольники рассматриваются иначе, чем эти же фигуры на плоскости или в пространстве в евклидовой геометрии. Я узнала, что в геометрии сферы существует фигура, у которой менее трёх вершин – двуугольник.

По-разному трактуются и знакомые нам теоремы: теорема синусов, теорема косинусов. Применяются другие формулы для вычисления площади фигур.

Однако, можно найти и сходства. Например, совпадает определение перпендикулярных прямых, вертикальных и смежных углов, признаки равенства треугольников и т. п.

Список литературы

1. Андреева З.И., Истомина Л.И. Элементы сферической геометрии // Профессиональная математическая подготовка студентов в условиях многоуровневой системы обучения – Пермь: ПГПУ, 1997. С. 4 – 30.

2. АтанасянЛ.С. Геометрия. Ч.2.[Текст] – М: Просвещение, 1987. – 356 с.

3. Александров А.Д., Вернер А.П., Рыжик В.И. Геометрия 9 – 10. [Текст] – М: Просвещение, 1984.

4. Розенфельд Б.А. Основные понятия сферической геометрии. // Энциклопедия элементарной математики. Т.4. Геометрия. [Текст] – М: Физматгиз, 1963 – С. 518-557.

5. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии.[Текст] – М: Наука,1976. – С. 408

6. https://ru.wikipedia.org [Электрон. ресурс]