

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование полета мяча с учетом эффекта Магнуса

Корякина Мария Сергеевна,
11 кл., МБОУ Лицей №1, г. Пермь,
Кондратьев Никита Сергеевич,
к.ф.-м.н, старший научный сотрудник ПНИПУ.

Пермь. 2016.

Введение

Не каждый человек слышал о том, что такое Эффект Магнуса. Зато каждый наблюдал за игрой с участием мяча: крученые мячи доставляют бурю эмоций у игроков и болельщиков. Много лет назад люди не понимали, почему при выстреле ядра из пушки оно не всегда попадало в цель. Ученых привлек данный факт и после проведенных опытов при условиях проявления предполагаемого эффекта, был открыт эффект Магнуса.

Эффект Магнуса — физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Образуется сила, действующая на тело, зависящая от оси вращения твердого тела и направленная перпендикулярно направлению потока. Эффект впервые был описан немецким физиком Генрихом Магнусом в 1853 году.

Рассмотрим вращающийся цилиндр, помещенный в неограниченной массе вязкой жидкости или газа. Вращающийся твердый цилиндр образует вихревое движение вокруг себя (Рис.1, а). Теперь рассмотрим обтекание неподвижного цилиндра равномерным невихревым потоком воздуха (жидкости). Цилиндр плавно и симметрично обтекается потоком (Рис.1, б). И, наконец, рассмотрим случай, когда вращающийся цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха. Поток не симметричен, а цилиндр начинает движение (в данном случае вверх)(Рис.1, в).

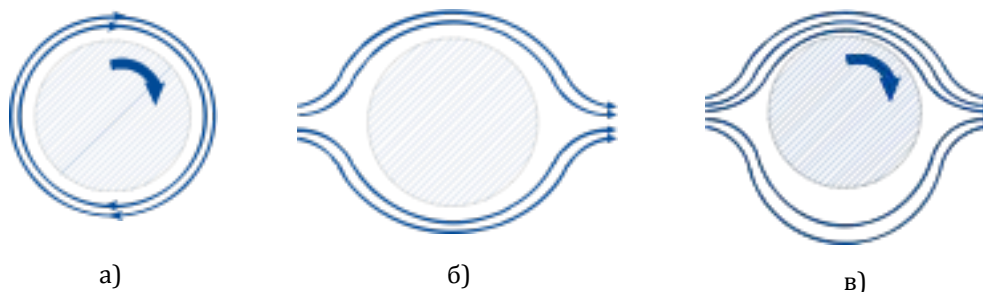


Рис. 1. Объяснение возникновения эффекта Магнуса

Рассмотрим третий случай более подробно. Вращающийся объект создаёт в среде вокруг себя вихревое движение. С одной стороны объекта направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока и, соответственно, скорость движения среды с этой стороны увеличивается. С другой стороны объекта направление вихря противоположно направлению движения потока, и скорость движения среды уменьшается. Ввиду этой разности скоростей возникает разность давлений (согласно уравнению Бернулли: чем меньше скорость, тем больше давление), порождающая поперечную силу от той стороны вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока противоположны, к той стороне, на которой эти направления совпадают (рис.2).

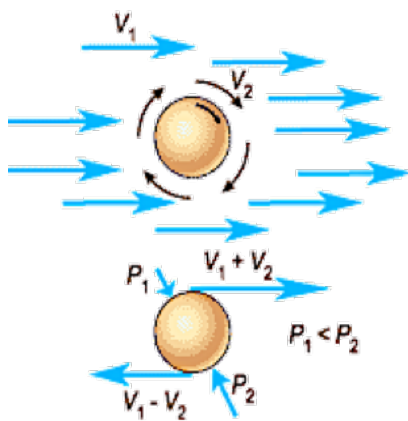


Рис.2. Объяснение эффекта Магнуса

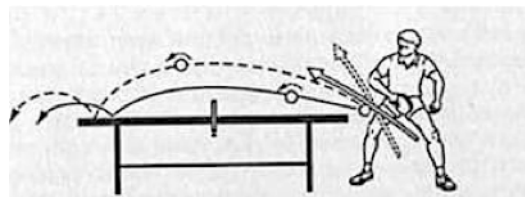


Рис.3. Удар «Топ-спин»



Рис.4. Удар «Сухой лист»

Эффект проявляется на телах вращения и находит свое применение: при разделении смешанных жидкостей на фазы; в конструировании воздушных змеев; в ветроэнергетических установках; ; в судостроении; в спортивных играх с мячом: например, специальные удары: «Топ-спин» в настольном теннисе (рис.3), «Сухой лист» в футболе (рис.4) и т.д. [2]

В эффекте Магнуса подъемная сила перпендикулярна скорости потока. Чтобы найти направление этой силы нужно вектор относительно скорости повернуть на 90° в сторону, противоположную вращению тела (рис.5). Сила Магнуса также зависит от оси вращения тела.

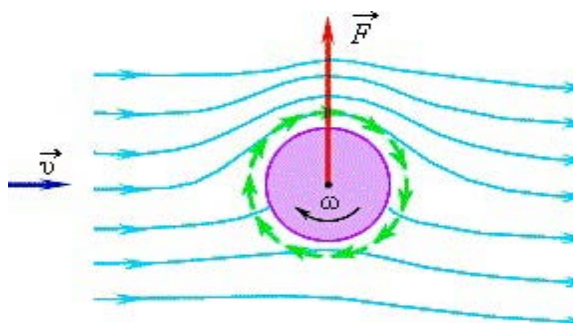


Рис.5. Направление подъемной силы Магнуса

Вращение тела вокруг неподвижной оси - такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, перпендикулярной плоскостям этих окружностей. Сама эта прямая является осью вращения.

При вращении тела все его точки за одинаковые промежутки времени поворачиваются на одинаковые углы (рис.6). [3]

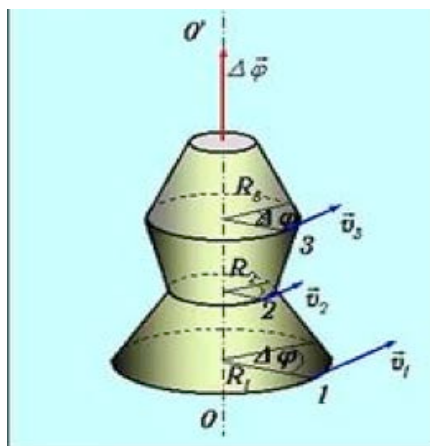


Рис.6.Схема вращения твердого тела

Если не учитывать силу Магнуса при описании движения вращающегося тела, то результаты, полученные в ходе данного исследования, будут существенно неверны.

Что же такое математическое моделирование? Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование моделей проводится с использованием различных математических методов.

Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Основные свойства моделей:

- Любая модель не тождественна исходному объекту, так как рассматриваются только необходимые для данного исследования свойства и характеристики;
- Адекватность. Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то имеет место говорить об адекватности модели;
- Потенциальность. Модель должна давать возможность получения новых знаний об исследуемом объекте.
- Простота. Модель должна отображать только существенные стороны объекта.
- Полнота. Все свойства модели, необходимые для данного конкретного исследования, должны быть учтены.

Дескриптивные (описательные) модели – это модели, целью которых является построение законов изменения параметров модели. [1]

Основная часть работы

Содержательная постановка задачи о полете мяча

Необходимо разработать математическую модель, позволяющую описать полет шарообразного мяча в воздухе с учетом эффекта Магнуса и силы сопротивления воздуха. Качественная проверка разрабатываемой модели будет осуществлена в опыте (<https://www.youtube.com/watch?v=krz-9nYAjG8>) при бросании вращающегося мяча с плотины Гордон, расположенной на реке Гордон в штате Тасмания, Австралия. Высота сооружения — 140 метров (рис.7). Характер траектории полета мяча определяется с использованием сетевого ресурса (<https://www.youtube.com/watch?v=krz-9nYAjG8>).



Рис.7. Плотина Гордон

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- описывать траекторию полета мяча при различных начальных параметрах (условиях).

Исходные данные:

- масса мяча;
- радиус мяча;
- координаты начального положения мяча в трехмерной системе координат;
- начальная линейная и угловая скорость мяча;
- углы бросания мяча относительно осей трехмерной системы координат;
- высота плотины.

Концептуальная постановка задачи о полете мяча

Примем следующие гипотезы:

1. Объектом моделирования является трехмерное тело – шарообразный мяч радиуса R и массы m .
2. Мяч является Абсолютно твердым телом. Абсолютно твердое тело – тело, взаимное расположение частей которого не изменяется со временем. Форма и размеры абсолютно твердого тела не меняются с течением времени (в реальности таких тел не существует, наше предположение является физической моделью).
3. Движение мяча происходит в трехмерном пространстве.
4. Двигаясь поступательно (пролетая по криволинейной траектории), мяч также вращается вокруг некоторой неподвижной оси (т.к. выбрана наиболее удобная система координат, относительно которой эта ось неподвижна).
5. Движение мяча происходит в поле действия силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g (ускорение можно считать постоянной величиной, т.к. высота, на которую поднимается мяч, много меньше радиуса Земли).
6. Мяч летит в некоторой среде, препятствующей свободному движению мяча (оказывающей ему сопротивление) и стремящейся уменьшить его скорость.
7. Вследствие вращения мяча вокруг некоторой неподвижной оси возникает сила Магнуса.
8. Движение описывается при помощи уравнений классической механики Ньютона.

Математическая постановка задачи о полете мяча

Основным законом динамики является второй закон Ньютона, гласящий о том, что произведение массы тела m на его ускорение \vec{a} равно равнодействующей сил \vec{F}_p , действующих на тело [3]:

$$\vec{F}_p = m\vec{a} \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для мяча в векторной форме, расписав равнодействующую всех сил, действующих на тело:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{Магнуса}} + \vec{F}_{\text{сопр.}} = m\vec{a}, \quad (2)$$

где $\vec{F}_{\text{тяж}}$ – сила тяжести, действующая на мяч; $\vec{F}_{\text{Магнуса}}$ – сила Магнуса, возникающая в результате вращения мяча; $\vec{F}_{\text{сопр.}}$ – сила лобового сопротивления воздуха.

Запишем формулу для силы Магнуса в векторной форме [2]:

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{u}| |\vec{v}| R^2 \vec{e}, \quad (3)$$

$\frac{2\pi}{3}$ – геометрический коэффициент для обтекаемого тела данной формы, ρ – плотность окружающей среды; \vec{u} – вектор скорости набегающего потока; \vec{v} – вектор линейной скорости тела относительно невозмущенной среды; R – радиус сферы; $\vec{e} = \frac{\vec{u} \times \vec{\omega}}{|\vec{u}| |\vec{\omega}|}$ – вектор, задающий направление силы Магнуса (где $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения сферы).

$$\vec{F}_{\text{Магнуса}} = \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{u}| |\vec{v}| R^2 \vec{e} = \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{u}| |\vec{v}| R^2 \frac{\vec{u} \times \vec{\omega}}{|\vec{u}| |\vec{\omega}|} \quad (4)$$

Запишем формулы для силы тяжести, действующей на мяч, и силы лобового сопротивления воздуха [3]:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m \vec{g}, \quad (5)$$

$$\vec{F}_{\text{сопр.}} = -6\pi R \eta \vec{v}, \quad (6)$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения; η – динамическая вязкость среды. Подставив формулы для сил в выражение (2), получим:

$$m \vec{g} + \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{u}| |\vec{v}| R^2 \frac{\vec{u} \times \vec{\omega}}{|\vec{u}| |\vec{\omega}|} - 6\pi R \eta \vec{v} = m \vec{a}; \quad (7)$$

Таким образом выражение (7) примет следующий вид:

$$m \vec{g} + \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{v}| R^2 \frac{\vec{u} \times \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} - 6\pi R \eta \vec{v} = m \vec{a}. \quad (8)$$

Введем неподвижную систему координат, связанную с плотинкой (рис.8):

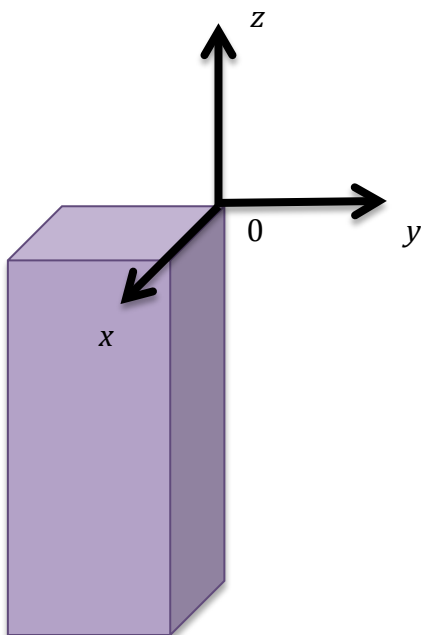


Рис.8. Оси системы координат, связанной с плотинкой.

Запишем проекции второго закона Ньютона:

В проекции на ось x :

$$ma_x = mg_x + \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{v}| R^2 \frac{(u \times \omega)_x}{|\vec{\omega}|} - 6\pi R \eta v_x; \quad (9)$$

В проекции на ось y :

$$ma_y = mg_y + \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{v}| R^2 \frac{(u \times \omega)_y}{|\vec{\omega}|} - 6\pi R \eta v_y; \quad (10)$$

В проекции на ось z :

$$ma_z = mg_z + \frac{2\pi}{3} \rho |\vec{v}| R^2 \frac{(u \times \omega)_z}{|\vec{\omega}|} - 6\pi R \eta v_z; \quad (11)$$

Вектор линейной скорости мяча \vec{v} имеет координаты $v_x = v_0 \sin\alpha \cos\beta$, $v_y = v_0 \sin\alpha \sin\beta$, $v_z = v_0 \cos\alpha$ (где v_x , v_y , v_z – проекции на соответствующие оси). Распишем модуль этого вектора по соответствующей формуле:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} = \sqrt{(v_0 \sin\alpha \cos\beta)^2 + (v_0 \sin\alpha \sin\beta)^2 + (v_0 \cos\alpha)^2} = \sqrt{(v_0)^2 * ((\sin\alpha \cos\beta)^2 + (\sin\alpha \sin\beta)^2 + (\cos\alpha)^2)} = v_0 \sqrt{(\sin\alpha \cos\beta)^2 + (\sin\alpha \sin\beta)^2 + (\cos\alpha)^2} \quad (12)$$

Подкоренное выражение может быть преобразовано: под корнем получается 1. Несмотря на это зависимость от углов будет, т.к. они влияют на траекторию полета мяча и входят в начальные условия.

α – это угол между вектором начальной скорости и осью OZ , а β – это угол между начальной скоростью и осью X (рис.9):

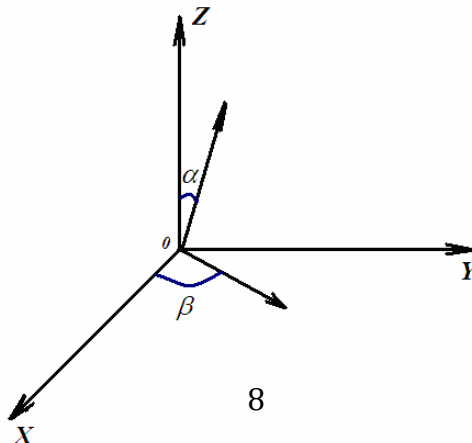


Рис. 9. Углы, используемые при проецировании вектора скорости на каждую из осей координат.

Введем систему координат $X'Y'Z'$, связанную с мячом (рис.10). Начало данной системы координат движется, но оси не вращаются:

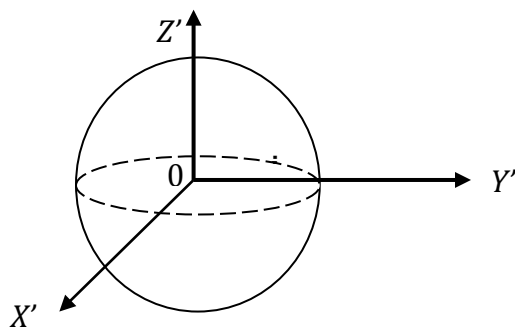


Рис.10. Система координат, связанная с мячом.

Рассмотрим вращение мяча вокруг одной оси. Мяч вращается вокруг некоторой произвольной оси. В данном опыте (<https://www.youtube.com/watch?v=krz-9nYAjG8>) вектор угловой скорости вращения мяча $\boldsymbol{\omega}$ направлен по оси OX , но в противоположную сторону (правило Буравчика). (рис.11)

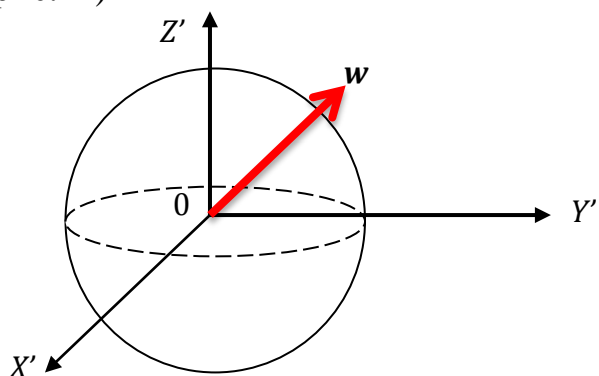


Рис.11. Направление угловой скорости вращения.

Покажем расположение данных систем координат друг относительно друга(рис.12):

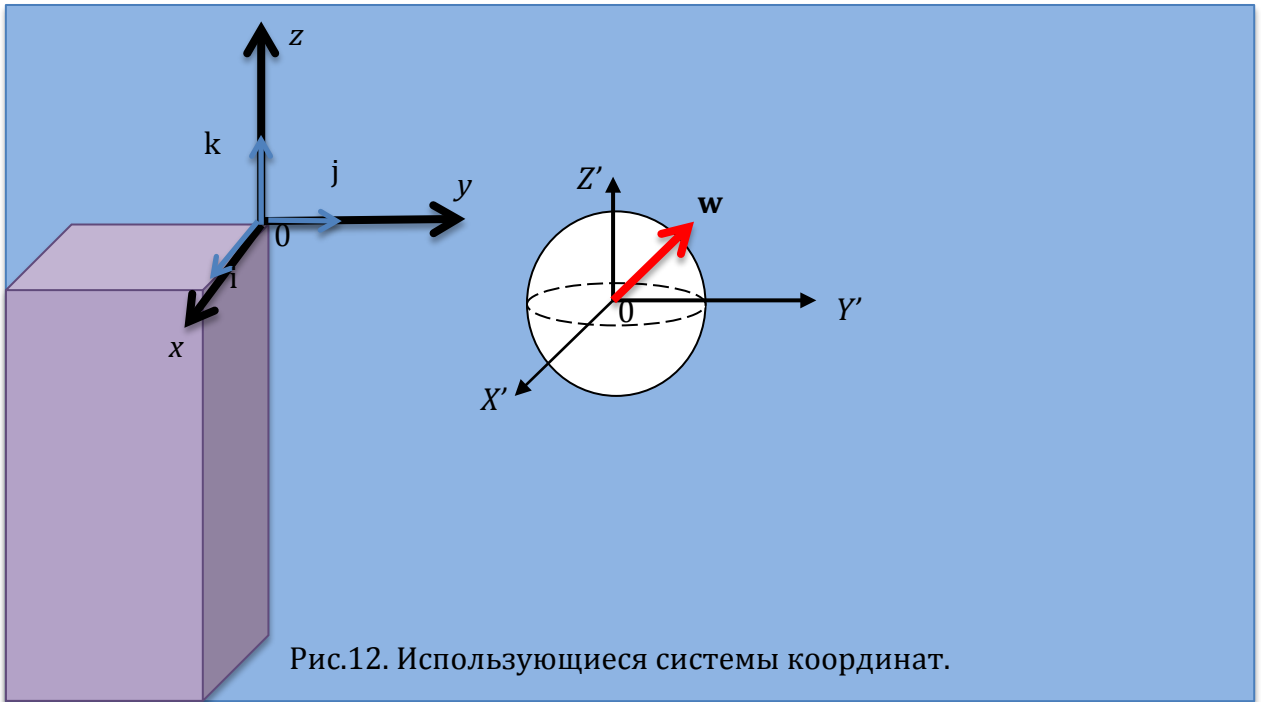


Рис.12. Используемые системы координат.

Вектор угловой скорости вращения мяча \mathbf{w} имеет некоторые координаты w_x, w_y, w_z (для общего случая). Распишем модуль этого вектора по соответствующей формуле:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{(w_x)^2 + (w_y)^2 + (w_z)^2}. \quad (13)$$

Распишем векторное произведение угловой скорости вращения мяча \mathbf{w} и скорости кругового потока относительно мяча \mathbf{u} , встречающиеся в формулах (7)-(11), в проекции на все оси:

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = i(u_y w_z - u_z w_y) - j(u_x w_z - u_z w_x) + k(u_x w_y - u_y w_x); \quad (14)$$

Тогда проекция векторного произведения на определенную ось примет вид:

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{u})_x = u_y w_z - u_z w_y; \quad (15)$$

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{u})_y = u_z w_x - u_x w_z; \quad (16)$$

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{u})_z = u_x w_y - u_y w_x. \quad (17)$$

Подставив формулы проекции линейной скорости мяча, формулы (15)-(17) и формулу (13) в формулы проекций второго закона Ньютона (9),(10),(11), получаем:

В проекции на ось x :

$$ma_x = mg_x + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(U_y W_z - U_z W_y)}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}} - 6\pi R \eta v_x; \quad (18)$$

В проекции на ось y :

$$ma_y = mg_y + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(U_z W_x - U_x W_z)}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}} - 6\pi R \eta v_y; \quad (19)$$

В проекции на ось z :

$$ma_z = mg_z + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(U_x W_y - U_y W_x)}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}} - 6\pi R \eta v_z; \quad (20)$$

Для определения силы Магнуса переходим в подвижную систему координат, связанную с мячом (рис.11). Угловые скорости точек поверхности мяча будут отличаться. Нам необходима их средняя скорость вращения. Для этого найдем в этой системе координат (рис.11) максимальную скорость вращения мяча w : Точка O совпадает с центром масс мяча. В точках, где плоскость $Z'OY'$ пересекает мяч скорость w будет максимальна, а в точке, где ось OX' пересекает мяч скорость $w=0$ м/с. Средняя скорость вращения мяча будет находиться как произведение геометрического коэффициента $\frac{2\pi}{3}$ на максимальную скорость вращения w . Этот эффект был учтен в геометрическом множителе $\frac{2\pi}{3}$ силы Магнуса (4). Для цилиндра, точки которого движутся с одинаковой линейной скоростью при вращении относительно оси цилиндра, этот коэффициент составляет 2π . Для шара, естественно, меньше.

Рассмотрим обе системы координат: неподвижную, связанную с плотиной, и движущуюся, связанную с мячом (рис.12). Рассмотрим случай, когда ветра нет. Ветра нет, но, так как мяч движется, относительно него возникает поток набегающего воздуха с некоторой скоростью \mathbf{u} . Согласно преобразованиям Галилея:

$$\vec{v}_{\text{абсолютная}} = \vec{v}_{\text{относительная}} + \vec{v}_{\text{переносная}}; \quad (21)$$

$\vec{v}_{\text{абсолютная}} = \vec{v}_{\text{ветра}} = 0$ м/с (т.к. ветра нет)

$\vec{v}_{\text{относительная}} = \mathbf{u}$ – скорость возникающего потока относительно мяча

$\vec{v}_{\text{переносная}} = \vec{v}_{X'Y'Z'}$ – скорость системы координат $X'Y'Z'$, связанной с мячом, относительно систем координат XYZ , связанной с землей.

Подставим эти скорости в выражение (32):

$$\vec{v}_{\text{ветра}} = \mathbf{u} + \vec{v}_{X'Y'Z'}; \quad (22)$$

$$0 = \mathbf{u} + \vec{v}_{X'Y'Z'}; \quad (23)$$

$$\mathbf{u} = -\vec{v}_{X'Y'Z'}; \quad (24)$$

Скорость системы координат $X'Y'Z'$ есть линейная скорость движения центра масс мяча, равная линейной скорости движения мяча \vec{v} относительно системы координат XYZ : $\vec{v}_{X'Y'Z'} = \vec{v}_{\text{центра масс мяча}} = \vec{v}$

$$\mathbf{u} = -\vec{v}. \quad (25)$$

В проекции на ось x :

$$u_x = -v_x; \quad (26)$$

В проекции на ось y :

$$u_y = -v_y; \quad (27)$$

В проекции на ось z :

$$u_z = -v_z; \quad (28)$$

Вектор скорости \vec{v} - это производная от расстояния S , пройденного мячом: $\vec{v} = S'$.

В проекции на ось x :

$$v_x = x'; \quad (29)$$

В проекции на ось y :

$$v_y = y'; \quad (30)$$

В проекции на ось z :

$$v_z = z'. \quad (31)$$

Таким образом, подставив выражения (40)-(42) в соответствующие выражения проекций (37)-(39), получаем:

В проекции на ось x :

$$u_x = -x'; \quad (32)$$

В проекции на ось y :

$$u_y = -y'; \quad (33)$$

В проекции на ось z :

$$u_z = -z'. \quad (34)$$

Ускорение тела есть вторая производная от расстояния: $\mathbf{a} = S'' \Rightarrow$ в проекции на различные оси имеем:

В проекции на ось x :

$$a_x = x''; \quad (35)$$

В проекции на ось y :

$$a_y = y''; \quad (36)$$

В проекции на ось z :

$$a_z = z''. \quad (37)$$

Полученные проекции (29)-(37) подставим в соответствующие проекции второго закона Ньютона (18), (19), (29):

В проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = mg_x + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(z'w_y - y'w_z)}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} - 6\pi R\eta x'; \quad (38)$$

В проекции на ось y :

$$my'' = mg_y + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(x' w_z - z' w_x)}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} - 6\pi R \eta y'; \quad (39)$$

В проекции на ось z :

$$mz'' = mg_z + \frac{2\pi}{3} \rho v_0 R^2 \frac{(y' w_x - x' w_y)}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} - 6\pi R \eta z'. \quad (40)$$

Таким образом мы получили систему из трех дифференциальных уравнений (38), (39), (40), которую нам необходимо решить.

Используем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \\ v_x(0) &= v_{0x}, \quad v_y(0) = v_{0y}, \quad v_z(0) = v_{0z}, \\ \omega_x(0) &= \omega_{0x}, \quad \omega_y(0) = \omega_{0y}, \quad \omega_z(0) = \omega_{0z}, \end{aligned}$$

где x, y, z – координаты центра масс мяча в момент времени t ; x_0, y_0, z_0 – начальные координаты центра масс мяча в момент времени t_0 ; v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости мяча на соответствующие оси; v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} – проекции вектора скорости в момент времени t_0 ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости вращения мяча на соответствующие оси; $\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$ – начальные угловые скорости вращения мяча в момент времени t_0 .

Время одного полного оборота мяча (период) при его закручивании $T=2c$. (Данный период был найден при помощи опыта, проводившегося на видео (<https://www.youtube.com/watch?v=krz-9nYAjG8>). С помощью видеоредактора «Movavi Video Editor 4» данное видео было максимально замедленно, полный оборот мяча засекался при помощи секундомера).

Угловая скорость вращения мяча определяется по формуле: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Таким

образом получаем: $\omega = \frac{2\pi}{2c} = \pi \text{ рад/с} \approx 3,14 \text{ рад/с}$.

Начальные условия и параметры модели для решения системы дифференциальных уравнений в программе «Wolfram Mathematica» :

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0 \text{ м} \\ y_0 &= 0 \text{ м} \\ z_0 &= 140 \text{ м} \end{aligned} \right\} \text{ Начальные координаты центра} \\ \text{масс мяча в момент времени } t_0$$

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 0 \\ g_y &= 0 \\ g_z &= -10 \text{ м/с}^2 \end{aligned} \right\} \text{ Проекции векторов ускорения свободного} \\ \text{падения на соответствующие оси}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -3,14 \text{ рад/с} \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Проекции векторов угловой скорости}$$

$v_0 = 5 \text{ м/с}$ - начальная скорость мяча

$m = 0,6 \text{ кг}$ - масса мяча

$\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ - плотность воздуха

$R = 0,13 \text{ м}$ - радиус мяча

$\mu = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ Н*с/м}^2$ - динамическая вязкость воздуха

Методы решения

Решим полученную систему, состоящую из трех дифференциальных уравнений (38), (39), (40), в программе *Wolfram Mathematica* при помощи функции «*NDSolve*». *NDSolve* – функция, которая находит численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений для функции и с независимой переменной x в диапазоне от X_{min} до X_{max} .

Построим график траектории полета нашего мяча с учетом силы тяжести, силы Магнуса и силы сопротивления воздуха в системе *Wolfram Mathematica* при помощи функции «*ParametricPlot3D*».

Результаты

Результатом данного исследования является получение и анализ траектории полета вращающегося мяча с учетом эффекта Магнуса (рис.13), без его учета, сопоставление результата с экспериментом по броску мяча с плотины Гордон.

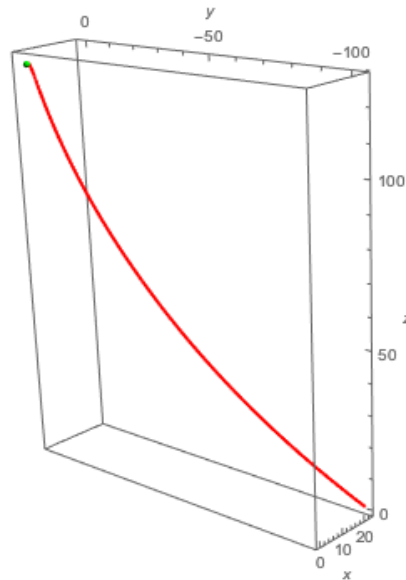


Рис. 13. Траектория полета мяча, полученная с учетом эффекта Магнуса, силы лобового сопротивления воздуха и силы тяжести.

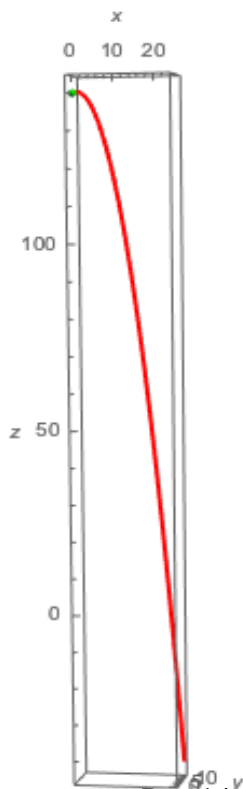


Рис.14. Траектория полета мяча, полученная без учета эффекта Магнуса.

Реализуем математическую модель траектории полета невращающегося мяча, летящего под действием силы тяжести и возникающей силы лобового сопротивления воздуха, т.е. без учета возникновения эффекта Магнуса (рис.14).

Сравнив полученные результаты, мы видим, что траектории полетов мяча, представленные на рисунках 13 и 14, сильно отличаются друг от друга. За одно и то же время, но при действии разных сил мяч пролетает разные расстояния: при действии на мяч силы Магнуса расстояние меньше.

Выводы

1. Разработана математическая модель, позволяющая описать движения мяча с учетом действия на него различных сил (сила Магнуса, сила тяжести, сила лобового сопротивления воздуха).
2. Записана математическая постановка рассматриваемой задачи о движении вращающегося мяча.
3. Полученная система из трех дифференциальных уравнений решена численно методом Эйлера с использованием программы «Wolfram Mathematica».
4. Траектория полета мяча, построенная с учетом эффекта Магнуса, силы тяжести и силы сопротивления воздуха, получилась идентична траектории, представленной в эксперименте по броску баскетбольного мяча с плотины Гордон (<https://www.youtube.com/watch?v=krz-9nYAjG8>).
5. Убедились в том, как сильно сила Магнуса влияет на движение вращающегося мяча и изменяет его траекторию. Очень важно учитывать эффект Магнуса при описании полета мяча, ведь при пренебрежении данной силой результаты получаются неверны.

Список литературы

1. Ашихмин В. Н. и др. Введение в математическое моделирование. – М. : Интермет инжиниринг, 2000.
2. Бородин И. Д. и др. Эффект Магнуса.
3. Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., Сотский Н. Н. Физика-10 //М.: просвещение. – 2004.
4. Wolfram S. The Mathematica. – Cambridge : Cambridge university press, 1999.