

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ НА ОСНОВЕ
ПРОСТЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ**

Мальцев Михаил Юрьевич,
11 кл., МБОУ «Лицей № 1», г.Пермь,
Герцен Татьяна Анатольевна,
к.х.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2016.

ВВЕДЕНИЕ

Окружающий наш мир геометрически можно считать совокупностью объемов и поверхностей их ограничивающих. По своим свойствам и виду поверхности могут быть гладкими, шероховатыми, бугристыми, волнистыми. По цвету – однотонными, пестрыми, полосатыми и т.п.

В геометрии среди множества способов решения задач о поверхностях существует так называемый метод преобразований, рассматривающий движение плоскостей. Этот метод позволяет решать различные задачи геометрии, связанные с доказательствами, построениями и нахождением мест точек.

В данной работе рассмотрено перемещение плоскостей, на которых расположено множество мелких объектов (пятен) разной формы, разным их взаимным расположением, разной степени упорядоченности.

В результате поворотов и смещений при наложении такой плоскости самой на себя (Приложение 1) наблюдаются некоторые закономерности в распределении этих объектов (пятен, точек) [1].

Целью данной работы является исследование этих закономерностей и использование их для анализа как модельных (искусственных), так и реальных структур поверхностей.

Поверхности сами по себе являются объектом изучения многих наук – физики, химии, биологии, астрономии и других. Аэрофотоснимки земной поверхности, снимки поверхностей других планет и их спутников, сделанные в ходе полета космических аппаратов, предоставили в распоряжение исследователей обширные сведения о виде поверхностей небесных тел. Поэтому исследования этих поверхностей, их сопоставление, поиски сходства и различия между ними в настоящее

время являются актуальными. Нам, в частности, представился интересным геометрический способ анализа фактуры поверхностей.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Движения плоскости

- 1.1. Преобразованием плоскости называется любое правило, ставящее в соответствие каждой точке плоскости точку этой же плоскости (ее образ) так, что каждая точка плоскости является образом одной и только одной точки [2].
- 1.2. Движением плоскости называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния.
- 1.3. Элементарные движения – это перенос, поворот и симметрия. Любое движение плоскости может быть представлено в виде композиции этих элементарных движений.

Теорема 1. Любое движение плоскости может быть представлено в виде композиции (сочетания) параллельного переноса, поворота и симметрии.

Лемма 1. Композиция двух параллельных переносов на векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} является параллельным переносом на вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Лемма 2. Композиция двух поворотов с общим центром на углы α и β является поворотом с тем же центром на угол $\alpha+\beta$.

Лемма 3. Композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей l_1 и l_2 является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от l_1 к l_2 , длина которого равна удвоенному расстоянию между осями d .

Если взять произвольную точку M и найти ее образ, то можно видеть, что вектор MM_1 является тем самым вектором из формулировки леммы (рис.1). Если расположить ось абсцисс (в координатном методе)

параллельным прямым l_1 и l_2 , то рассматриваемые оси симметрий будут задаваться уравнениями типа $y=a$ $y=b$ соответственно.

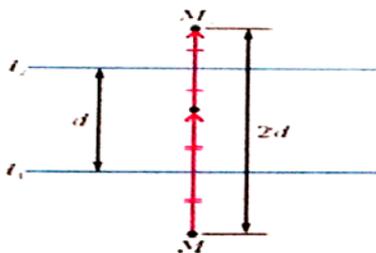


Рис.1 Иллюстрация к лемме 3

Лемма 4. Композиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей L_1 и L_2 является поворотом относительно точки пересечения этих осей на удвоенный угол между этими осями (рис. 2).

Лемма 5. Композиция двух поворотов на углы α и β с различными центрами O_1 и O_2 соответственно и является поворотом на $\alpha+\beta$

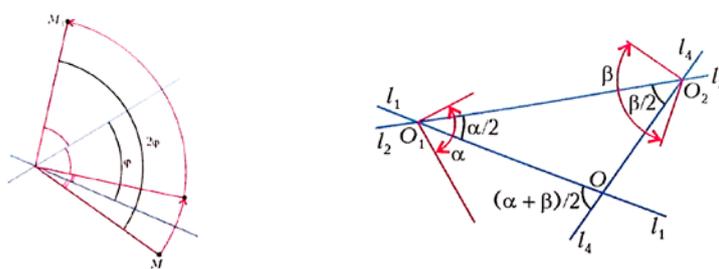


Рис. 2. Иллюстрации к лемме 4.

Лемма 6. Композиция параллельного переноса на вектор a и поворотом в точке O на ненулевой угол α является поворотом на тот же угол α (с другим центром, если вектор a ненулевой).

- 1.4. Движение в физике и геометрии. Одно и то же движение с точки зрения геометрии может представляться в физике как движение различными способами. В физике важен процесс, происходящий с тем или иным телом, а в геометрии важно начальное и конечное положение этого тела. Некоторые движения, например, осевая симметрия, не могут реализоваться в физике в виде непрерывного

движения, не выходящего за плоскость. Поэтому с точки зрения физики они движениями не являются, но в геометрии они считаются движениями., про них говорят, что они меняют ориентацию. Фигура называется ориентированной, если в ней задан порядок обхода ее вершин [3].

1.5. Любая композиция элементарных движений либо сохраняет ориентацию либо изменяет ее. Собственное движение – движение, сохраняющее ориентацию (первого порядка). Несобственное – движение, не сохраняющее ориентацию (второго порядка).

1.6. Теорема 2. Существует единственное собственное и единственное несобственное движения, переводящие данный направленный отрезок в равный ему направленный отрезок.

1.7. Теорема Шаля.

Теорема 3. Любое собственное движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом.

Теорема 4. Любое несобственное движение плоскости является скользящей симметрией.

Объединение теорем 3 и 4 называется теоремой М. Шаля (Приложение 2).



Рис. 3. Мишель Шаль (Michel Chasles, 1793-1880) – французский геометр, действительный член Парижской Академии наук,

иностранный член Императорской Санкт-Петербургской Академии наук и других. Основные работы относятся к проективной геометрии, механике, истории математики.

2. Муаровый эффект.

При наложении двух систем контрастных полос возникает узор, образованный их сгущениями в тех местах, где полосы одной системы попадают в промежутки между полосами другой системы. Возникновение таких узоров называется муаровым эффектом (Приложение. 3). Муаровый узор образуется также при наложении двух непересекающихся систем равноудаленных параллельных линий, когда величина шага одной из систем слегка отлична от другой. При этом, чем меньше разница в шаге, тем больше расстояние между муаровыми полосами. Это позволяет получить существенное увеличение (в миллионы раз) разницы в ширине промежутков между линиями. Таким образом, муаровый эффект позволяет визуально без применения оптических приборов обнаруживать очень малые отклонения в почти одинаковых периодических структурах. Муаровый эффект широко применяют в настоящее время для контроля точности делительных машин при изготовлении дифракционных решеток. Если две регулярные решетки из параллельных прямых, несколько отличных по величине шага, перемещать одну относительно другой в направлении, перпендикулярном линиям, то полосы муарового узора будут двигаться со скоростью гораздо большей, чем относительная скорость движения самих решеток. При этом их направление совпадает с направлением относительно смещения решетки с меньшим шагом. Это значит, что малое перемещение одной из решеток приводит к значительному перемещению полос муара, которое легко обнаружить и измерить.

Также можно визуализировать малые изменения показателя преломления прозрачных сред, помещая их между решетками. Так, можно изучить визуально динамику растворения двух веществ. Этот же принцип в экспресс-анализе качества оптических деталей. При этом обе линзы поворачивают узор в противоположных направлениях на угол, пропорциональный фокусному расстоянию. В местах неоднородностей структуры или формы линз линии узора искажаются.

Ярким примером является опыт с двумя идентичными плоскостями [1]

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. Приборы и принадлежности.

- а. Листы простой бумаги и прозрачной специальной бумаги для принтера,
- б. принтер,
- в. линейка, $\Delta = 1$ мм
- г. транспортир

2. Порядок проведения измерений .

- а. Сфотографировать исследуемую поверхность с произвольным образом разбросанными точкам (пятнами).
- б. Полученные снимки распечатать на простой белой бумаге и на прозрачной. Отпечатки должны быть совершенно идентичными. Если их совместить, то все точки должны совпасть.

Опыт 1.

- 1. Совместить 2 плоскости.
- 2. Добиться появления четких кругов (это достигается при угле поворота 8°).

3. Измерить диаметр круга, который образуется внутри рисунка благодаря некоторому сближению точек.
4. Измерить диаметры также кругов для плоскостей 1, 2, 3: получили соответственно 6,5 см, 4 см, 3 см.

Вывод: радиус окружности, образованный при повороте на одинаковый угол одной плоскости относительно другой, зависит от расстояния между объектами (пятнышками) плоскости.

Опыт 2.

Задачи: Провести эксперименты, меняя фактор, влияющий на закономерность движения плоскостей:

Центр поворота.

Изображения пятен подобраны таким образом, что их размерами можно пренебречь. Отличие в наборе плоскостей состоит в том, что расстояние между точками отличаются друг от друга.

- а). Если повернуть один лист относительно другого, картинка изменится. Точки расположатся на концентрических дугах окружностей, и возникает ощущение видимости окружностей. Это подтверждает, что совершенное движение было поворотом (приложение 2).
- б). С помощью линейки измерить радиусы (диаметры) окружностей, а транспортиром измерить углы поворота.
- в). Осуществить параллельное смещение рисунков.
- г). Выполнить сочетание движений: поворот и параллельный перенос.

2. Анализ проведенных наблюдений и полученных результатов.

Совсем рядом с центром поворота пленки изображения почти совпадают. Дальше от центра точки рисунка уже не совпадают, но

сближаются друг с другом, образуя «дуги». Еще дальше точки расположены близко друг к другу – глаз видит окружности.

Вдали от центра поворота или при повороте на большой угол окружности перестают быть отчетливо различимыми. Так осуществляется иллюстрация свойства движений: сделав поворот и сдвиг, в итоге получим поворот (лемма б) – несколько движений может быть заменено более простым.

Чем больше угол поворота, тем меньше становится радиус отчетливо видимой окружности. Это происходит из-за того, что точки, образующие круги должны лежать рядом со своими неподвижными образами, а при большом угле они все дальше смещаются от них.

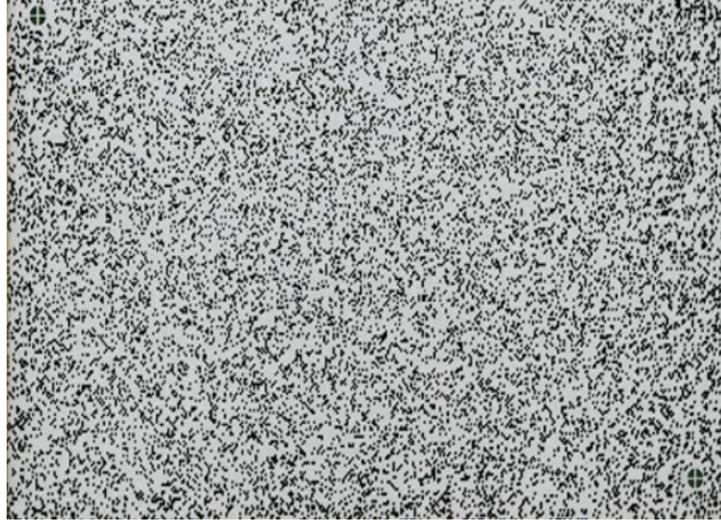
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведены наблюдения и измерения, связанные с возникновением упорядоченных структур при поворотах и смещениях наложенной самой на себя плоскости покрытой множеством мелких объектов (точек, пятен и т.п.), получен ряд закономерностей, связывающих углы и положение центров поворотов, величины смещений с диаметрами окружностей. Таким образом, можно оценивать расстояния между этими объектами, их концентрацию, а впоследствии, может быть, и форму. Данная тема исследования затрагивает самые различные области науки, инженерии, архитектуры, дизайна. Например, изучения поверхностей осадков в химии, поверхностей земных и небесных тел, звездного неба в астрономии (приложение 4,5).

Список использованной литературы

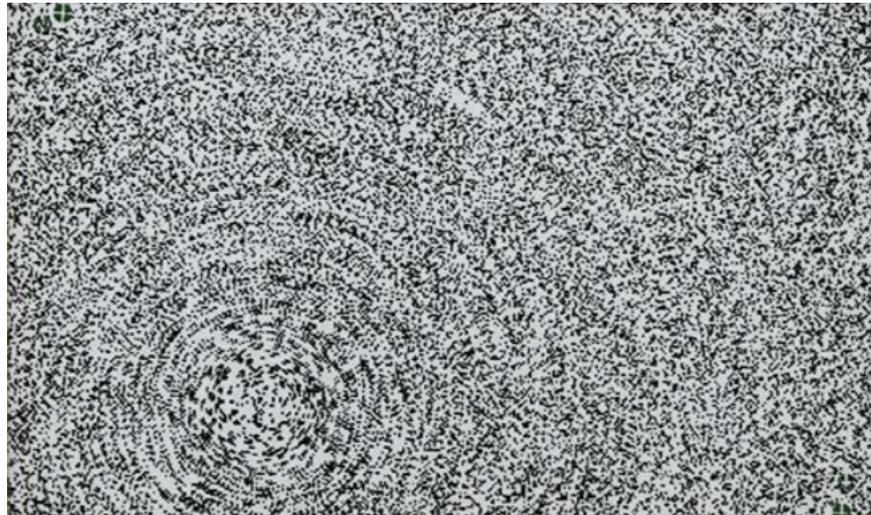
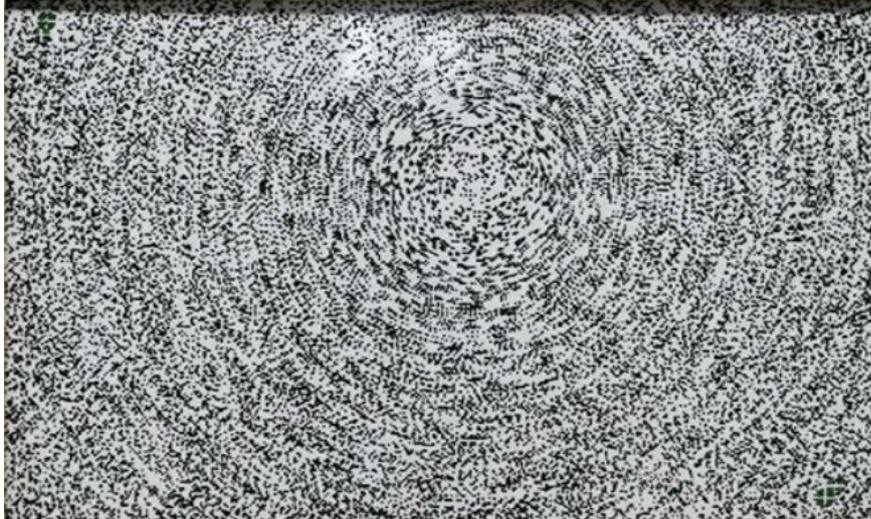
1. Дориченко С.В., Шашаков С.А., Шень А.А. Загадочные круги и движения плоскости. Квант. 2008, № 5 с. 44.
2. Бугаенко В.В. Движение плоскости и теорема Шаля. Квант 2009, № 4 с.42-44.
3. Шеломовский В.В. Углубленная геометрия движения плоскости. 2014.
4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 2006
5. Интернет ресурсы: <http://www.probltms.ru>

ПРИЛОЖЕНИЕ



Приложение 1. Иллюстрация опытов с возникновением из беспорядочно расположенных точек образов с более высокой степенью порядка (кругов)

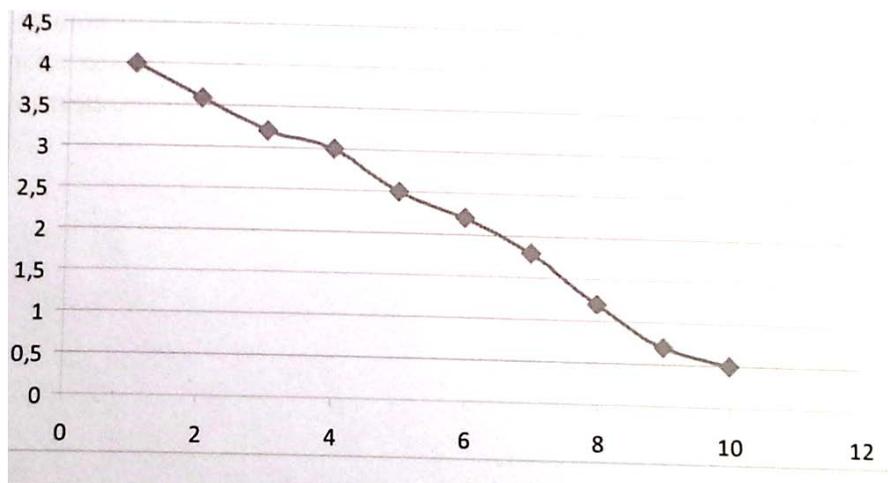
Теорема Шаля



Приложение 2. Иллюстрации к доказательству теоремы Шаля.



Приложение 3. Пример возникновения муарового эффекта (узора)



Приложение 4. График зависимости диаметра окружности от угла поворота плоскостей: по оси абсцисс отложены углы в градусах, ось ординат – диаметры окружностей в см.

№	Угол, град.	Диаметр, см
1	5	1,8

2	10	2,0
3	15	1,2
4	18	0,2
5	20	0

а)

№	Угол град.	Диаметр, см
1	3	4,8
2	5	2,8
3	10	1,0
4	15	0,4
5	20	0

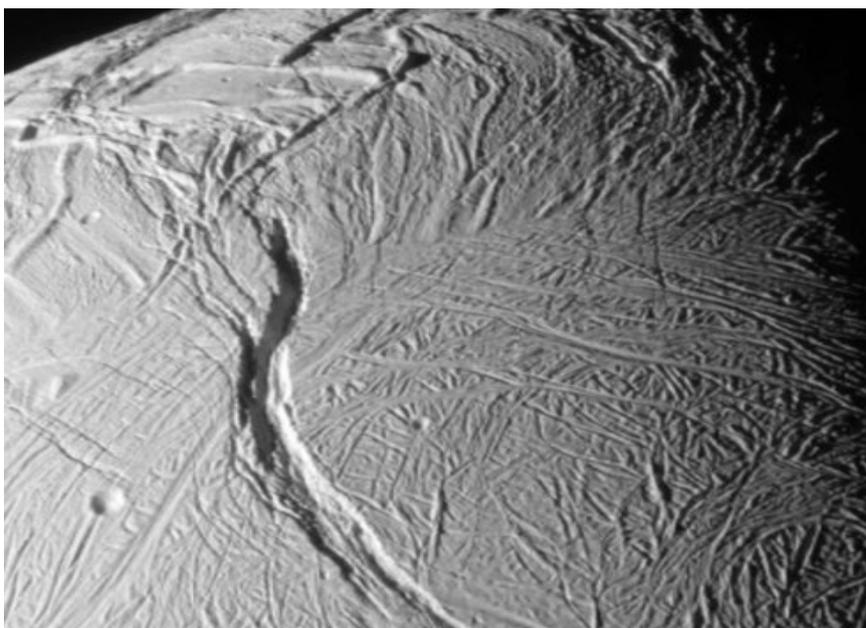
б)

№	Угол град.	Диаметр, см
1	4	28
2	5	22
3	10	16
4	15	4
5	20	2

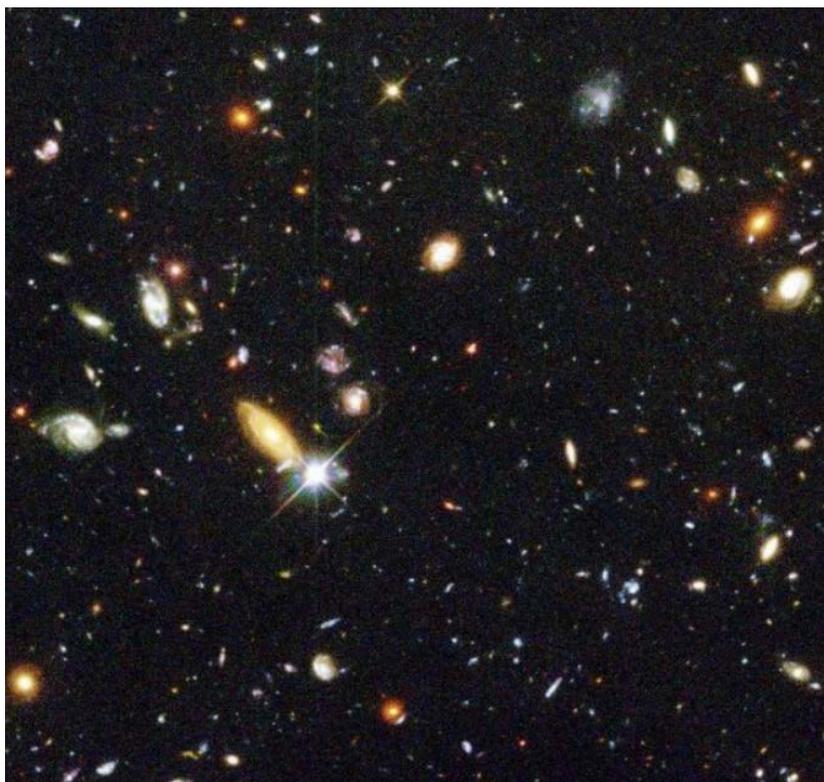
в)

Приложение 4. Наблюдение закономерности движения плоскостей:

- а). центр поворота находится в центре рисунка.
- б). центр поворота – в левом нижнем углу рисунка
- в). центр поворота – в верхней части плоскости



Приложение 5. Поверхность спутника Сатурна – Энцелада.



Приложение 6. Снимки неба, сделанные с помощью телескопа Хаббл.