Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Пропорциональность при вычислении площадей многоугольников

Панина Анастасия Юрьевна,
11 класс, МБОУ «Ильинская СОШ №1»,
Ильинский район,

Самохина Наталья Александровна,
учитель математики высшей категории
МБОУ «Ильинская СОШ №1».

Пермь 2016

Содержание

Введение

Как подготовиться к экзамену по математике? Этим вопросом задаются все школьники, без исключения.

Почему основные трудности вызывают геометрические задачи? Очевидно, что в алгебре, тригонометрии и началах математического анализа разработана целая серия решений типовых заданий. И получается, что самое трудное в решении любой задачи – это планирование своих действий, то есть, если есть алгоритм, значит есть программа действий, а потому трудности, если они имеют место, носят чаще всего технический характер.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов не существует, и выбрать наиболее подходящую к данному случаю теорему из их большого количества трудно.

Так же, это связанно и с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена с использованием определенной формулы. При решении большинства задач не обойтись без привлечения разнообразных фактов теории, доказательства тех или иных утверждений, справедливых лишь при определенном расположении элементов фигур. Но и при хорошем знании теории приобрести навык в решении задач можно лишь решив их достаточно много, начиная с простых и переходя к более сложным, а самое главное, разумно владеть методами решения задач.

Гипотеза: овладение приемами решения задач на пропорциональность – объективная возможность для решения геометрических задач повышенной сложности.

Актуальность исследования обусловлена ежегодным усложнением заданий ЕГЭ, что требует углублённых знаний во всех разделах математики.
Учебно – исследовательская работа «Пропорциональность при вычислении площадей многоугольников» является дополнением изученных в школьной геометрии свойств площадей многоугольников.

Объект исследования: выпуклые многоугольники.

Предмет исследования: пропорциональность при вычислении площадей многоугольников.

Цель: изучение теории вопроса и исследование приемов решений планиметрических задач с использованием свойств площадей.

Задачи:
1. Изучить научно-методическую литературу по данной теме.
2. Составить банк ключевых задач.
3. Освоить различные пути поиска решения задач с использованием свойств площадей.
4. Классифицировать задачи, решаемые на отношения площадей многоугольников.
5. Применить ключевые задачи для решения более сложных планиметрических задач.

Структура. Работа состоит их двух глав. В первой главе формулируются ключевые задачи и доказываются свойства пропорциональных отношений при вычислении площадей многоугольников. Во второй главе рассмотрены ряд задач, которые решаются с применением этих свойств.

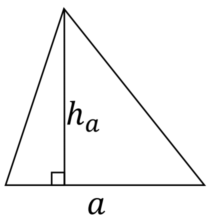
Глава 1.Пропорциональность при вычислении площадей многоугольников. Система ключевых задач

Площадь – это число, которое ставится в соответствие ограниченной плоской фигуре (многоугольнику).

Свойства:

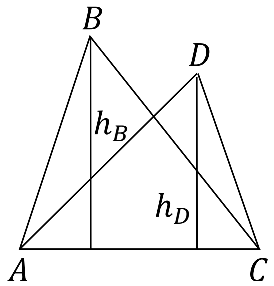
1. Площадь многоугольника является неотрицательным числом.
2. Равные многоугольники имеют равные площади.
3. Если многоугольник составлен из двух многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
4. За единицу измерения площади принимаются площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины.

1.1. Пропорциональность и площадь треугольника



Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}ah_a$, где a – длина стороны треугольника, h_a – высота, опущенная на эту сторону

Ключевая задача 1. *Площади треугольников, имеющих одно и то же основание, пропорциональны высотам:* $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{h_B}{h_D}$.

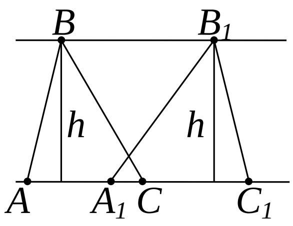


Доказательство: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_B$

$S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_D$, тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot h_B}{\frac{1}{2}AC \cdot h_D} = \frac{h_B}{h_D}$.

Вывод: площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты.

Ключевая задача 2. *Площади треугольников, имеющих одну и ту же высоту, пропорциональны основаниям:* $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

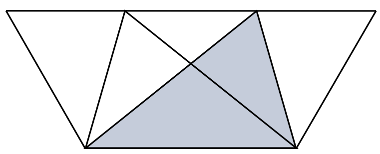


Доказательство:

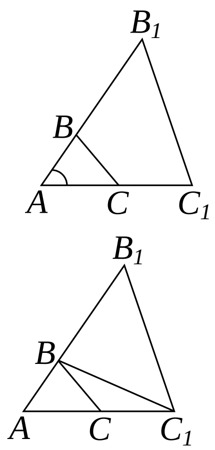
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_B$; $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot h_B$, тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot h_B}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot h_B} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Вывод: если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований.

Ключевая задача 3. *Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится.*



Ключевая задача 4. *Площади треугольников, имеющих общий угол, пропорциональны произведениям сторон, заключающих этот угол:* $\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$.



Доказательство:

1. Проведем отрезок BC_1.

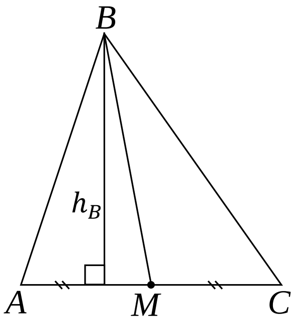
2. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC_1}} = \frac{AC}{AC_1}$ (отношение площадей треугольников с равными высотами).

$\frac{S_{\Delta ABC_1}}{S_{\Delta AB_1C_1}} = \frac{AB}{AB_1}$.

Перемножая последние два равенства, получим: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$.

Вывод: Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.

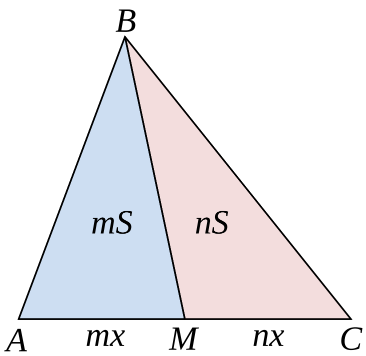
Ключевая задача 5. *Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.*



Доказательство:

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta ABM} &= \frac{1}{2} AM \cdot h_B \\ S_{\Delta BMC} &= \frac{1}{2} MC \cdot h_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BMC}.$$

Ключевая задача 6. *(О площадях смежных треугольников). Если прямая, проведенная из вершины треугольника, делит противоположную сторону в отношении $m:n$, то и площадь треугольника она делит в таком же отношении.*



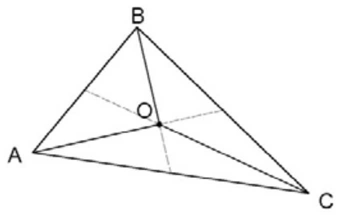
Доказательство:

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot h_B = \frac{1}{2} mx \cdot h_B;$$

$$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} MC \cdot h_B = \frac{1}{2} nx \cdot h_B,$$

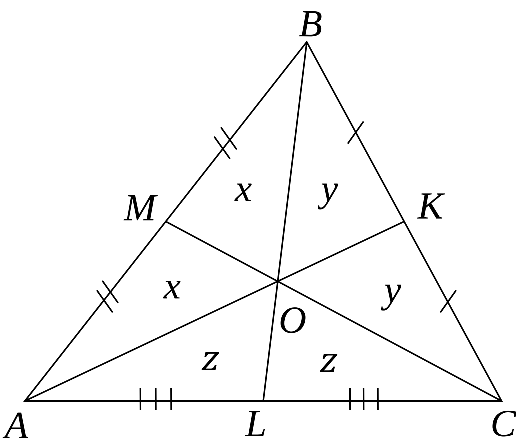
Тогда $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$.

Ключевая задача 7.*В треугольнике точка пересечения медиан соединена с вершинами. Площадь каждого из полученных треугольников составляет третью часть площади данного треугольника***.**



$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$$

Ключевая задача 8. *Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.*



Доказательство:

1. Пусть *O* – точка пересечения медиан *AK*, *BL* и *CM* ΔABC.

2. *OM* – медиана $\Delta AOB \Rightarrow S_{\Delta AOM} = S_{\Delta BOM} = x$.

3. *OK* – медиана $\Delta BOC \Rightarrow S_{\Delta BOK} = S_{\Delta KOC} = y$.

4. *OL* – медиана $\Delta AOC \Rightarrow S_{\Delta AOL} = S_{\Delta OLC} = z$.

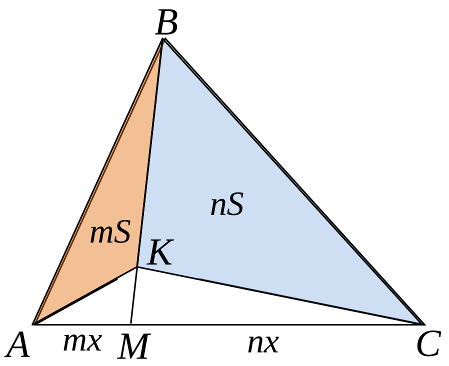
5. *BL* – медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta ABL} = S_{\Delta BLC} \Rightarrow x + x + z = y + y + z \Rightarrow x = y$.

6. *AK*– медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta ACK} = S_{\Delta BAK} \Rightarrow z + z + y = x + x + y \Rightarrow x = z$.

7. $\left.\begin{matrix} x = y \\ x = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = z$.

Вывод: $x = y = z$, то есть медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей

Ключевая задача 9. *Если прямая, проведенная из вершины треугольника, делит противоположную сторону в отношении* $m{:}n$, *тогда для любой точки K, взятой на этой прямой,* $\frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta KBC}} = \frac{m}{n}$.



Доказательство: $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta MBC}}=\frac{m}{n}$.

1. $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AM\cdot h_B=\frac{1}{2}mx\cdot h_B$

$S_{\Delta AMK}=\frac{1}{2}AM\cdot h_K=\frac{1}{2}mx\cdot h_K$, тогда

$S_{\Delta ABK}=\frac{1}{2}mx\cdot h_B-\frac{1}{2}mx\cdot h_K=\frac{1}{2}mx(h_B-h_K)$.

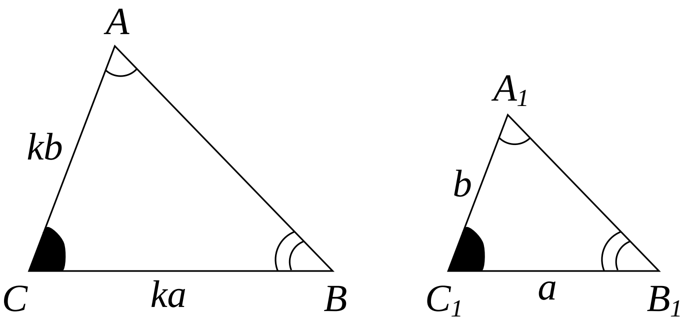
2. $S_{\Delta MBC}=\frac{1}{2}MC\cdot h_B=\frac{1}{2}nx\cdot h_B$

$S_{\Delta MKC}=\frac{1}{2}MC\cdot h_K=\frac{1}{2}nx\cdot h_K$, тогда

$S_{\Delta BKC}=\frac{1}{2}nx\cdot h_B-\frac{1}{2}nx\cdot h_K=\frac{1}{2}nx(h_B-h_K)$.

Из 1) и 2) следует, что $\frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta KBC}}=\frac{m}{n}$.

Ключевая задача 10. *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*



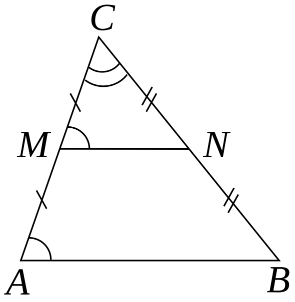
Доказательство:

1.$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$; $k-$ коэффициент пропорциональности. $\angle A=A_1$; $\angle B=B_1$; $\angle C=\angle C_1$.

2. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\frac{ka\cdot kb}{a\cdot b}=k^2$ (Площади треугольников, имеющих общий угол, пропорциональны произведениям сторон, заключающих этот угол).

Данное утверждение справедливо и для подобных многоугольников, так как их можно разбить на соответственно подобные треугольники.

Ключевая задача 11. *Средняя линия треугольника площади S отсекает от него треугольник площади* $\frac{1}{4}S$.



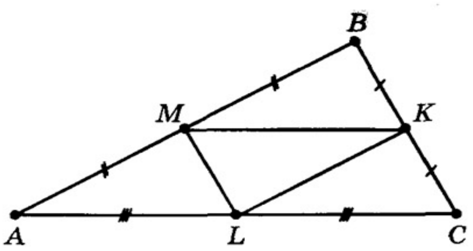
Доказательство:

1. Пусть $S_{\Delta ABC} = S, MN -$ средняя линия.

2. $\Delta ABC \backsim \Delta MCN \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MCN}} = k^2 = 4; k = 2.$

$$S_{\Delta MCN} = \frac{S_{\Delta ABC}}{4} = \frac{1}{4}S.$$

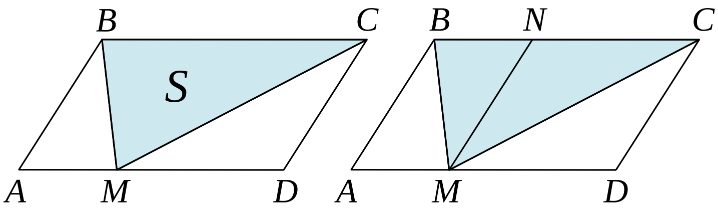
Ключевая задача 12.*Средние линии треугольника разделяют его на четыре равновеликих треугольника.*



$S_{AML}=S_{MBK}=S_{KCL}=S_{MKL}$

1.2. Пропорциональность и площадь параллелограмма

Ключевая задача 13. *На стороне AD взята точка M.* $S_{\Delta BMC} = S$. *Доказать, что* $S_{ABCD} = 2S$



Доказательство:

1. Проведем через точку *M* прямую, параллельную стороне *AB*.

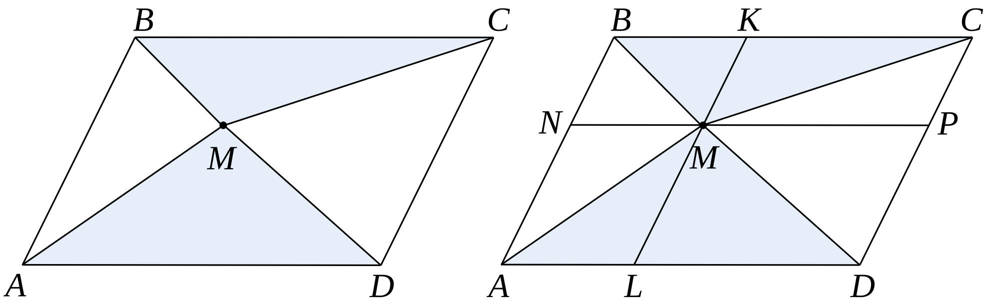
2. $\Delta ABM = \Delta NMB \Rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta NMB}$.

3. $\Delta MNC = \Delta MCD \Rightarrow S_{\Delta MNC} = S_{\Delta MCD}$.

4. $S_{\Delta MCD} = S$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta BMN} + 2S_{\Delta MNC} = 2(S_{\Delta BMN} + S_{\Delta MNC}) = 2S_{\Delta BMC} = 2S$.

$S_{ABCD} = 2S$.

Ключевая задача 14. *Точка M взята внутри параллелограмма и соединена со всеми его вершинами. Площадь заштрихованной части параллелограмма равна S. Доказать, что площадь параллелограмма равна 2S.*



Доказательство:

1. Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам параллелограмма.

2. $NBKM$ − параллелограмм $\Rightarrow S_{\Delta NBM} = S_{\Delta BKM}$;

$KMPC$ − параллелограмм $\Rightarrow S_{\Delta CMP} = S_{\Delta CMK}$;

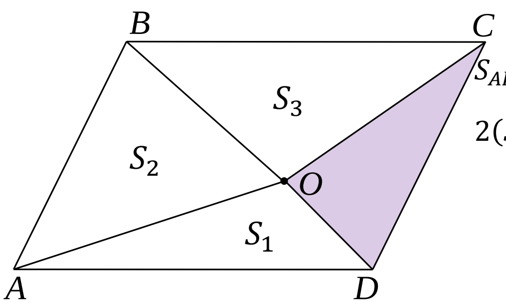
$LMPD$ − параллелограмм $\Rightarrow S_{\Delta LMD} = S_{\Delta DMP}$;

$ANML$ − параллелограмм $\Rightarrow S_{\Delta ANM} = S_{\Delta AMD}$.

2. $S_{з.ч.} = S \Rightarrow S_{ABCD} = 2S$.

Ключевая задача 15. $ABCD$ − *параллелограмм. O – произвольная точка.*

Доказать: $S_{\Delta OCD} = S_1 + S_3 - S_2$.



Доказательство:

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_{\Delta COD}$;

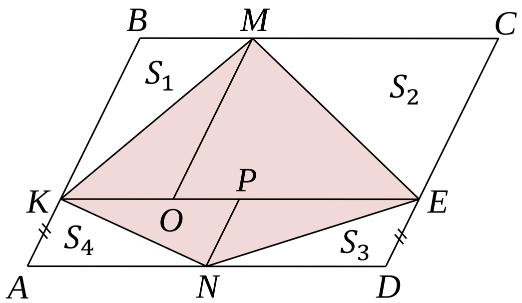
$2(S_1 + S_3) = S_1 + S_2 + S_3 + S_{\Delta COD}$;

$S_{\Delta COD} = S_1 + S_3 - S_2$.

Ключевая задача 16. $ABCD$ *– параллелограмм.* $AK = DE$.

Доказать: $S_{MKNE} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Доказательство:



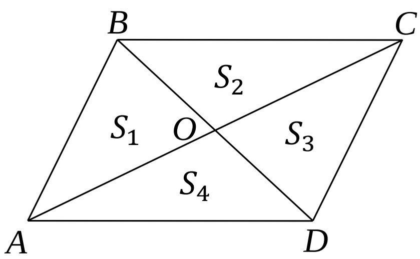
1. $MO \| AB$; $NP \| AB$.

2. $S_{\Delta KMO} = S_1$; $S_{\Delta MOE} = S_2$; $S_{\Delta NPE} = S_3$; $S_{\Delta KON} = S_4$.

Складывая последние равенства, получим: $S_{MKNE} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Ключевая задача 17. *Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликие части.*

Доказательство: Точка *O* – точка пересечения диагоналей.



1. $\Delta ABC = \Delta ACD$ (по 3$^{\underline{м}}$ сторонам) $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$ (равные фигуры имеют равные площади).

2. ΔABC; BO – медиана $\Rightarrow S_{AOB} = S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Leftrightarrow S_1 = S_2$.

3. ΔADC; OD – медиана $\Rightarrow S_{DOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} S_{ADC} \Leftrightarrow S_3 = S_4$.

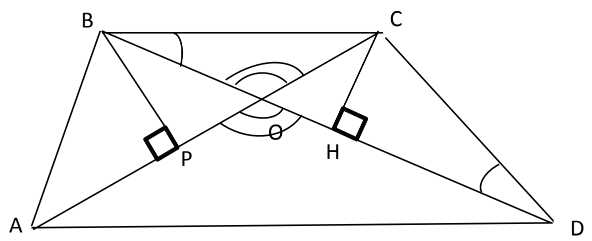
4. Так как $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Вывод: Диагонали параллелограмма делят его на 4 равновеликие части.

1.4.Пропорциональность и подобие в трапециях

Ключевая задача 18.(*Свойство треугольников, на которые разбивается трапеция ее диагоналями)*

Диагонали трапеции разбивают ее на 4 треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.



Доказательство:

$\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам (I признак подобия) <u>Докажем вторую часть утверждения</u>

Треугольники BOC и COD имеют общую высоту, если принять за их основания отрезки OB и OD

Тогда $\frac{S_{BOC}}{S_{COD\cdot COD}} = \frac{\frac{1}{2}BO*CH}{\frac{1}{2}OD*CH} = \frac{BO}{OD} = k => S_{COD} = \frac{1}{k} * S_{BOC}$

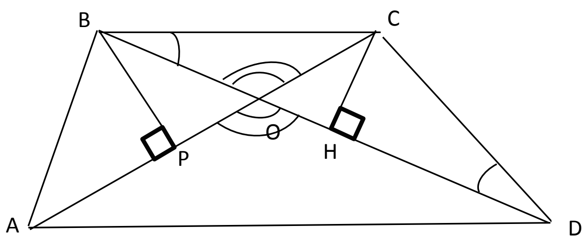
Отформатировано: Шрифт: 14 пт, русский

Треугольники BOC и AOB имеют общую высоту, если принять за их основания отрезки CO и OA

Тогда $\frac{S_{BOC}}{S_{\mathrm{AOB}}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{CO}*\mathrm{BP}}{\frac{1}{2}\mathrm{AO}*\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{AO}} = k => S_{\mathrm{AOB}} = \frac{1}{k} * S_{BOC}$. Из этих двух предложений следует, что $S_{COD} = S_{AOB}$.

Ключевая задача 19.(*Связь между площадями треугольников, на которые разбивается трапеция ее диагоналями)*

О-точка пересечения диагоналей трапеции ABCD с основаниями BC и AD.



Пусть $S_{BOC} = S_1$ и $S_{AOD} = S_2$. Доказать: $\boldsymbol{S_{ABCD}}$=$\left(\sqrt{\boldsymbol{S_1}} + \sqrt{\boldsymbol{S_2}}\right)^{\mathbf{2}}$

Доказательство:

$\Delta \mathrm{BOC} \sim \Delta AOD => \frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{S_1}{S_2} = k^2 =>$

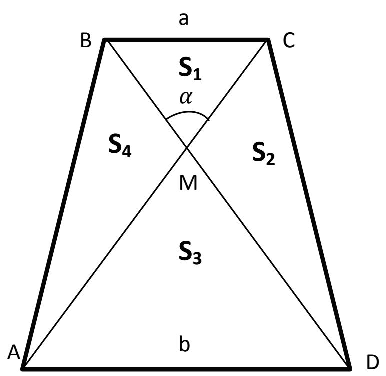
$\frac{BO}{OD} = k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}; S_{COD} = \frac{1}{k} * S_{BOC} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} * S_1 = \sqrt{S_1 * S_2}$

$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2S_{COD}$$

$$\boldsymbol{S_{ABCD}} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 * S_2} = \left(\sqrt{\boldsymbol{S_1}} + \sqrt{\boldsymbol{S_2}}\right)^{\boldsymbol{2}}.$$

Наличие и параллельность сторон в трапеции порождает ряд других интересных свойств, связанных с площадями.

Ключевая задача 20.



$$\frac{\boldsymbol{S_1}}{\boldsymbol{S_2}} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2}} \text{ т. к } \Delta BMC \sim \Delta AMD$$

1) $S_2 = S_4$

2) $S_2 = \sqrt{S_1 * S_3}$ т.к

$$S_1 = \frac{1}{2} BM * MC * \sin\alpha$$

$$S_3 = \frac{1}{2} AM * MD * \sin\alpha,\ \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$S_1 S_3 = \frac{1}{4} AM * BM * MC * MD * \sin^2\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} AM * BM * \sin\alpha,\ S_4 = \frac{1}{2} CM * MD * \sin\alpha$$

$$S_2 S_4 = \frac{1}{4} AM * BM * MC * MD * \sin^2\alpha => \boldsymbol{S_1 S_3 = S_2 S_4}$$

$$\boldsymbol{S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 * S_3}}$$

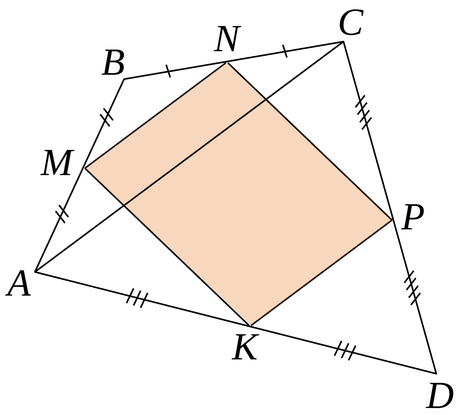
1.4. Пропорциональность при вычислении площадей произвольных многоугольников

Бимедианы четырехугольника – это отрезки, соединяющие середины противоположных сторон.

Одна из основных теорем о бимедианах и площадях фигур принадлежит французскому механику и инженеру Пьеру Вариньону (1654-1722), написавшему учебник по элементарной геометрии, в котором эта теорема впервые и появилась.

- <u>Теорема Вариньона.</u> *Четырехугольник, образованный путем последовательного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограммом и его площадь равна половине площади данного четырехугольника.*

Доказательство:



1. $\Delta ABC, MN -$ средняя линия, значит $MN \| AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

2. $\Delta ADC, PK -$ средняя линия, значит $PK \| AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$.

3. Из 1. И 2. Следует, что $MNPK -$ параллелограмм.

4. $\Delta MBN \backsim \Delta ABC \Rightarrow S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$;

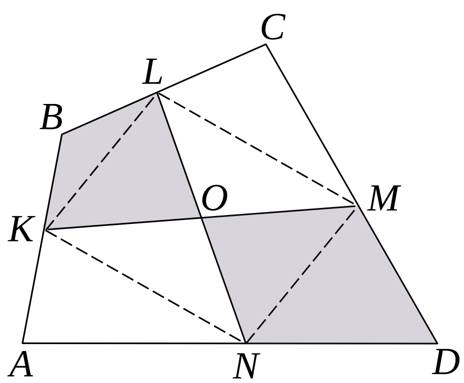
$\Delta KDP \backsim \Delta ACD \Rightarrow S_{KDP} = \frac{1}{4}S_{ACD}$.

Складывая последние два равенства, получим: $S_{MBN} + S_{KDP} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

5. $\left.\begin{array}{l} \Delta NCP \backsim \Delta BCD \Rightarrow S_{NCP} = \frac{1}{4}S_{BDC}; \\ \Delta AMK \backsim \Delta ABD \Rightarrow S_{AMK} = \frac{1}{4}S_{ABD}; \end{array}\right\} \Rightarrow S_{NCP} + S_{AMK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Значит, $S_{MNPK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

- Следствия из теоремы:



1. Параллелограмм Вариньона является ромбом, когда в исходном четырехугольнике диагонали равны и бимедианы перпендикулярны.

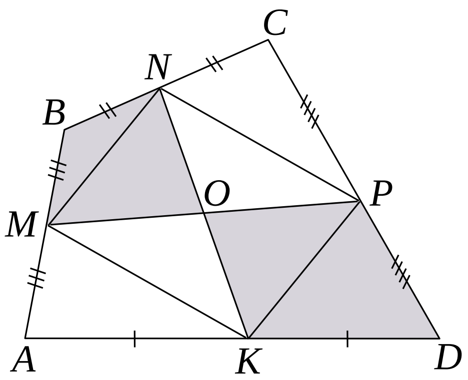
2. Параллелограмм Вариньона является прямоугольником, когда в исходном четырехугольнике диагонали перпендикулярны и бимедианы равны.

3. Параллелограмм Вариньона является квадратом, когда в исходном

четырехугольнике диагонали равны и перпендикулярны, бимедианы равны и перпендикулярны.

Ключевая задача 20. *Суммы площадей накрест лежащих четырехугольников, образованных пересечением бимедиан выпуклого четырехугольника равны.*

Доказательство:



1. $S_{MBN} + S_{KPD} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{BCD} + \frac{1}{4}S_{ABD} = S_{NCP} + S_{AMK}$.

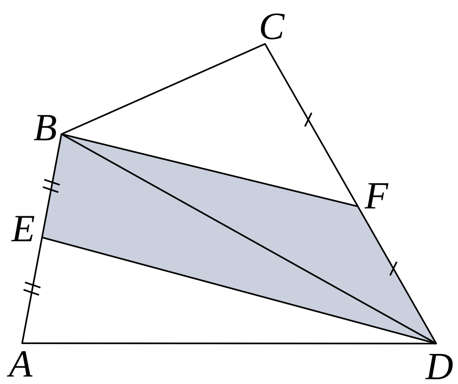
2. $MNPK$ – параллелограмм. Диагонали делят его на 4 равновеликих треугольника. $S_{MNO} = S_{NOP} = S_{KOP} = S_{MOK}$.

3. $(S_{MBN} + S_{MNO}) + (S_{KPD} + S_{OKP}) = (S_{NCP} + S_{NOP}) + (S_{AMK} + S_{MOK})$.

$S_{MBNO} + S_{KOPD} = S_{NCPO} + S_{KAMO}$.

Ключевая задача 21. $\boldsymbol{S_{ABCD} = 2S_{EBFD} \Leftrightarrow S_{EBFD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}}$.

Доказательство:



1. Соединим точки B и D.

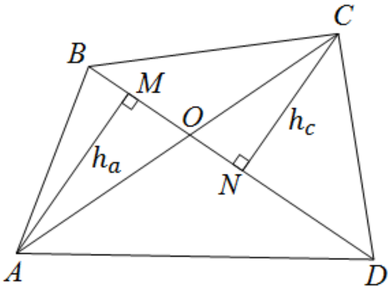
2. $\Delta ABD, DE$ – медиана $\Rightarrow S_{BED} = \frac{1}{2}S_{ABD}$ (медиана делит треугольник на два равновеликих).

3. $\Delta CBD, BF$ – медиана $\Rightarrow S_{BFD} = \frac{1}{2}S_{BCD}$.

4. $S_{BED} + S_{BFD} = \frac{1}{2}S_{ABD} + \frac{1}{2}S_{BCD}$; $S_{EBFD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Ключевая задача 22. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Доказать равенство $\boldsymbol{\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}}$.

Доказательство:



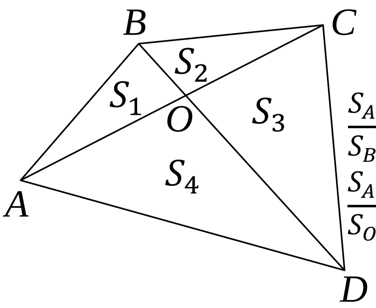
1. $\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{h_a}{h_c}$ (площади треугольников, имеющих одно и то же основание, пропорциональны высотам).

2. $\Delta AOM \backsim \Delta CON$ (по двум углам) $\Rightarrow$ $\frac{AO}{CO} = \frac{h_a}{h_c}$.

3. Из 1. И 2. Следует, что $\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AO}{CO}$.

Ключевая задача23. *Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (S_1 и S_3 — площади треугольников, прилежащих к противоположным сторонам четырехугольника). Доказать, что* $\boldsymbol{S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4}$.

Доказательство:



Пусть диагонали выпукло четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Тогда:

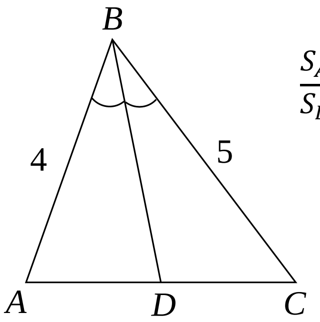
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \dfrac{AO}{OC} \Leftrightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{AO}{OC} \\ \dfrac{S_{AOD}}{S_{OCD}} = \dfrac{AO}{OC} \Leftrightarrow \dfrac{S_4}{S_3} = \dfrac{AO}{OC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} \Leftrightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$

Вывод: Результатом решения рассмотренных ключевых задач стали формулы, которые применяются при решении сложных геометрических задач. (Приложение)

Глава 2. Решение задач с использованием свойств площадей

2.1. Биссектриса, медиана, высота треугольника и отношение площадей

Задача 1. *В треугольнике ABC стороны $AB = 4$ см, BC=5 см, BD – биссектриса, Найти отношение площади треугольника ABD и площади треугольника ABC.*



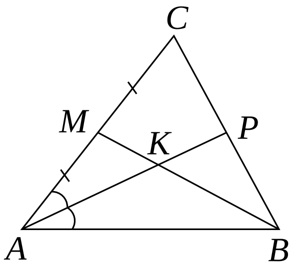
Решение:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AB \cdot BD}{BD \cdot BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}.$$

$S_{ABD} = 4$ части; $S_{BDC} = 5$ частей; $S_{ABC} = 9$ частей, значит $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Задача 2. *Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найти отношение площади четырехугольника KPCM к площади треугольника ABC.*



Решение: Обозначим $S_{ABC} = S$.

1. BM – медиана $\Rightarrow S_{ABM} = S_{MBC} = 0,5 \cdot S$ (медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника).

2. AP – биссектриса $\Rightarrow BP{:}PC = AB{:}AC = 1{:}3$ (свойство биссектрисы угла треугольника).

3. $S_{BAP}{:}S_{PAC} = 1{:}3$ (отношение площадей треугольников с равными высотами).

4. $S_{ABC} = S = 4 \cdot S_{BAP} \Rightarrow S_{BAP} = \frac{1}{4}S$, тогда $S_{PAC} = \frac{3}{4}S$.

5. $\Delta ABM; AK -$ биссектриса, $AM = \frac{AC}{2} = \frac{3 \cdot AB}{2} = 1,5 \cdot AB$.

$$\frac{BK}{KM} = \frac{AB}{1,5 \cdot AB} = \frac{2}{3}.$$

6. $S_{ABM} = S_{AMK} + S_{ABK}$

$S_{ABK}{:}S_{AMK} = 2{:}3$

$S_{ABM} = 0{,}5 \cdot S$

$S_{AMK} = 0{,}5 \cdot S : 5 \cdot 3 = 0{,}3 \cdot S$

$S_{BAK} = 0{,}5 \cdot S : 5 \cdot 2 = 0{,}2 \cdot S.$

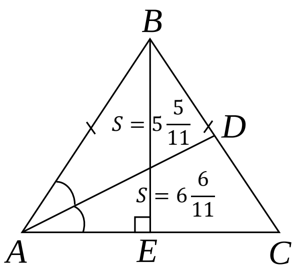
7. $S_{MCPK} = S_{ACP} - S_{AMK} = \frac{3}{4}S - 0{,}3 \cdot S = 0{,}45 \cdot S.$

8. $\frac{S_{MCPK}}{S_{ABC}} = \frac{0{,}45 \cdot S}{S} = \frac{9}{20}.$

Ответ: $\frac{9}{20}$.

Задача 3. *Равнобедренный треугольник рассечен биссектрисой угла при основании на два треугольника: площадь первого (прилежащего к основанию)* $6\frac{6}{11}$, *площадь второго* - $5\frac{5}{11}$. *Найти стороны равнобедренного треугольника.*

Решение:



1. $S_{ABC} = 6\frac{6}{11} + 5\frac{5}{11} = 12.$

2. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot AD}{AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$ (отношение площадей треугольников, имеющих равные углы)

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (свойство биссектрисы угла треугольника), следовательно, $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = 5\frac{5}{11} : 6\frac{6}{11} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}.$

3. Проведем $BE \perp AC$. Пусть $AB = 5x, AC = 6x \Rightarrow AE = 3x$, тогда $BE = 4x$ (по теореме Пифагора).

4. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 4x = 12x^2$

$S_{ABC} = 12; 12x^2 = 12, x = 1.$

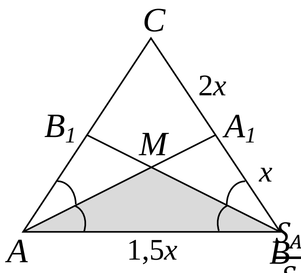
Значит, $AB = 5, AC = 6, BC = 5.$

Ответ: 5, 5, 6.

Задача 4. *В равнобедренном ΔABC боковые стороны BC и AC в два раза больше основания AB. Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке M. Какую часть ΔABC составляет площадь ΔAMB?*

Решение: Обозначим $S_{ABC} = 1$.

1. $\Delta ABC; AA_1 -$ биссектриса



$\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{1}{2}$.

2. $\frac{S_{ABA_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{ABA_1} = \frac{1}{3}$.

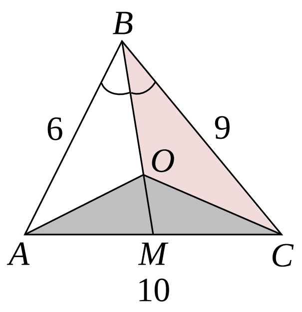
3. $\Delta ABA_1; BM -$ биссектриса

$$\frac{S_{A_1BM}}{S_{ABM}} = \frac{MA_1}{MA} = \frac{BA_1}{BA} = \frac{x}{1{,}5x} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{3}{5}S_{AA_1B} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Задача 5. *В ΔABC известно, что $AB = 6, BC = 9, AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. На отрезке BM взята точка O так, что BO:OM=3:1. Площадь какого из треугольников AOB, BOC или AOC является наименьшей?*

Решение: 1. $\Delta ABC; BM -$ биссектриса



$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.

2. $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{2}{5}S_{ABC}$.

3. $\frac{S_{AOB}}{S_{ABM}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{3}{4}S_{ABM} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{3}{10}S_{ABC}$.

4. $\frac{S_{BOC}}{S_{BMC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{BOC} = \frac{3}{4}S_{BMC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}S_{ABC} = \frac{9}{20}S_{ABC}$.

5. $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AOC} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

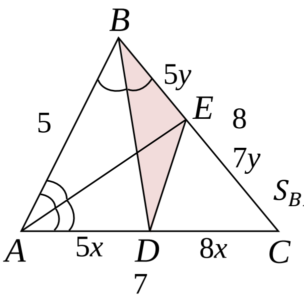
Следовательно, наименьшую площадь имеет ΔAOC.

Ответ: ΔAOC.

Задача 6. *В* ΔABC *проведены биссектрисы BD и AE. Найти отношение площадей треугольников* ABC *и* BDE, *если* $AB = 5, BC = 8, AC = 7$.

<u>Решение:</u> 1. $\Delta ABC; BD -$ биссектриса.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8}.$$



2. $\frac{S_{BDC}}{S_{ABC}} = \frac{8}{13} \Rightarrow S_{BDC} = \frac{8}{13} S_{ABC}$.

3. $\frac{S_{DEC}}{S_{BDC}} = \frac{7}{12} \Rightarrow S_{DEC} = \frac{7}{12} S_{BDC} = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{13} S_{ABC} = \frac{14}{39} S_{ABC}$.

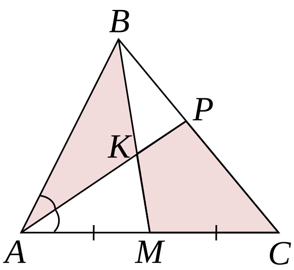
$$S_{BDE} = \frac{5}{12} S_{BDC} = \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{13} S_{ABC} = \frac{10}{39} S_{ABC}.$$

4. $\frac{S_{ABC}}{S_{BDE}} = \frac{39}{10}$.

Ответ: $\frac{39}{10}$.

Задача 7. *Медиана* BM *и биссектриса* AP ΔABC *пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найти отношение площади* ΔABK *к площади четырехугольника* $KPCM$.

<u>Решение:</u> Обозначим $S_{ABC} = S$.



1. $BM -$ медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{ABM} = S_{CMB} = \frac{1}{2} S$.

2. AP – биссектриса ΔABM. По свойству биссектрисы $\frac{KM}{BK} = \frac{AM}{AB} = \frac{1.5}{1} = 1{,}5$.

3. ΔABK и ΔAKM имеют общую высоту $\Rightarrow \frac{S_{AMK}}{S_{ABK}} = 1{,}5 \Rightarrow$ $S_{AMK} = 1{,}5 \cdot S_{ABK}$.

4. $S_{AMK} + S_{ABK} = S_{ABM} = \frac{1}{2} S$

$$1{,}5 \cdot S_{ABK} + S_{ABK} = \frac{1}{2} S; \;\; 2{,}5 \cdot S_{ABK} = \frac{1}{2} S \Rightarrow S_{ABK} = \frac{1}{5} S.$$

5. AP – биссектриса ΔABC. По свойству биссектрисы $\frac{AC}{AB} = \frac{CP}{BP} = 3:1$.

Тогда $\frac{S_{APC}}{S_{ABP}} = \frac{AP \cdot AC}{AB \cdot AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_{APC} = 3S_{APB}$.

6. $S_{APB} + S_{APC} = S_{ABC}$

$$S_{ABP} + 3S_{ABP} = S \Rightarrow 4S_{ABP} = S \Rightarrow S_{ABP} = \frac{1}{4}S.$$

7. $S_{BKP} = S_{ABP} - S_{ABK} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{5}S = \frac{1}{20}S$.

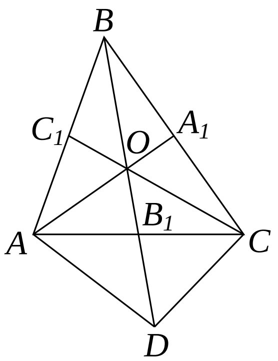
8. $S_{KPCM} = S_{BMC} - S_{BKP} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{20}S = \frac{9}{20}S$.

9. $\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{1}{5}S : \frac{9}{20}S = \frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Задача 8. *Медианы треугольника 3, 4 и 5. Найти площадь треугольника.*

Решение:



1. Пусть $AA_1 = 3, BB_1 = 4, CC_1 = 5$, тогда $AO = 2, CO = \frac{10}{3}, B_1O = \frac{4}{3}$.

2. $S_{ABC} = 3S_{AOC}$.

3. Достроим треугольник AOC до параллелограмма, отложив на прямой BB_1 от точки B_1 отрезок B_1D, равный B_1O.

4. $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot AD \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} \cdot \sin A = \frac{10}{3}\sin A$.

5. По теореме косинусов $OD^2 = AO^2 + AD^2 - 2AO \cdot AD \cdot \cos A$

$$\cos A = \frac{AO^2 + AD^2 - OD^2}{2AO \cdot AD} = \frac{4 + \frac{100}{9} - \frac{64}{9}}{2 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3}} = \frac{4+4}{\frac{40}{3}} = 8 : \frac{40}{3} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}.$$

6. $\sin A = \frac{4}{5}$.

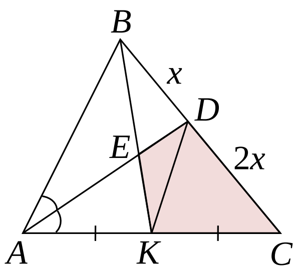
7. $S_{AOD} = \frac{10}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{3}$.

8. $S_{ABC} = 3S_{AOC} = 3S_{AOD} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8.$

Ответ: 8.

Задача 9. *Площадь треугольника ABC равна 60. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 1 : 2$. Найти площадь четырехугольника $EDCK$.*

<u>Решение:</u>



1. BK – медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{ABK} = S_{KBC} = 30.$

2. $BD : CD = 1 : 2 \Rightarrow S_{ABD} = 20, S_{ADC} = 40.$

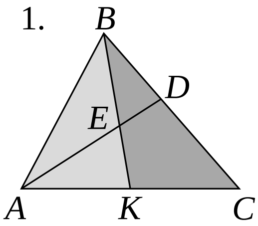
3. Проведем отрезок $KD. DK$ – медиана $\Delta ADC \Rightarrow S_{ADK} = S_{DKC} = 20.$

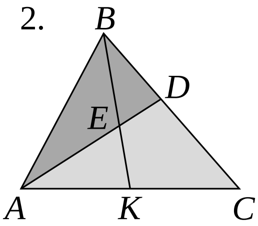
4. $S_{BDK} = S_{BKC} - S_{DKC} = 30 - 20 = 10.$

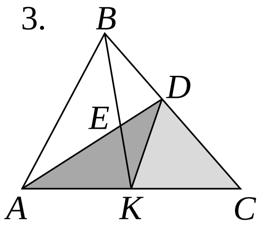
5. $S_{ABD} = S_{ADK} = 20,\ AD -$ общее основание $\Rightarrow$ равны и их высоты ($h_b = h_k$).

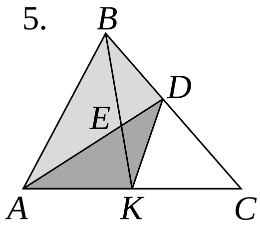
6. $h_b -$ высота и $\Delta BDE;\ h_k -$ высота $\Delta EDK; ED -$ общее основание.

Значит $S_{EDCK} = S_{EDK} + S_{DKC} = 5 + 20 = 25.$

1.


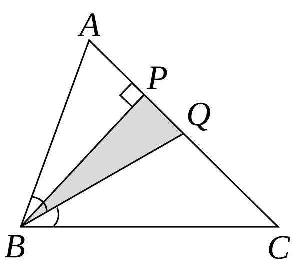
2.


3.


5.


Ответ: 25.

Задача 10. *В треугольнике ABC три стороны: $AB = 25, BC = 30$ и $AC = 28$. Найти часть площади этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.*



<u>Решение:</u> Пусть BP и BQ – высота и биссектриса данного треугольника ABC. По формуле Герона

$S_{ABC} = \sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = 14 \cdot 6 \cdot 4 = 336.$

С другой стороны, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BP$. Поэтому $BP = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 336}{28} = 24$.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AQ}{QC} = \frac{AB}{BC} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$.

Поэтому $AQ = \frac{13}{28} AC = \frac{13}{28} \cdot 28 = 13$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника APB находим, что $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{26^2 + 24^2} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10$.

Следовательно, $PQ = AQ - AP = 13 - 10 = 3, S_{BPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot BP = \frac{3 \cdot 24}{2} = 36$.

Ответ: 36.

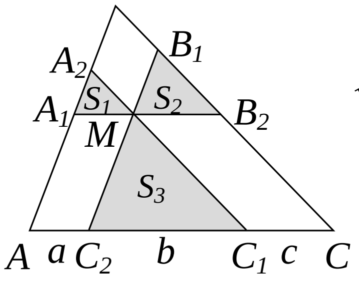
Вывод: При решении задач были использованы:

- свойство биссектрисы угла треугольника;
- свойство медиан;
- отношение площадей треугольников, имеющих равный угол;
- отношение площадей треугольников с общим основанием или общей высотой.

2.2 Отношение площадей подобных треугольников

Задача 11. *Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведена прямая, параллельная сторонам треугольника. При этом площади трех образовавшихся треугольников с вершиной M равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника ABC.*

<u>Решение:</u> Так как $\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2M$, $\Delta ABC \sim \Delta B_1B_2M$, $\Delta ABC \sim \Delta C_1C_2M$, то их площади относятся как квадраты соответствующих элементов.



Пусть $S_{ABC} = S, AC_2 = a, C_1C_2 = b, C_1C = c$.

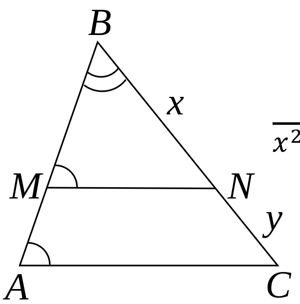
$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{a}{a+b+c}; \ \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{b}{a+b+c}; \ \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{c}{a+b+c}.$$

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1;\ \frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=1\Rightarrow\Rightarrow S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$$

Ответ: $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Задача12. *Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1, считая от вершины. В каком отношении она делит боковые стороны?*

Решение: $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ и $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}}=\frac{2}{3}$.



Пусть $BN=x,\ NC=y$. Тогда $\left(\frac{x}{x+y}\right)^2=\frac{2}{3}$.

$$\frac{x^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{2}{3}, x^2-4xy-2y^2=0, \left(\frac{x}{y}\right)^2-4\left(\frac{x}{y}\right)-2=0.$$

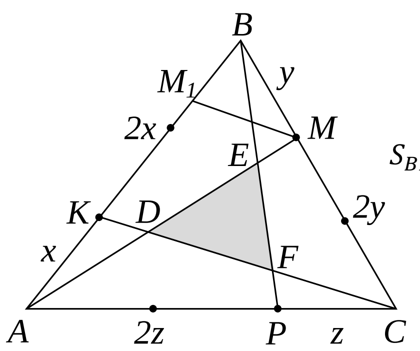
Замена: $\frac{x}{y}=t>0,\ t^2-4t-2=0, t_1=2+\sqrt{6}, t_2=2-\sqrt{6}$ (не подходит).

$$\frac{x}{y}=2+\sqrt{6}.$$

Ответ: $(2+\sqrt{6}):1$.

Задача13. *На сторонах AB, BC и CA взяты точки K, M и P так, что $AK:AB=BM:BC=CP:CA=1:3$. Доказать, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AM, BP и CK, составляет $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC.*

Решение: Пусть $S_{ABC}=S$.



1. $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{ABM}=\frac{1}{3}S$ (отношение площадей с равными высотами).

$$S_{BPC}=\frac{1}{3}S;\ S_{AKC}=\frac{1}{3}S.$$

2. Проведем $MM_1 \| CK$. По теореме Фалеса:

$$BM_1 = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}AB = \frac{2}{9}AB.$$

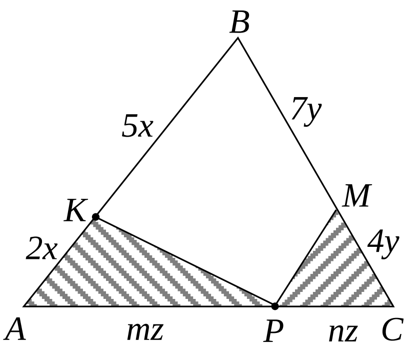
3. $\Delta ADK \sim \Delta AMM_1 \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{AK}{AM_1} = \frac{AK}{AB - MB_1} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{7}{9}AB} = \frac{3}{7}$.

4. $\frac{S_{ADK}}{S_{ABM}} = \frac{AD \cdot AK}{AM \cdot AB} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \Rightarrow S_{ADK} = \frac{1}{7}S_{ABM} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{1}{21}S$.

5. $S_{BEM} = \frac{1}{21}S$; $S_{PEC} = \frac{1}{21}S \Rightarrow S_{DEF} = S - \left(\frac{1}{3}S - \frac{1}{21}S\right) \cdot 3 = \frac{1}{7}S$.

Задача14. *На сторонах AB, BC и CA ΔABC взяты точки K, M и P так, что $AK:KB = 2:5, BM:MC = 7:4$ и что треугольники AKP и CMP равновелики.*

Найти: $CP:PA$.



Решение: 1. $\frac{S_{AKP}}{S_{ABC}} = \frac{AK \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{2 \cdot mz}{7(m+n)z} = \frac{2m}{7(m+n)}$ (свойство площадей треугольников, имеющих по равному углу).

2. $\frac{S_{MPC}}{S_{ABC}} = \frac{MC \cdot CP}{BC \cdot AC} = \frac{4 \cdot n}{11(m+n)}$.

3. $S_{AKP} = S_{MPC} \Rightarrow \frac{2m}{7(m+n)} = \frac{4n}{11(m+n)} \Rightarrow \frac{m}{7} = \frac{2n}{11} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{11}{14}$.

Ответ: $\frac{11}{14}$.

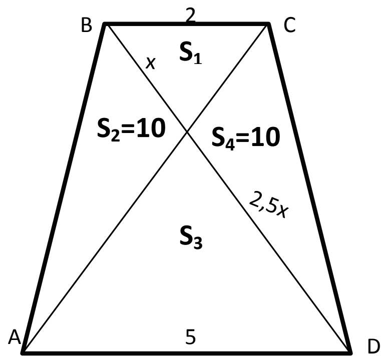
Вывод: при решении задач использовались следующие ключевые задачи:

- Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.
- Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих эти углы.
- Теорема Фалеса.
- Отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению их оснований.

2.3.Пропорциональность и площадь трапеции

Задача 15. *Длины оснований трапеции равны 2 и 5. Площадь треугольника, прилегающего к одной из боковых сторон равна 10. Найдите площадь всей трапеции.*

Отформатировано: Шрифт:



Решение:

По свойству площадей треугольников получаем: $S_2S_4=S_1S_3 \Rightarrow S_1S_3=100$

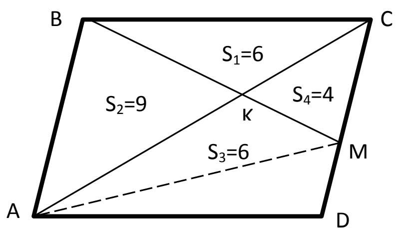
$$S_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 S_3 \Rightarrow S_1S_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 {S_3}^2 = 100$$

$$S_3 = 10 : \frac{2}{5} = 25, \text{тогда } S_1 = 4$$

$$S_{ABCD} = 10 + 10 + 4 + 25 = 49$$

Ответ: 49

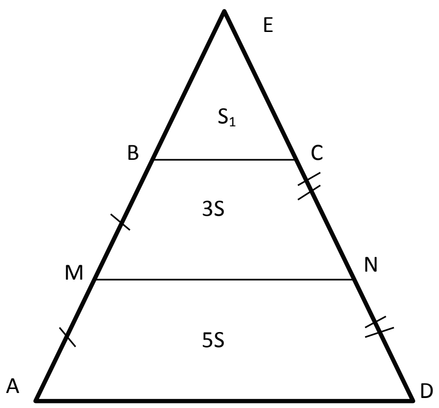
Задача 16. *Точка М лежащая на стороне параллелограмма ABCD, соединена с вершиной В. Диагональ АС пересекает отрезок ВМ в точке К. Площадь ΔКВС равна 6, площадь ΔКМС равна 4. Найти площадь исходного параллелограмма.*



Решение: 1) ABCM – трапеция. По свойству площадей: $S_1S_3 = S_2S_4$; $S_1 = S_3 = 6$; $4S_2=36$, $S_2=9$ => $S_{ABC}=S_{ADC}=15$; $S_{ABCD}=15+15=30$.

Ответ: 30

При продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.



Задача 17. *Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти блины оснований.*

Решение:

1) Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения

2) Пусть S – площадь трапеции ABCD, тогда S_{AMND}=5S, S_{MBCN}=3S
3) Пусть S_{BCE}=S_1; BC=a; AD=b

$\Delta AED \sim \Delta BEC => \frac{8S+S_1}{S_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$,

$$8\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

$\Delta MEN \sim \Delta BEC => \frac{3S+S_1}{S_1} = \left(\frac{10}{a}\right)^2, 3\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{100}{a^2}$

8*$\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{b^2}{a^2}$

3*$\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{100}{a^2}$

Исключив $\frac{S}{S_1}$, получим: $\frac{-3b^2}{a^2} + \frac{800}{a^2} = 5$; $\frac{800-3b^2}{a^2} = 5$, но $\frac{a+b}{2} = 10 => a == 20 - b$

800 - 3$b^2 = 5(20-b)^2$

800 – 3$b^2 = 5(400 - 40b + b^2)$

$-8b^2 + 200b - 1200 = 0$

$8b^2 - 200b + 1200 = 0$

$b^2 - 25b + 150 = 0$

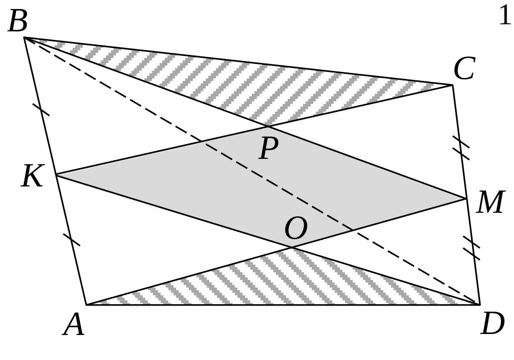
b=15, a=5

Ответ: 5;15

2.4. Площадь выпуклого многоугольника

Задача 18. *Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Середины сторон AB и CD обозначены соответственно через K и M, точка пересечения отрезков BM и CK – через P, точка пересечения отрезков AM и DK – через O. Докажите, что* $S_{MOKP} = S_{BPC} + S_{AOD}$.

Решение: Проведем диагональ *BD*.



1. *DK* – медиана $\Delta ADB \Rightarrow S_{ADK} = \frac{1}{2}S_{ABD}$.
2. *BM* – медиана $\Delta DBC \Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{BCD}$.
3. $S_{ADK} + S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABD} + \frac{1}{2}S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

4. AM – медиана $\Delta ADC \Rightarrow S_{AMK} = \frac{1}{2}S_{ADC}$.

5. KC – медиана $\Delta ACB \Rightarrow S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

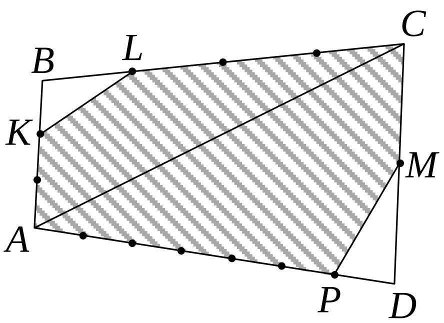
6. $S_{AMD} + S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{ADC} + \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

7. $S_{ADK} + S_{BMC} + S_{AMD} + S_{BKC} = S_{ABCD}$.

8. $(S_{AKO} + S_{AOD}) + (S_{BPC} + S_{MPC}) + (S_{AOD} + S_{MOD}) + (S_{BPC} + S_{BKP}) = S_{OKPM} + S_{BPC} + S_{MPC} + S_{AOD} + S_{MOD} + S_{AKO} + S_{BKP}, \Rightarrow S_{OKPM} = S_{BPC} + S_{AOD}$.

Задача19. *На сторонах выпуклого четырехугольника ABCD, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD, P на AD. При этом* $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \frac{CM}{MD} = 1, \frac{DP}{PA} = \frac{1}{5}$. *Найти площадь шестиугольника AKLCMP.*

<u>Решение:</u>



1. $S_{KBL} = \frac{1}{2}BK \cdot BL \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AB \cdot \frac{1}{4}BC \cdot \sin B = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

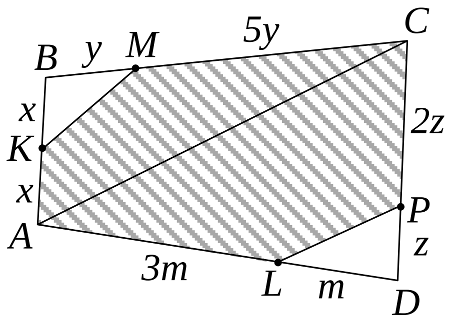
2. $S_{\Delta PDM} = \frac{1}{2}PD \cdot MD \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}AD \cdot \frac{1}{2}DC \cdot \sin D = \frac{1}{12}S_{\Delta ACD}$.

3. $S_{AKLCMP} = 1 - \frac{1}{12}S_{\Delta ABC} - \frac{1}{12}S_{\Delta ACD} = 1 - \frac{1}{12}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}) = 1 - \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{11}{12}$.

Ответ: $\frac{11}{12}$.

Задача20. *Площадь выпуклого четырехугольника ABCD равна 1. На сторонах* AB, BC, CD *и* DA *взяты точки* K, M, P *и* L *соответственно. Известно, что* K *– середина* $AB, BM: MC = 1: 5, CP: PD = 2: 1, DL: LA = 1: 3$. *Найдите площадь шестиугольника AKMCPL.*

<u>Решение:</u>



1. $\frac{S_{KBM}}{S_{ABC}} = \frac{x \cdot y}{2x \cdot 6y} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{KBM} = \frac{1}{12} S_{ABC}$.

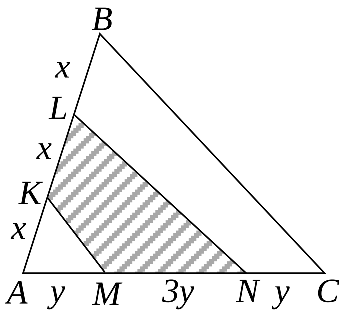
2. $\frac{S_{DLP}}{S_{ADC}} = \frac{z \cdot m}{3z \cdot 4m} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{DLP} = \frac{1}{12} S_{ADC}$.

3. $S_{AKMCPL} = 1 - \left(\frac{1}{12} S_{ABC} + \frac{1}{12} S_{ADC}\right) = 1 - \frac{1}{12} S_{ABCD} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Ответ: $\frac{11}{12}$.

Задача21. *Точки M и N расположены на стороне AC* ΔABC, *а точки K и L – на стороне AB, причем* $AM: MN: NC = 1: 3: 1$ *и* $AK = KL = LB$. *Известно, что площадь* ΔABC *равна 1. Найти площадь четырехугольника* $KLNM$.

<u>Решение:</u>



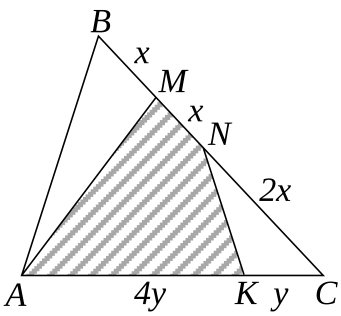
1. $\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{x \cdot y}{3x \cdot 5y} = \frac{1}{15} \Rightarrow S_{AKM} = \frac{1}{15}$.

2. $\frac{S_{AKN}}{S_{ABC}} = \frac{2x \cdot 4y}{3x \cdot 5y} = \frac{8}{15}$.

3. $S_{KLNM} = \frac{8}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.

Ответ: $\frac{7}{15}$.

Задача 22. *Точки M и N расположены на стороне* BC ΔABC, *а точка* K *– на стороне AC, причем* $BM: MN: NC = 1: 1: 2$ *и* $CK: AK = 1: 4$. *Известно, что площадь* ΔABC *равна 1. Найти площадь четырехугольника* $AMNK$.



<u>Решение:</u>

1. $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}$.

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{S_{\Delta CNK}}{S_{\Delta ANC}} = \frac{2x \cdot y}{2x \cdot 5y} = \frac{1}{5} \\ S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta CNK} = \frac{1}{5} S_{\Delta ANC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

3. $S_{AMNK} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}$.

Ответ: $\frac{13}{20}$.

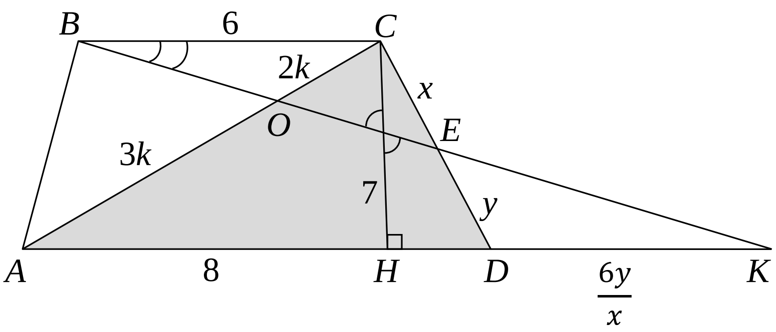
Вывод: В задачах использованы следующие свойства и утверждения:

- Отношение площадей треугольников с общим основанием или общей высотой.
- Свойства медианы и биссектрисы треугольника.
- Площадь треугольника через высоту и основание.
  Площадь фигуры равна сумме площадей фигур, на которых она разбита.

2.5. Теоремы Чевы, Менелая, Вариньона в задачах на отношение площадей.

Задача 23. *Высота трапеции ABCD равна 7, а длина оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении* $AO:OC = 3:2$. *Найдите площадь треугольника OEC.*

Решение:



Для решения задачи достаточно найти $S_{\Delta ACD}$ и отношение *CE* к *ED*.

1. Обозначим $CE = x, DE = y$. Пусть прямая *BE* пересекает прямую *AD* в точке *K*.

$\Delta BCE \sim \Delta KDE$ по двум углам.

Значит, $\frac{BC}{DK} = \frac{CE}{DE}$, откуда $DK = \frac{6y}{x}$. Прямая *BK* пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника *ACD*. По теореме Менелая:

$$\frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{DK}{KA} = 1, \qquad \frac{3k}{2k} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{\frac{6y}{x}}{8 + \frac{6y}{x}} = 1.$$

Пусть $\frac{y}{x} = t$, тогда $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{6t}{8+6t} = 1$, откуда $t = \frac{1}{6}$.

Итак, $\frac{x}{y} = \frac{6}{1}$, то есть $\frac{CE}{ED} = \frac{6}{1}$ или $CE = 6p, ED = p$.

2. $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CH (CH \perp AD), S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$.

3. Треугольники OCE и ACD имеют общий угол, значит, $\frac{S_{\Delta OCE}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{CO \cdot CE}{CA \cdot CD} = \frac{2k \cdot 6p}{5k \cdot 7p} = \frac{12}{35}$.

Тогда $S_{\Delta OCE} = \frac{12}{35} S_{\Delta ACD} = \frac{12}{35} \cdot 28 = \frac{48}{5}$.

Ответ: $\frac{48}{5}$.

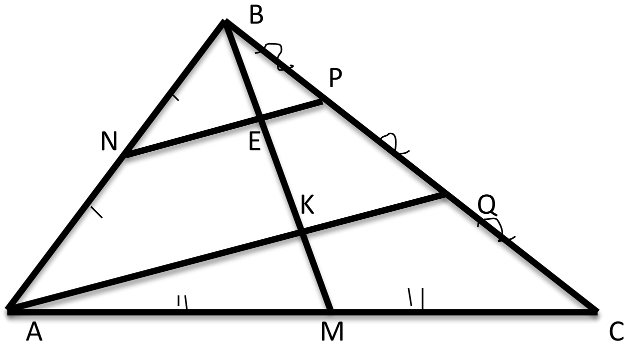
2.6. Параллельное проектирование и отношение площадей

Параллельное проектирование позволяет не только строить проекции фигур и пространственных тел, но ещё и решать задачи, связанные с нахождением отношения площадей. При этом используются свойства:

▪любой треугольник при помощи параллельного проектирования можно перевести в правильный;

▪при параллельном проектировании сохраняются отношения отрезков и площадей фигур.

Задача 24. *Дан треугольник ABC с площадью S. Точки M и N –середины его сторон AC и AB соответственно. Точки P и Q делят сторону BC на три равных отрезка так, что BP=PQ=QC. Найти площадь общей части четырехугольника ANPQ и треугольника BMC.*



Дано: ΔABC

$S_{ABC} = S$

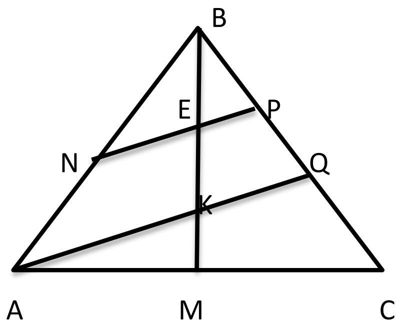
N и M – середины AB и AC

BP = PQ = QC

Найти: S_{EPQK}

Решение:

1) Спроектируем Δ_{ABC} в равносторонний. Но возьмем те же буквенные обозначения:



2) $\frac{S_{NBP}}{S_{ABC}} = \frac{NB*BP}{AB*BC} = \frac{1*1}{2*3} = \frac{1}{6}$ (площади треугольников с общим углом относятся друг к другу как Произведения сторон, содержащих общий угол)

1) AB = BC = CA = a => $NB = \frac{a}{2}$, $BP = \frac{a}{3}$, BE – биссектриса.
2) $\frac{S_{NBE}}{S_{EBP}} = \frac{NE}{EP} = \frac{NB}{BP} = \frac{a}{2} \div \frac{a}{3} = \frac{3}{2}$ (свойство треугольников, одна из сторон которых лежат на одной прямой и имеют общую высоту, приведенной к этой прямой)
3) $S_{BEP} = \frac{2}{5} S_{NBP} = \frac{2}{5} * \frac{1}{6} * S = \frac{1}{15} S$
4) $\frac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \frac{AB*BQ}{AB*BC} = \frac{1*2}{1*3} = \frac{2}{3}$ => $S_{ABQ} = \frac{2}{3} S$
5) $\frac{S_{ABK}}{S_{KBQ}} = \frac{AK}{KQ} = \frac{AB}{BQ} = \frac{a*3}{1*2a} = \frac{3}{2}$ ( )
6) $S_{KBQ} = \frac{2}{5} S_{ABQ} = \frac{2}{5} * \frac{2}{3} * S = \frac{4}{15} S$
7) $S_{EPQK} = S_{KBQ} - S_{EBP} = \frac{4}{15} S - \frac{1}{15} S = \frac{1}{5} S$

Ответ: $\frac{1}{5} S$

Заключение

Обучение математике происходит в процессе решения задач. Знание особых приёмов и подходов к решению позволяют решать их правильно, просто и оригинально. Тема учебно – исследовательской работы «Пропорциональность при вычислении площадей многоугольников» выбрана не случайно. Ключевые задачи планиметрии составляют основу для решения стереометрических задач. И те и другие ежегодно содержатся в заданиях ЕГЭ. В ходе работы решено большое количество задач разного уровня сложности. Это позволило осмыслить и создать целостное представление о пропорциональности при вычислении площадей многоугольников, усвоить на практике приобретённые знания.

Таким образом, цель работы достигнута. Выдвинутая гипотеза подтвердилась.

Практическая значимость:

•Знание приёмов и подходов к решению планиметрических задач на отношение пропорциональности площадей фигур позволяют успешно решать задачи ЕГЭ, конкурсные и олимпиадные задачи.

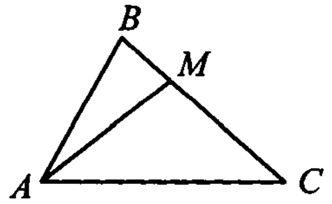
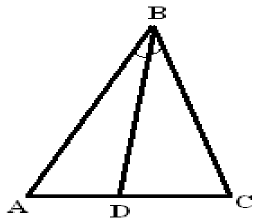
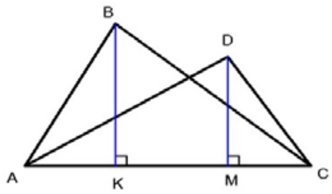
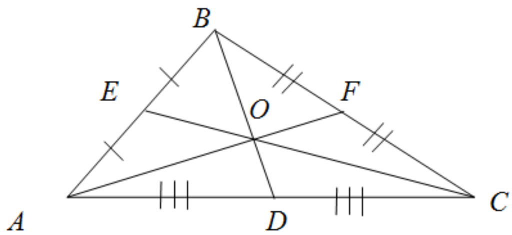
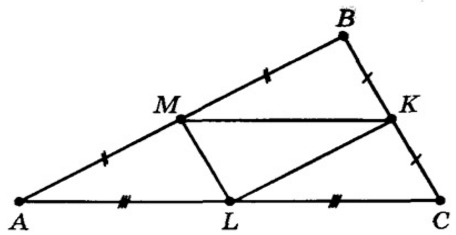
•Возможность использования материалов исследования, компьютерной презентации при подготовке к экзаменам одноклассниками.

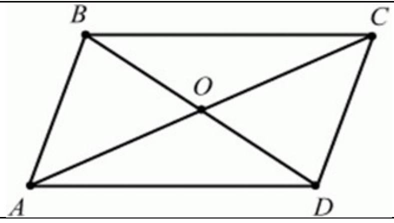
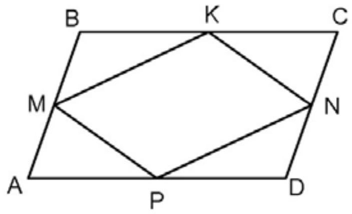
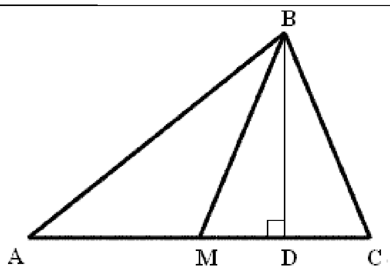
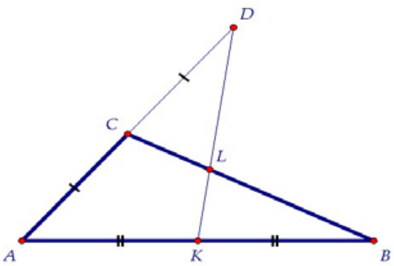
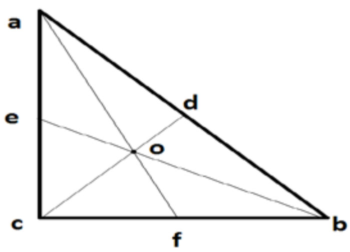
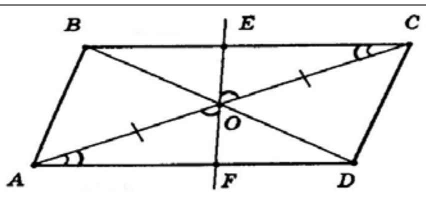
•Возможность продолжения темы при вычислении объёмов многогранников.

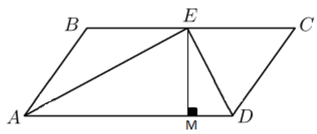
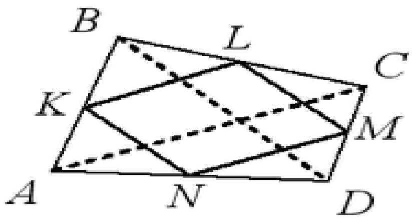
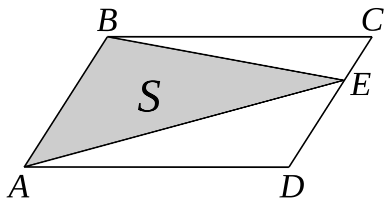
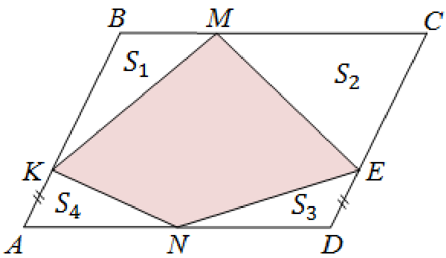
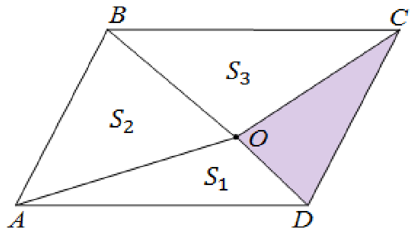
Список используемой литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Геометрия. Учебник для общеобразовательных учреждений. М: Провещение,2012.
2. Гордин Р.К., ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4.Геометрия. Планиметрия.М.:МЦНМО,2010.
3. Черняк А.А, ЕГЭ по математике. Геометрия. Практическая подготовка. СП.:БХВ-Петербург,2015.

Банк ключевых задач «Пропорциональность при вычислении площадей»

<table>
<tr>
<td>Дан треугольник ABC;
M - произвольная точка, принадлежащая BC,
Тогда
$\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}}=\frac{\frac{1}{2}*BM*h}{\frac{1}{2}*MC*h}=\frac{BM}{MC}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Дан треугольник ABC;
BD - биссектриса угла B,
Тогда
$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}}=\frac{\frac{1}{2}*AD*\sin\alpha*BD}{\frac{1}{2}*BC*\sin\alpha*BD}=\frac{AB}{BC}$,
но так же мы уже знаем, что
$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}}=\frac{AD}{DC}$ => $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Даны треугольники ABC и ADC;
AC – общее основание;
BK и DM- высоты,
Тогда
$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}*BK*AC}{\frac{1}{2}*DM*AC}=\frac{BK}{DM}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Дан треугольник ABC;
AF, BD, CE- медианы треугольника,
Тогда
$S_{AOB}=S_{BOC}=S_{COA}=\frac{1}{3}S_{ABC}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Дан треугольник ABC;
ML, LK, MK - средние линии,
Тогда
$S_{AML}=S_{MBK}=S_{KCL}=S_{MKL}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Дан параллелограмм ABCD; BD и AC – диагонали, Тогда $S_{AOB}=S_{BOC}=S_{COD}=S_{DOA}$	
Дан параллелограмм ABCD; M, K, N, P –середины сторон параллелограмма Тогда $S_{ABCD}=2S_{MKNP}$	
Даны треугольники ABM и MBC; BD – общая высота треугольников, Тогда $\frac{S_{ABM}}{S_{MBC}}=\frac{AM}{MC}$	
Даны треугольники ADK и ACB; Угол A – общий, Тогда $\frac{S_{ADK}}{S_{ACB}}=\frac{\frac{1}{2}*\sin a*AD*AK}{\frac{1}{2}*\sin a*AC*AB}=\frac{AD*AK}{AC*AB}$	
Дан треугольник ABC; AF, CD, BE – прямые, проведенные из вершин, Тогда $\frac{S_{AOC}}{S_{AOB}}=\frac{CF}{FB}$	
Дан параллелограмм ABCD и прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма ABCD Тогда $S_{BEO} = S_{OFD}$ $S_{AOF} = S_{EOC}$	

Дан параллелограмм ABCD и треугольник AED AD- общая сторона EM- общая высота Тогда $S_{ABCD} = 2S_{AED}$	
Дан произвольный четырехугольник ABCD K, M, L, N – середины сторон Тогда KLMN- параллелограмм и P_{KLMN} = AC+BD	
Дан ABCD – параллелограмм. E – произвольная точка. Тогда $S_{\Delta ABC} = S \Rightarrow S_{ABCD} = 2S.$	
Дан ABCD – параллелограмм. AK=ED; Тогда $S_{MKNE} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$	
Дан ABCD – параллелограмм. O – произвольная точка. Тогда $S_{\Delta OCD} = S_1 + S_3 - S_2$	
Дан произвольный четырехугольник BE=EA ; CF=FD Тогда $S_{ABCD} = 2S_{EBFD}$