Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Метод неопределенных коэффициентов

Рассада Софья Леонидовна,

11 класс, МБОУ "Гимназия № 3", г. Кудымкар,

Нечаева Татьяна Юрьевна,

учитель математики

МБОУ "Гимназия № 3", г. Кудымкар.

Пермь. 2016

Содержание.

Введение.

XV и XVI столетия вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения». Для нее характерен расцвет науки и культуры, связанный с глубокими социальными преобразованиями.

Итальянские математики XVI в. сделали крупнейшее математическое открытие. Они вывели формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней ***методом неопределенных коэффициентов***.

Что такое метод неопределенных коэффициентов?

Методом неопределенных коэффициентов называют метод, применяемый для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее известен.

Суть этого метода состоит в том, что заранее предполагается вид множителей – многочленов, на которые разлагается данный многочлен.

На уроках алгебры мы познакомились с методом неопределенных коэффициентов при изучении теоремы Виета. Меня это заинтересовало. Изучив литературу, я пришла к выводу, что, в основном, он используется в высшей математике (дифференциальные и интегральные исчисления). Я же в своей работе решила исследовать, как можно использовать метод неопределенных коэффициентов при решении задач элементарной математики, а также при решении функциональных уравнений. Сложность работы заключалась в том, что метод неопределенных коэффициентов используется в различных разделах алгебры, как вспомогательный и практически отсутствует теория. Я постаралась собрать весь разрозненный материал вокруг самого метода. Думаю, что эта работа будет интересна и полезна, как учащимся, так и учителям, при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ.

Цель моей работы: исследовать возможность применения метода неопределенных коэффициентов при решении задач элементарной математики и при решении функциональных уравнений.

Задачи:

1. Изучить литературу по данной теме.
2. Доказать теоремы Виета, Безу, схему Горнера, с помощью метода неопределенных коэффициентов.
3. Рассмотреть возможность использования метода в различных задачах алгебры. Например: решить с помощью метода неопределенных коэффициентов разнообразные уравнения и неравенства.
4. Решить с помощью метода неопределенных коэффициентов ряд функциональных уравнений.
5. На основе полученных результатов сделать выводы о роли метода неопределенных коэффициентов в школьном курсе математики.
6. Познакомить учащихся 10-х классов с результатами своей работы.

***Гипотеза*:** В математике существуют такие задачи, для которых метод неопределенных коэффициентов является рациональным.

Глава 1.

Теорема Виета и метод неопределенных коэффициентов.

Учащиеся старших классов хорошо знают формулы Виета для приведенного уравнения второй степени (если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q=0$, то справедливо равенства $x_1 + x_2 = - p$, $x_1x_2 = q$), но мало кто из них помнит, что доказываются эти формулы с помощью метода неопределенных коэффициентов. Я же хочу показать, как работает этот метод при выведении формул Виета для приведенных уравнений третьей и четвертой степеней.

Для вывода формул Виета и решения следующих задач, нам необходимо рассмотреть ряд теорем .

Теорема №1 (о многочлене, тождественно равном нулю). Если при произвольных значениях аргумента x значение многочлена f(x) = a0+ a1x + a2x2 +...+ a nxn, заданного в стандартном виде, равно нулю, то все его коэффициенты a0, a1, a2, ..., an равны нулю.

Теорема №2 (следствие теоремы № 1). Пусть и f(x) = a0+a1x +...+ a nxn, и g (x)= b 0+ b 1x + b 2x2 +...+ bnxn.

Для того чтобы f(x)= g(x)необходимо и достаточно, что бы a0= b0, a1 = b1, a2 = b 2 , ..., a n= b n

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена P (x) на двучлен x – a равен P (a)(* т.е значению *P (x)* при *x = a).*

Определение. Число *a* называется *корнем многочлена P (x),* если *P (a) = 0* (т.е если *a* – корень уравнения *P (x) = 0).*

Следствие 1(из теоремы Безу). *Если многочлен P (x) делится на x – a, то a – корень этого многочлена.* В самом деле*, P (x) = (x – a) Q (x),* и потому *P (a) = (a – a) Q (a) = 0.*

Следствие 2. *Если число a является корнем многочлена P (x), то этот многочлен делится на x – a без остатка..*

Следствие 3. *Если многочлен $P(x)$ имеет попарно различные корни a_1, a_2, ..., a_n, то он делится без остатка на произведение $(x - a_1)\dots(x - a_n)$.*

Следствие 4. *Многочлен степени n имеет не более n различных корней.*

Доказательство. «Если бы многочлен $P(x)$ степени n имел корни a_1, ..., a_{n+1}, то он делился бы на произведение $(x - a_1)\dots(x - a_{n+1})$, имеющее степень $n + 1$, что невозможно.

Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных корней a_1, ..., a_n. Тогда он делится без остатка на произведение $(x - a_1)\dots(x - a_n)$, имеющее также степень n. Поэтому частным является некоторое число b. Итак,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = b(x - a_1)\dots(x - a_n)$$

Если раскрыть скобки в правой части равенства и сравнить коэффициенты при старших членах, то получим: $a_n = b$. Значит,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n(x - a_1)\dots(x - a_n)$$

Сравнивая остальные коэффициенты, при одинаковых степенях x слева и справа, получим соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями, носящие название **формул Виета для уравнения n-ой степени.»[1]**

Если $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – корни уравнения $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots p_n = 0$, то справедливы равенства

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -p_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = p_2$$

$$x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -p_3$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n p_n$$

Выполнение таких неравенств необходимо и достаточно для того чтобы числа $a_1,\dots,a_n$ были корнями многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

Для приведенных уравнений третьей и четвертой степеней эти формулы выглядят следующим образом.

Если x_1, x_2, x_3 – корни приведенного уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то справедливы равенства

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$$

$$x_1x_2x_3 = -r$$

<u>Доказательство.</u>

$$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)(x-x_3) =$$

$$= x^3 - x^2x_3 - x^2x_2 + xx_2x_3 - x^2x_1 + xx_1x_3 + xx_1x_2 - x_1x_2x_3 =$$

$$= x^3 - x^2(x_3 + x_2 + x_1) + x(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) - x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$$

Аналогично доказывается формулы Виета для приведенного уравнения четвертой степени:

Если x_1, x_2, x_3, x_4 – корни приведенного уравнения $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + d= =0$, то справедливы равенства

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p$$

$$x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2 = q$$

$$x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 = -r$$

$$x_1x_2x_3x_4 = d$$

Теперь рассмотрим два частных случая.

Пример 1. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$,если известно, что среди его корней имеются 2 пары равных между собой чисел.

Решение: Пусть $x_1 = x_2 = A;\ x_3 = x_4 = B,$ тогда по формулам Виета

$$\begin{cases} 2A + 2B = 10 \\ A^2 + B^2 + 4AB = 37 \\ 2AB^2 + 2A^2B = -p \\ A^2B^2 = q \end{cases}$$

Из 1 – го уравнения имеем $A = 5 – B$.

Тогда, подставив это выражение во 2 уравнение, получим

$$(5 - B)^2 + B^2 + 4\,(5 - B)B = 37$$

$$\begin{matrix} B_1 = 3 & & A_1 = 2 \\ B_2 = 2 & \Longrightarrow & A_2 = 3 \end{matrix}$$

Из 3 – го уравнения найдем p, а из 4 – го q: $p_1 = - 60$, $q_1 = 36$ (p_2 и q_2 также равны -60 и 36).

Ответ: $p = - 60, q = 36.$

Пример 2. Найти коэффициенты a и b уравнения
$x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0$ если известно, что среди его корней есть три равных целых числа.

Решение: Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = A;\ x_4 = B$, тогда по формулам Виета

$$\begin{cases} 3A + B = -1 \\ 3A^2 + 3AB = -18 \\ A^3 + 3A^2 B = -a \\ A^3 B = b \end{cases}$$

Из 1 – го уравнения имеем $B = - 1 – 3A$.

Тогда, подставив это выражение во 2 уравнение, получим

$$3A\,(- 1 – 3A) + 3A^2 = - 18$$

$A_1 = 1{,}5$ *(не подходит по условию)*

$A_2 = - 2$*(подходит по условию)*

Тогда $B = 5$.

Из 3 – го уравнения найдем a, из 4 - го $- b$: $a = - 52$, $b = - 40$.

Ответ: $a = - 52, b = - 40.$

Глава 2.

Схема Горнера и метод неопределенных коэффициентов.

Решим методом неопределенных коэффициентов следующую задачу.

Пример 3. Найти частное $g(x)$ и остаток r при делении многочлена $P(x) = 2x^5 – x^4 – 3x^3 + x – 3$ на многочлен $T(x) = x – 3$.

По теореме Безу остаток от деления равен

$r = 2*3^5 - 3^4 – 3*3^3 +3 – 3 = 324$

Тогда

$2x^5 – x^4 – 3x^3 + x – 3 = (x - 3)(2x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) +324 =$

$= 2x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x – 6x^4 - 3 a_2 x^2 - 3 a_3 x - 3 a_4 + 324$

$$\begin{array}{c|l}
x^5 & 2 = 2 \\
x^4 & a_1 - 6 = -1 \\
x^3 & a_2 - 3a_1 = -3 \\
x^2 & a_3 - 3a_2 = 0 \\
x^1 & a_4 - 3a_3 = 4 \\
x^0 & -3a_4 + 324 = -3
\end{array}$$

Отсюда, $a_1 = 5,\ a_2 = 12,\ a_3 = 36,\ a_4 = 109,$

Таким образом,

$2x^5 – x^4 – 3x^3 + x – 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109) +324.$

Но, если бы мы знали схему Горнера для нахождения неполного частного и остатка при делении многочлена на двучлен, то можно было эту задачу решить намного проще.

Схема Горнера.

«Рассмотрим деление многочлена на двучлен $(x - a)$.

Пусть дан многочлен $P_n(x) = g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + g_2 x^{n-2} + \ldots + g_{n-1} x + g_n$,

где $g_0 \neq 0, n \geq 1,$ и двучлен $(x - a)$. Тогда существует многочлен $q(x)$ и число r такие, что $P_n(x) = (x - a)\ q(x) + r$. Степень многочлена $q(x)$ равна $(n - 1)$.Поэтому $q(x)=b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$, где $b_0 \neq 0.$ Найдем числа b_0 , b_1 , b_2 , … , b_{n-1} и r **методом неопределенных коэффициентов.** Подставим $q(x)$ в равенство $P(x) = (x - a)\ q(x) + r$, получим, что

$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + g_2 x^{n-2} + \ldots + g_{n-1} x + g_n =$

$$=b_0 x^n + (b_1 - a\, b_0)\, x^{n-1} + (b_2 - ab_1)\, x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (b_{n-1} - a\, b_{n-2})x + (r - a\, b_{n-1}).$$

По правилу равенства многочленов, отсюда получаем , что

$$\begin{cases} g_0 = b_0, \\ g_1 = b_1 - ab_0, \\ g_2 = b_2 - ab_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{n-1} = b_{n-1} - a\, b_{n-2}, \\ g_n = r - a\, b_{n-1}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b_0 = g_0, \\ b_1 = g_1 + ab_0, \\ b_2 = g_2 + ab_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = g_{n-1} + a\, b_{n-2}, \\ b_n = r + a\, b_{n-1}, \end{cases} \qquad (1)$$

Итак, коэффициенты частного *q(x)* и остаток *r* выражаются через коэффициенты многочлена *P(x)* и число а при помощи действий сложения согласно формулам *(1),* откуда следует:

А) если $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n$ и a – рациональные числа, то $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и r – также рациональные числа;

Б) если $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n$ и a – целые числа, то $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и r – также целые числа.

Из формул *(1)* вытекает следующее правило для вычисления коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка r , которое записывается в виде следующей таблицы, которая называется **схемой Горнера:**

	Коэффициенты многочлена P(x)						
	g_0	g_1	g_2	g_3	…	g_{n-1}	g_n

		$g_1 + ab_0$	$g_2 + ab_1$	$g_3 + ab_2$	…	$g_{n-1} + a\,b_{n-2}$	$g_n + a\,b_{n-1}$
a	b_0	b_1	b_2	b_3	…	b_{n-1}	r
	Коэффициенты частного						**Остаток**

Схема Горнера позволяет легко разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x – a$, т. е найти коэффициенты частного $q(x)$ и остаток r.»[2]

Тогда решим пример 3 по схеме Горнера.

	Коэффициенты многочлена P(x)						
	2	*- 1*	*- 3*	*0*	*1*		*- 3*
		*3*2 + (-1)*	*3*5 + (-3)*	*3*12 + 0*	*3*36 + 1*		*3*109 +(-3)*
a	*2*	*5*	*12*	*36*	*109*		*324*
	Коэффициенты частного						**Остаток**

Таким образом,

$$2x^5 – x^4 – 3x^3 + x – 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109) +324.$$

Для нахождения целых корней многочлена часто используют следующую теорему о нахождении целых корней многочлена.

<u>Теорема .</u> *«Если все коэффициенты многочлена степени* n *, где* $n \geq 1$*, - целые числа и корень а многочлена – также целое число, то корень а – делитель свободного члена многочлена.*

<u>Следствие.</u> *Целыми корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь делители свободного члена многочлена.*

Это следствие позволяет находить все целые корни многочлена с целыми коэффициентами, применяя схему Горнера.»[2]

Пример 4. Выяснить, имеет ли целые корни многочлен

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 +2x^2 - 6x + 5 \qquad (2)$$

Делители свободного члена: 1, - 1, 5, - 5. Найдем значение многочлена в этих точках:

$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$

$$P_4(-1) = 8 \neq 0,$$

$$P_4(5) = 800 \neq 0,$$

$$P_4(-5) = 360 \neq 0.$$

Итак, многочлен *(2)* имеет целый корень $x_1 = 1$, а числа $5, -5$ и -1 не являются его корнями. Применив схему Горнера, разложим многочлен на множители. Схема Горнера имеет вид:

	Коэффициенты многочлена P(x)				
	1	2	- 2	- 6	5
		1*1 + 2	1*3 + (-2)	1*1 + (- 6)	1*(- 5) + 5
1	1	3	1	- 5	0
	Коэффициенты частного				**Остаток**

Следовательно, $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$.

Теперь будем искать корни многочлена $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Делители его свободного члена: $1, -1, 5, -5$. нет необходимости искать значение многочлена $P_3(x)$ в точках $-1, 5, -5$, так как эти числа заведомо не являются корнями многочлена $P_4(x)$, а значит, и многочлен $P_3(x)$ в силу того, что многочлен $P_4(x)$ в них не обращается в нуль. Поэтому проверим только число 1: $P_3(1) = 1 + 3 + 1 - 5 = 0$

Применив схему Горнера:

	Коэффициенты многочлена P(x)			
	1	3	1	- 5
		1 +3	4 + 1	5 + (- 5)
1	1	4	5	0
	Коэффициенты частного			**Остаток**

Получим $P_3(x) = (x - 1)(x^4 + 4x + 5)$, а потому многочлен $P_4(x)$ можно записать так: $P_4(x) = (x - 1)^2 (x^4 + 4x + 5)$.

Так как квадратный трехчлен $x^4 + 4x + 5$ целых корней не имеет, то следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет два целых корня $x_1 = 1, x_2 = 1$. в таких случаях целесообразно ввести понятие кратности корня.

Пример 5. Используя схему Горнера, разделить многочлен $4x^3 – x^5 + 32 – 8x^2$ на $x + 2$.

Решение: Запишем данный многочлен в каноническом виде, т.е.

$- x^5 + 0x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 0x + 32$

Применяя схему Горнера, имеем

	Коэффициенты многочлена P(x)					
	- 1	0	4	- 8	0	32
		0 + 2	4 + (- 4)	- 8 + 0	0 + 16	- 32 + 32
- *2*	- 1	2	0	- 8	16	0
	Коэффициенты частного					**Остаток**

Итак, частное $Q_4(x) = - x^4 + 2x^3 - 8x + 16$ и остаток $r = 0$.

Следовательно, $4x^3 – x^5 + 32 – 8x^2 = (- x^4 + 2x^3 - 8x + 16)(x + 2)$

Глава 3.

Уравнение высоких степеней и метод неопределенных коэффициентов.

В первой главе мы уже рассмотрели, как решаются уравнения высоких степеней с помощью метода неопределенных коэффициентов. При этом сделали ударение на то, что эти примеры легче было бы решить при помощи формул Виета и схемы Горнера. Однако левую часть уравнения не всегда удается разложить на множители простейшими средствами. Рассмотрим пример.

Пример 6. «Пусть надо решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$$

предположим, что левая часть этого уравнения разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами. Обозначим один из множителей через $x^2 + rx + s$, а второй - через $x^2 + px + q$. Коэффициенты p,q,r,s пока не определены. Задача состоит в том, чтобы найти их. Имеем

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s).$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, т. е приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + r = -4 \\ s + q + pr = -10 \\ ps + qr = 37 \\ qs = -14 \end{cases}$$

Последнее уравнение показывает, что для q возможны следующие значения: $1, 2, 7, 14, -1, -2, -7, -14$ (так как по условию p,q,r,s - целые). Предположим, что $q = 1$. Тогда $s = -14$. Второе и третье уравнения в этом случае дают систему

$$\begin{cases} pr = 3 \\ -14p + r = 37. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 14, второе на r и сложим их почленно. Получим

$$r^2 - 37r - 42 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение не имеет решения в целых числах. Но r должно быть целым. Выходит , что $q \neq 1$.

Берем теперь для испытаний другое число q. Пусть $q = 2$. тогда $s = -7$. второе и третье уравнения дают систему

$$\begin{cases} pr = -5, \\ -7p + 2r = 37 \end{cases}$$

Исключая из системы *p*, получим

$$2r^2 - 37r + 35 = 0.$$

Очевидно, что $r = 1$, тогда $p = -5$. первое уравнение системы тоже удовлетворяется при $r = 1$, $p = -5$.

Итак, имеем $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7).$

Следовательно, заданное уравнение можно записать

$$(x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0.$$

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$. »[3]

О решении одного класса кубических уравнений.

Пример 8. Пусть дано кубическое уравнение: $a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 = 0$, где $a_1 \neq 0$.

Приведём его к виду $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1), где $a = \frac{b_1}{a_1}$

— , в = , с =

Положим в уравнении (1) x = y + m. Тогда получим уравнение:

Раскроем скобки, сгруппируем: y3+3y2m + 3ym2 + m3 + ay2+ 2aym +am2 + by +bm + c = 0,

y3 + y2(a +3m) +y(3m2 +2am +b) + m3 +am2 +bm + c = 0.

Для того, чтобы уравнение (1) было двучленным, должно выполняться условие:

Решения этой системы: m = -; a2 = 3b. Таким образом, при произвольном с и при a2 = 3b уравнение подстановкой x = y - можно привести к двучленному уравнению третьей степени.

Пример 9. Решить уравнение: x 3 + 3x 2+3x - 9 =0.

Решение: В данном уравнении а = 3, в =3, тогда условие a2 = 3b выполняется, а m = - = -1. Выполним подстановку x = y -1.

Уравнение принимает вид: (y -1)3 +3(y -1)2 +3(y -1) – 9 = 0.

y3 -3y2 +3y -1 +3y2 – 6y +3 +3y –3 – 9 = 0.

y3 – 10 = 0, откуда y = , а x = - 1.

Ответ: - 1.

Пример10. Решить уравнение: х 3 + 6х 2+ 12х + 5 = 0.

Решение: а = 6, в =12, тогда условие а2 = 3b (62 = 3×12) выполняется, а m = - = -2.

Выполним подстановку х = у - 2. Уравнение принимает вид: (у -2)3 +6(у -2)2 +12(у -2) + 5 = 0.

у3 – 6у2 + 12у – 8 + 6у2 -24у + 24 + 12у – 24 + 5 = 0.

у3 – 3 = 0, у = , а х = - 2.

Ответ: – 2.

Рассмотренные в работе примеры могут быть решены и другими способами. Но цель работы заключалась в том, чтобы решить их методом неопределённых коэффициентов, показать универсальность этого метода, его оригинальность и рациональность, не отрицая того, что в некоторых случаях он приводит к громоздким, но не сложным преобразованиям.

Пример 11. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0.$

Решение*:* Легко видеть, что $x = 1$ является корнем уравнения, следовательно, левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x - 1) \qquad (1)$$

Умножив многочлены, получим

$$(x^3 + ax^2 + bx + c)(x - 1) = x^4 - x^3 + ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 1 = 1 \\ x^3 & a - 1 = 1 \\ x^2 & b - a = -2 \\ x^1 & c - b = -3 \\ x^0 & -c = 3 \end{array}$$

Из этой системы уравнений получаем, что $c = -3,\ b = 0,\ a = 2$.Подставим полученные коэффициенты в правую часть равенства *(1),* получим

$$(x^3 + 2x^2 - 3)(x - 1) = 0$$

$$x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \quad \text{или} \quad x - 1 = 0$$

Легко видеть, что корнем первого уравнения является число 1. Тогда $x^3 + 2x^2 - 3 = (x^2 + кx + n)(x - 1)$.

Применим вновь метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 1 = 1 \\ x^2 & к - 1 = 2 \\ x^1 & n - к = 0 \\ x^0 & -n = -3 \end{array}$$

Из этой системы уравнений находим, что $к = 3,\ n = 3$.

Уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$ корней не имеет.

Ответ*:* $x = 1$.

Пример 12. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2x^3 - 4x^2 - 8x + a = 0$$

имеет два различных корня.

Решение*:* Если уравнение имеет корни, то его левую часть можно разложить на множители.

A и B – корни данного уравнения, тогда разложим на множители, получим

$$2x^3 - 4x^2 - 8x + a = 2(x - A)^2(x - B)$$

Раскроем скобки и сгруппируем подобные слагаемые при одинаковых степенях x, получим

$$2x^3 - 4x^2 - 8x + a = 2x^3 + x^2(-2B - 4A) + x(4BA + 2A^2) - 2A^2B.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов.

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 2 = 2 \\ x^2 & -2B - 4A = -4 \\ x^1 & 4BA + 2A^2 = -8 \\ x^0 & -2A^2B = a \end{array}$$

Из этой системы уравнений находим, что $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = 2$, тогда $B_1 = 3\frac{1}{3}$, $B_2 = -2$. Следовательно $a_1 = -2\frac{26}{27}$, $a_2 = 16$, при которых уравнение имеет два различных корня.

Пример 13. **“**Решить уравнение $tg^4x + ctg^4x + tg^2x - \frac{3}{4}ctg^2x = 2.$”[16]

Решение: *ОДЗ:* $x \neq \pi k, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Умножим обе части уравнения на tg^4x, получим

$$tg^8x + 1 + tg^6x - \frac{3}{4}tg^2x = 2tg^4x$$

$$tg^8x + 1 + tg^6x - 2tg^4x - \frac{3}{4}tg^2x = 0$$

Пусть $tg^2x = t$, тогда

$$t^4 + t^3 - 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1 = 0$$

Выделим квадрат трехчлена второй степени в левой части уравнения, получим

$$t^4 + t^3 - 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1 = (t^2 + at + b)^2 + c$$

$$t^4 + t^3 - 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1 = t^4 + 2at^3 + 2bt^2 + (a^2 + 2ab)t + b + c$$

$$\begin{array}{c|l} t^4 & 1 = 1 \\ t^3 & 2a = 1 \\ t^2 & 2b = -2 \\ t^1 & a^2 - 2ab = -\frac{3}{4} \\ t^0 & b + c = 1 \end{array}$$

Следовательно, $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 2.$

Получим уравнение $(t^2 + \frac{1}{2}t - 1)^2 + 2 = 0,$ которое не имеет корней.

Ответ: *решений нет.*

Глава 4.

Неравенства и метод неопределенных коэффициентов.

Неравенства, левая часть которых является многочленом *n – ой* степени, чаще всего решаются методом интервалов, но для этого необходимо разложить многочлен на множители. Здесь снова может пригодиться метод неопределенных коэффициентов.

Пример 14. Решить неравенство

$$x^4 - x^3 + x - 1 \le 0.$$

Решение: легко видеть, что числа 1 и – 1 являются корнями многочлена $x^4 - x^3 + x - 1$, тогда его можно разложить на множители

$x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + px + q)$, т.е

$$x^4 - x^3 + x - 1 = x^4 + px^3 + x^2q - x^2 - px - q$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1 = 1 \\ p = -1 \\ q - 1 = 0 \\ -p = 1 \\ -q = -1 \end{array} \Longrightarrow p = -1, q = 1$$

Получим $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \le 0$

$x^2 - x + 1 > 0$ при любых значениях x, так как $D = -3 < 0,\ a > 0.$

Следовательно, $x^2 - 1 \le 0$, т.е $-1 \le x \le 1.$

Ответ: $x \in [-1; 1]$.

Пример 15. Доказать, что при любых значениях *x* выполняется неравенство

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 > 0.$$

Решение: Выделим квадрат трехчлена из левой части неравенства

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 = (x^2 + ax + b)^2 + c$, т.е.

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 = x^4 + 2ax^3 + (2b + a^2)x^2 + 2abx + b^2 + c$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1 = 1 \end{array}$$

x^3 $2a = -4$

x^2 $2b + a^2 = 12$ $\Longrightarrow$ $a = -2, b = 4, c = 8$

x^1 $2ab = -16$

x^0 $b^2 + c = 24$

Получим неравенство $(x^2 - 2x + 4)^2 + 8>0$, которое выполняется при любых значениях x.

Согласитесь, что доказать данное неравенство какими-либо другими средствами элементарной математики было бы затруднительно.

Глава 5.

Разложение правильных дробей на простые методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим правильную дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Из курса алгебры нам известно, что каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей. Для этого также используется метод неопределенных коэффициентов.

«Для начала надо разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней .после чего рациональную дробь представим в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots +$$

$$+ \frac{(B_1x + C_1)}{(x^2+px+q)^n} + \frac{(B_2x + C_2)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{(B_nx + C_n)}{(x^2+px+q)} + \dots;$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots,$ вычисляем методом неопределенных коэффициентов, для чего приведем последнее равенство к общему знаменателю, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решим систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.»[4]

Пример 16. Разложить алгебраическую дробь на простейшие.

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{(Bx+C)}{(x^2+1)}+\frac{(Dx+E)}{(x^2+1)^2}$$

Отсюда

$$2x^2 + 2x + 13 = A\,(x^2 + 1) + (Bx + C)(x^2 + 1)(x - 2) + (Dx + E)(x - 2)$$

или

$$2x^2 + 2x + 13 = x^4\,(A + B) + x^3\,(C - 2B) + x^2(2A + B - 2C + D) +$$

$$+ x(-2B + C - 2D + E) + A - 2C - 2E.$$

Следовательно,

$$A + B = 0,\quad C - 2B = 0,\quad 2A + B - 2C + D = 2,$$

$$-2B + C - 2D + E = 2,\quad A - 2C - 2E = 13$$

Решая полученную систему, найдем $A = 1,\ B = -1,\ C = -2,\ D = -3,$ $E = -4.$

Тогда получим

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{(x-2)}+\frac{(-x-2)}{(x^2+1)}+\frac{(-3x-4)}{(x^2+1)^2}$$

Покажем, как используется данное разложение при доказательстве числовых неравенств.

Пример 17. Вычислить сумму.

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\ldots+\frac{1}{99*101}$$

Решение:

$$\frac{1}{(2к-1)(2к+1)}=\frac{A}{2к-1}+\frac{B}{2к+1}=\frac{A(2к+1)+B(2к-1)}{(2к-1)(2к+1)}$$

$2Aк + A + 2Bк - B = 1$

$(2A + 2B)к + (A - B) = 1$

$к^1 \mid 2A + 2B = 0$

$\kappa^0 \quad A - B = 1$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$

Подставим получившиеся коэффициенты в выражение:

$$\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+1)} = \frac{1/2}{(2\kappa-1)} - \frac{1/2}{(2\kappa+1)}$$

$$\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + ... + \frac{1}{99*101} =$$

$$\frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/2}{5} + \frac{1/2}{7} + ... + \frac{1/2}{99} - \frac{1/2}{101} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{1}{101} = \frac{1}{2} - \frac{1}{202} = \frac{100}{202} = \frac{50}{101}$$

Ответ: $\frac{50}{101}$.

Пример 18. Вычислить сумму.

$$\left(\frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{2*3*4} + ... + \frac{1}{100*101*102}\right) + \frac{1}{202}$$

Решение: $\frac{1}{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)} = \frac{A}{\kappa-1} + \frac{B}{\kappa} + \frac{C}{\kappa+1} = \frac{A(\kappa(\kappa+1)) + B(\kappa-1)(\kappa+1) + C(\kappa(\kappa-1))}{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}$

$A\kappa^2 + A\kappa + B\kappa^2 - B + C\kappa^2 - C\kappa = 1$

$(A+B+C)\,\kappa^2 + (A - C)\,\kappa - B = 1$

$$\begin{array}{l|l} \kappa^2 & A+B+C = 0 \\ \kappa^1 & A - C = 0 \\ \kappa^0 & -B = 1 \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$.

Подставим получившиеся коэффициенты в выражение:

$$\frac{1}{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)} = \frac{1/2}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa} + \frac{1/2}{\kappa+1} (1)$$

$$\frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1/2}{4} + \frac{1/2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1/2}{5} + ... + \frac{1/2}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1/2}{101} + \frac{1/2}{100} - \frac{1}{101} + \frac{1/2}{102} + \frac{1}{202} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{198} - \frac{1}{100} + \frac{1}{202} + \frac{1}{200} - \frac{1}{101} + \frac{1}{204} + \frac{1}{202} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - ... - \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{202}\right) + \frac{1}{204} =$$

$$=(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-...-\frac{1}{100}-\frac{1}{101})+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{101})+\frac{1}{204}+\frac{1}{4}=\frac{1}{204}+\frac{1}{4}=\frac{13}{51}$$

Ответ: $\frac{13}{51}$

Пример 19. Найти все *к,* принадлежащие *N*,такие, что

$$\frac{1}{1*5}+\frac{1}{3*7}+...+\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+3)}=\frac{125}{429} \qquad (1)$$

В соответствии с теоремой правильная дробь $\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+3)}$ может быть разложена на сумму дробей:

$$\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+3)}=\frac{A}{2\kappa-1}+\frac{B}{2\kappa+3}$$

Приводя выражение правой части тождества к общему знаменателю, получаем

$$\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+3)} = \frac{A(2\kappa+3)+B(2\kappa-1)}{(2\kappa-1)(2\kappa+3)},$$

откуда

$$1= A(2\kappa + 3) + B(2\kappa - 1) \qquad (2)$$

Неизвестные коэффициенты *А* и *В* могут быть найдены двумя способами: либо из условия равенства двух многочленов получаем и решаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{array}{l|l} \kappa^1 & 2A + 2B = 0 \\ \kappa^0 & A - B = 1 \end{array}$$

Отсюда $A=\frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$;

либо, полагая в тождестве *(2)* последовательно $\kappa_1 = -\frac{3}{2}, \kappa = \frac{1}{2}$, находим

$1 = 4A$

$1 = -4B$

Следовательно, $A=\frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$.

В результате имеем разложение

$$\frac{1}{(2к-1)(2к-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2к-1}+\frac{1}{2к+3}\right)$$

Это разложение справедливо для всех *к,* принадлежащих *N*. Поэтому уравнение *(11)* можно записать в следующей равносильной форме:

$$\frac{1}{4}((1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+...+(\frac{1}{2к-1}-\frac{1}{2к+3}))=\frac{125}{429}$$

После взаимного уничтожения в левой части слагаемых, отличающихся знаком, получаем уравнение

$$\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2к-1}+\frac{1}{2к+3})= \frac{125}{429}$$

и окончательно $24к^2 - 95к - 125 = 0$.Это уравнение имеет единственное решение $к = 5$, удовлетворяющее условию, что *к* принадлежат *N* .

Глава 6.

Метод неопределенных коэффициентов и функциональные уравнения.

«Функциональное уравнение – уравнение, в котором искомая функция связана с известными (данными) функциями при помощи операции образования сложной функции.» [5]

Наибольшее распространение получили уравнения, в сложных функциях которых искомыми являются внешние функции. Приведем примеры наиболее известных функциональных уравнений: уравнение Коши $f(x+y)=$ $=f(x)+(y)$, уравнение Даламбера $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)*f(y)$, уравнение Лобачевского $f^2(x)=f(x-y)*f(x+y)$.

«Одним из способов нахождения решений функциональных уравнений является метод неопределенных коэффициентов. Его можно применять тогда, когда по внешнему виду уравнения можно определить общий вид искомой функции. Это относится, прежде всего, к тем случаям, когда решения уравнений следует искать среди целых или дробно – рациональных функций. Полезно помнить, что композиция линейных или дробно – линейных функций является линейной или дробно – линейной функцией.»[6]

Изложим суть этого приема, решая следующие задачи.

Пример 20. «Функция $f(x)$ определена при всех действительных x и удовлетворяет при всех x, принадлежащих всем действительным числам, условию

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Найдите $f(x)$».[IX Всероссийская математическая олимпиада, III этап, 1982 – 1983 гг., X кл.]

Решение: Так как в левой части уравнения над независимой переменной x и значениями функции f выполняются только линейные операции, а правая часть уравнения – квадратичная функция, то естественно предположить, что искомая функция также квадратичная: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a,b,c – коэффициенты, подлежащие определению, т.е неопределенные коэффициенты.

Подставляя функцию в уравнение, приходим к тождеству:

$$2(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 3ax^2 + (b-2a)x + (a+b+3c) = x^2.$$

Далее

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

Из этой системы находим коэффициенты, $a = 1\backslash 3,\ в = 2\backslash 3,\ c = -1\backslash 3$,а вместе с этим и функцию $f(x) = 1/3(x^2 + 2x - 1)$, являющуюся искомым решением функционального уравнения.

Ответ: $f(x) = 1/3(x^2 + 2x - 1)$.

Пример 21. Функция $y = f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию

$$f(f(x)) = f(x) + x.$$

Найти 2 такие функции». [Квант, 1986, №7, задача М995.]

Решение: Запишем уравнение так:

$$f(f(x)) - f(x) = x \qquad (1)$$

Над искомой функцией выполняются два действия – операция составления сложной функции и вычитание. Учитывая , что правая часть уравнения – линейная функция, естественно предположить, что искомая функция тоже линейная: $f(x) = ax + b$, где a и b - неопределенные коэффициенты. Подставив эту функцию в *(1)* и выполнив преобразования, получим равенство $(a^2 - a)\,x + ab = x$, которое должно выполняться для всех x, принадлежащих R. Это возможно только тогда, когда

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 \\ ab = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим, $a = 0{,}5\ (1 \pm \sqrt{5})$, $b = 0$. Следовательно, имеем две непрерывные функции $f(x) = 0{,}5(1 \pm \sqrt{5})\,x$, являющиеся решениями функционального уравнения *(1).*

Ответ: $f(x) = 0{,}5\ (1 \pm \sqrt{5})\,x$.

Пример 22. «Функция f: **Z** → **Z** (**Z** – множество всех целых чисел) удовлетворяет условиям:

1) $f(f(к) = к$ для всех $к \in$ **Z;**
2) $f(f(к+2)+2) = к$ для всех $к \in$ **Z;**
3) $f(0) = 1$**.**

Найти значения $f(1995)$ и $f(-1994)$. » [Украина, I Соросовская олимпиада по математике, 1995, X кл.]

Решение: Анализируя первые два условия задачи, приходим к выводу, что функцию f следует искать среди линейных функций, а именно: $f(к) =$ $= ак + b$, где a и b неопределенные коэффициенты. Из первого условия следует, что $a^2к + (ab + b) = к$ для всех $к \in$ **Z.** Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $к$, приходим к системе уравнений:

$$a^2 = 1$$
$$ab + b = 0.$$

Решением системы $(1; 0)$ и $(-1; b)$, где b – произвольное число, дают возможность построить функции $f_1(к) = к$ и $f_2(к) = -к + b$. Непосредственно проверкой убеждаемся, что второе условие задачи для функции f_1 не выполняется, а для функции f_2 оно выполняется при любом b. Из условия 3 задачи получим: $b = 1$.

Таким образом, функция $f(к) = 1 – к$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Глава 7.

Различные задачи олимпиадного характера и метод неопределенных коэффициентов.

Напоследок хочется показать еще ряд примеров, в котором применяется вышеописанный метод.

Пример 23. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Представим эту дробь в виде $A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}$, где A, B, C и D – неизвестные рациональные коэффициенты. Приравнивая два выражения к одному, получим

$$A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

или, освобождаясь от знаменателя, вынося, где можно, рациональные множители из под знака корней и приводя подобные члены в левой части, получают:

$(A – 2B + 3C) + (-A + B + 3D)\sqrt{2} + (A + C + 2D)\sqrt{3} + (B – C + D)\sqrt{6} =$
$= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

Но такое равенство возможно лишь в случае, когда равны между собой рациональные слагаемые общих частей и коэффициенты при одинаковых радикалах. Таким образом получают 4 уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов *A,B,C,D:*

$$A - 2B + 3C = 1,\ -A + B + 3D = 1,$$

$$A + C - 2D = -1,\ B - C + D = 0$$

Откуда $A = 0,\ B = -1\backslash 2,\ C = 0,\ D = 1\backslash 2,$

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

В приведенных примерах успех метода неопределенных коэффициентов зависел от правильного выбора выражений, коэффициенты которых отыскивались. Если бы в последнем примере вместо выражения $A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}$ было взято выражение $A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3}$, то рассуждая, как и выше , получили бы для трех коэффициентов *A,B и C* четыре уравнения $A - 2B + 3C = 1,\ ,\ -A + B = 1,\ A + C = -1,\ B - C = 0,$ которым нельзя удовлетворить выбором чисел *A, B и C.*

Пример 24. « Найти: 9x + 11y – 6z + 7t + 5m,если

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t + m = 4 \\ -x + y + 2z - 3t - m = -3. \end{cases}$$

Решение. Пусть α и β – неопределённые коэффициенты, тогда

$9x + 11y - 6z + 7t + 5m = \alpha\,(2x + 3y - z + t + m) + \beta\,(-x + y + 2z - 3t - m) =$

$= 2\,\alpha\,x + 3\,\alpha\,y - \alpha\,z + \alpha\,t + \alpha\,m - \beta\,x + \beta\,y + 2\,\beta\,z - 3\,\beta\,t - \beta\,m =$

$=(2\,\alpha - \beta)\,x + (3\,\alpha + \beta)\,y + (-\alpha + 2\,\beta)\,z + (\alpha - 3\,\beta)\,t + (\alpha - \beta)\,m.$

Приравняем коэффициенты при переменных x, y, z, t, m:

$9 = 2\,\alpha - \beta$

$$\begin{cases} 11 = 3\,\alpha + \beta \\ -6 = -\alpha + 2\,\beta \\ 7 = \alpha - 3\,\beta \\ 5 = \alpha - \beta\ ; \end{cases} \qquad \alpha = 4;\ \beta = -1.$$

Тогда $9x + 11y – 6z + 7t + 5m. = 4 \cdot (2x + 3y – z + t + m) - 1 \cdot (-x + y + 2z – 3t – m) =$

$= 4 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 19.$

Ответ: 19»[11].

Заключение.

Я надеюсь, что в своей работе мне удалось показать насколько интересным и разнообразным может быть метод неопределенных коэффициентов, какое широкое применение он имеет в различных областях элементарной математики. И пусть многие из рассмотренных мною примеров, могут быть решены более рациональным способом, однако это не умаляет достоинств самого метода, тем более что есть и такие задачи , которые трудно решить без его помощи.

Цель достигнута. Удалось доказать , что метод неопределенных коэффициентов играет далеко не второстепенную роль в математике, т. е , говоря языком поэта, «вторая скрипка заиграла главную партию» .

Продолжение своей работы вижу в изучении метода неопределенных коэффициентов в математическом анализе.

Думаю, что умение владеть данным методом поможет мне и тем, кто познакомится с моей работой более уверенно чувствовать себя при сдаче ЕГЭ и при дальнейшем изучении математики и в ВУЗах.

Список литературы.

1. Виленкин Н. Я., «Алгебра и математический анализ для 10 класса». М.: Просвещение, 2012
2. Потапов М. К., «Алгебра и анализ элементарных функций».М.: Наука, 1981.
3. Газета «Математика №37 - 2004».
4. «Математика в школе» №8, 2010, №1, 2013.
5. Сканави М. Н., «Сборник задач по математике».М.:ОНИКС 21 век. Мир и Образование, 2013.
6. Ткачук В.В., «Математика абитуриенту». МЦНМО, 2001.
7. Ваховский Е.Б, «Задачи по элементарной математике повышенной трудности». М.: Наука, 1969.
8. Данко П.Е, «Высшая математика в упражнениях и задачах».М.: Просвещение, 1992.
9. Фарков, «Школьные математические олимпиады», 2005
10. Иванов А.А, Иванов А.П. «Математика. Пособие для поступающих в ВУЗы», издательство Пермского университета, 2002.
11. Экзаменационные материалы для подготовки к ЕГЭ. ЕГЭ – 2012.Математика. Федеральный центр тестирования, Москва – 2012.

Интеренет источники:

1. http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=171

2.https://ru.wikipedia.org/wiki/%CC%E5%F2%EE%E4_%ED%E5%EE%EF%F0%E5%E4%E5%EB%B8%ED%ED%FB%F5_%EA%EE%FD%F4%F4%E8%F6%E8%E5%ED%F2%EE%E2

3. http://crypto.hut2.ru/mnk.html

4. http://festival.1september.ru/articles/550924/

5. http://otvet.mail.ru/question/6522803