Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическое моделирование систем массового обслуживания

Шаблонов Денис Айханович,
11 кл., МБОУ Лицей №1, г. Пермь,
Котельникова Наталья Васильевна,
преподаватель информатики
МБОУ «Лицей №1».

.

Пермь. 2016.

Введение

Ожидание чего-либо является частью нашей повседневной жизни. Мы ожидаем автобуса, мы стоим в очереди в кассы магазина и выстраиваемся в очереди почтового отделения. В очередях стоят не только люди, но и машины – самолеты на взлете, автомобили на светофоре.

Очереди существуют для того, чтобы регулировать деятельность людей, пришедших туда.

Большинство очередей устроено по принципу «первым пришёл – первым обслужен». В наши дни, когда клиентов много и надо их обслужить менеджеры систем обслуживания часто сталкиваются с проблемой организации очередей.

Как мы с вами знаем, практически никто не любит стоять в очереди и ждать, когда его, наконец, обслужат. В связи с этим, нетерпеливые клиенты просто уходят, а предприниматель упускает возможную прибыль. Поэтому перед менеджерами часто ставится задача: оптимизировать систему обслуживания так, чтобы она обслуживала клиентов с максимальной эффективностью.

Необходимо найти оптимальное решение, чтобы минимизировать очереди и, в то же время, не допускать простоя кассиров.

Экскурс в моделирование

Моделирование – это один из методов научного познания. Под моделированием понимается воспроизведение объекта исследования, будто предмет, процесс, или явление. Благодаря ему мы можем определить, как поведёт себя объект при разных обстоятельствах.

Моделирование бывает теоретическим и эмпирическим.

- Теоретическое моделирование позволяет без использования значительных ресурсов воспроизвести свойства объекта, благодаря абстракциям, гипотезам, и другими мыслительными инструментами.
- Эмпирическое моделирование подразумевает материальное воспроизведение объекта и её свойств, взаимодействие с получившейся моделью. Способ более затратный, но позволяет получить данные, не извлекаемые с помощью теоретического моделирования.

В результате моделирования получается **модель. Модель** – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя важные для данного исследования отличительные его черты.

Модели окружают нас везде и всегда: в детском саду, в школе, в университете, в музее, в конструкторском бюро и много где ещё.

Свойства моделей

- На любой модели рассматриваются только необходимые для данного исследования свойства. Как следствие, **ни одна модель не может быть полной.**
- **Адекватность модели**. Если с помощью этой модели можно прогнозировать поведение или свойства объекта (система обслуживания) то эта модель адекватна.
- Модель может быть **простой и сложной**.
- **Потенциальность модели.** Модель должна давать возможность получить новые знания об устройстве систем обслуживания.

Одним из видов моделирования является **математическое моделирование.** Это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

Преимущества математического моделирования:

1) Экономичность.
2) Можно моделировать гипотетические (предполагаемые) объекты.
3) Возможность реализации опасных и трудновоспроизводимых режимов.
4) Возможность изменения масштабов времени.

5) Большая прогностическая сила.

Классификация моделей по целям моделирования

- Дескриптивные модели. Их цель – это построение законов изменения компонентов модели.
- Оптимизационные модели. Они должны определять лучшие параметры объекта относительно некоторых критериев.
- Управленческие модели. Они применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека.

Именно из-за вышеперечисленных преимуществ математическое моделирование является самым удобным для решения, в том числе, задач о системах массового обслуживания.

Основная часть

Содержательная постановка

Задачами содержательной постановки модели являются:

1) Определение объекта исследования.
2) Обнаружить и перечислить основные его характеристики и свойства.
3) Определить исходные и конечные данные.

Объект исследования - новый магазин.

Исходные данные:

- Интервалы между заявками
- Интервалы обслуживания каналов
- Число каналов
- Время работы СМО

Конечные данные:

- Время занятости каждого канала
- Число обработанных и отклонённых заявок

Модель является смешанной: её задача – описать законы поведения очередей (дескриптивная модель), определить эффективность работы обслуживающих пунктов (оптимизационная модель), и принять меры по повышению их эффективности (управленческая модель).

Теоретическая часть

Для того чтобы начать построение модели надо ввести некоторые определения, которые будут использоваться в дальнейшем.

- **СМО (Система Массового Обслуживания)** – система, в которой, с одной стороны, возникают **массовые запросы (требования)** на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.
  Система массового обслуживания включает следующие элементы: **источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требований**.
- **Заявка (требование)** – это каждый клиент, заявивший о необходимости удовлетворении своей потребности в чём-либо.
- **Канал [обслуживания]** – это обслуживающее устройство (будь то касса, гараж, ангар), которое выполняет требования клиентов. Обычно, каналов в СМО несколько.
- **Простейший поток [требований]**- случайный поток, который обладает свойствами однородности (характеризуется только временами прихода заявок), ординарности (одновременный приход двух заявок практически невозможен), отсутствия последствий (вероятность прихода заявок не зависит от предыдущего состояния системы), а также стационарности (вероятность прихода заявки определяется длиной интервала времени, а не "общим временем" системы)

Системы массового обслуживания классифицируют по разным признакам. Одним из признаков является ожидание требования начала обслуживания. В соответствии с этим признаком системы подразделяются на следующие виды:

1) системы массового обслуживания с потерями (отказами);
2) системы массового обслуживания с ожиданием;
3) системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди;
4) системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.

Системы массового обслуживания, у которых требования, поступающие в момент, когда все приборы обслуживания заняты, получают отказ и теряются, называются **системами с потерями или отказами.**

Системы массового обслуживания, у которых возможно появление как угодно длинной очереди требований к обслуживающему устройству, называются **системами с ожиданием.**

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом мест в ней, называются **системами с ограниченной длиной очереди.**

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются **системами с ограниченным временем ожидания.**

Здесь даны формулы и преобразования для описания состояний **СМО с отказами, и СМО с ожиданием (**см. Теоретическую часть).

Сначала надо ввести следующие переменные:

- Интенсивность входящего потока требований –$\lambda\frac{\text{запросов}}{\text{час}}$
- Интенсивность (производительность) одного канала (прибора) обслуживания - $\mu\frac{\text{запросов}}{\text{час}}$
- Общее число каналов – k = (1,2,3…*n*-*1*,*n*) каналов
- Суммарное число каналов – n каналов
- Максимальная длина очереди
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – где, ρ – нагрузка на один канал.

СМО с отказами

СМО с отказами является такая система, в которой приходящие для обслуживания требования, в случае занятости всех каналов обслуживания, сразу ее покидают.

Вероятности состояний системы определяются из выражения:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$$

А вероятность отсутствия требований P_0определяется из выражения

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!}\right]^{-1}$$

К основным характеристикам качества обслуживания рассматриваемой СМО относятся:

- Вероятность отказа$P_{\text{отк}} = P_N = \frac{\rho^N/N!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i/i!}$
- Среднее число занятых узлов обслуживания$M_{\text{зан}} = \rho(1 - P_N)$
- Среднее число свободных узлов обслуживания $M_{\text{св}} = N - M_{\text{зан}}$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, отсюда

$$P_{\text{отк}} + P_{\text{обс}} = 1$$

Относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_N$$

Абсолютная пропускная способность СМО с отказами равняется

$$A = \lambda P_{\text{обс}}$$

Коэффициент занятости узлов обслуживания определяется отношением средним числом занятых каналов к общему числу каналов

$$K_{\text{з}} = \frac{M_{\text{зан}}}{N}$$

СМО с ожиданием

СМО с ожиданием является такая система, в которой требование, поступающее на обслуживание, остаётся в ней.

Вероятность состояний СМО с ожиданием находят по формулам:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \text{ , для } (k = 1,2\ldots,N),$$

где P_k – вероятность занятости kканалов.

$$P_k = \frac{\rho^k}{N!N^{k-N}} P_0, \text{ для } (k = N+1,\ldots,N+k,\ldots,N+\infty),$$

При $\frac{\rho}{\mathrm{N}}$> 1 наблюдается явление «взрыва» - неограниченный рост средней длины очереди, поэтому для определения P_0 должно выполняться ограничивающее условие $\frac{\rho}{\mathrm{N}}$< 1, и с учетом его запишем выражение:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}\right]^{-1},$$

где, P_0 – вероятность того, что все каналы будут свободны.

К основным характеристикам качества обслуживания СМО с ожиданием относят:

Вероятность наличия очереди $P_{\text{оч}}$, т.е. вероятность того, что число требований в системе больше числа узлов:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{N+1}}{N!\,(N-\rho)} P_0$$

Вероятность занятости всех узлов системы $P_{\text{зан}}$:

$$P_{\text{зан}} = \frac{\rho^N}{(N-1)!\,(N-\rho)} P_0$$

Среднее число требований в системе $M_{\text{тр}}$:

$$M_{\text{тр}} = P_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!\,(N-\rho)^2}\right)$$

Средняя длина очереди $M_{\text{оч}}$:

$$M_{\text{оч}} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{(N-1)!\,(N-\rho)^2}$$

Среднее число свободных каналов обслуживания $M_{\text{св}}$:

$$M_{\text{св}} = P_0 \sum_{k=1}^{N} k \frac{\rho^k}{(N-k)!}$$

Среднее число занятых каналов обслуживания $M_{\text{зан}}$:

$$M_{\text{зан}} = N - M_{\text{св}}$$

Коэффициент простоя K_0 и коэффициент загрузки K_3 каналов обслуживания системы:

$$K_0 = \frac{M_{\text{св}}}{N}; K_3 = \frac{M_{\text{зан}}}{N}$$

Среднее время ожидания начала обслуживания $T_{\text{ож}}$ для требования, поступившего в систему:

$$T_{\text{ож}} = \frac{\rho^N}{\mu(N-1)!\,(N-\rho)^2} P_0$$

Общее время, которое проводят в очереди все требования, поступившие в систему за единицу времени$T_{\text{оож}}$:

$$T_{\text{оож}} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!\,(N-\rho)^2} P_0$$

Среднее время $T_{\text{тр}}$, которое требование проводит в системе обслуживания:

$$T_{\text{тр}} = T_{\text{ож}} + \mu^{-1}$$

Суммарное время, которое в среднем проводят в системе все требования, поступившие за единицу времени $T_{\text{стр}}$:

$$T_{\text{стр}} = T_{\text{оож}} + \rho$$

Пример

Требуется аналитически решить задачу следующего типа:

Работает четырехканальная СМО (N=4), которая является ремонтной мастерской. Известно, что в час в мастерскую поступает 9 автомобилей. При этом скорость обслуживания каждого из четырех механиков равна 2,5 автомобилей в час.

Дано:

$\lambda = 9 \frac{\text{запросов}}{\text{час}}$;

$\mu = 2{,}5 \frac{\text{запросов}}{\text{час}}$;

n=4;

k=1, 2, 3, 4;

Найти:

1. Вероятности состояний данного СМО, если система является СМО с отказами.
2. Значения параметров эффективности данного СМО.

Решение

Вероятность отсутствия требований P_0определяется из выражения:

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!}\right]^{-1} = 0{,}09 = 9\%$$

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_N = \frac{\rho^N/N!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i/i!} = 0{,}64 = 64\%$$

Среднее число занятых узлов обслуживания:

$$M_{\text{зан}} = \rho(1 - P_N) = 1{,}5$$

Среднее число свободных узлов обслуживания:

$$M_{\text{св}} = N - M_{\text{зан}} = 0{,}5$$

Относительная пропускная способность определяется по формуле:

$$Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_N = 0{,}36 = 36\%$$

Абсолютная пропускная способность СМО с отказами равняется:

$$A = \lambda P_{\text{обс}} = 3{,}24 \, \frac{\text{запросов}}{\text{час}}$$

Коэффициент занятости узлов обслуживания определяется отношением средним числом занятых каналов к общему числу каналов:

$$K_З = \frac{M_{\text{зан}}}{N} = 0{,}75$$

Ответ:

Вероятность отсутствия требований = 9%;

Вероятность отказа = 64%;

Среднее число занятых узлов обслуживания = 1,5;

Среднее число свободных узлов обслуживания = 0,5;

Относительная пропускная способность = 36%;

Абсолютная пропускная способность = $3{,}24 \, \frac{\text{запросов}}{\text{час}}$;

Коэффициент занятости узлов обслуживания = 0,75 = 75%

Концептуальная постановка

Концептуальная постановка подразумевает собой выдвижение гипотез исследования, составление перечня основных вопросов.

Выдвигаемые гипотезы:

1. Поток требований должен быть простейшим (см. выше), свойство стационарности обеспечим допущением, что рассматриваются ограниченные периоды работы СМО (например, только утренние часы, или только вечерние).
2. Длина очереди может быть ограниченной или неограниченной. Будут рассматриваться СМО с ограниченной очередью и с неограниченной очередью.
3. Скорость обслуживания разных каналов одинакова. Все каналы будут обслуживать клиентов с одинаковой скоростью.
4. Скорость притока клиентов постоянна.

Математическая постановка

Постоянные λ и μ в реальной модели вводиться не будут, так как формулы, предоставленные выше, не позволят **симулировать** роботу СМО. Однако будут разыгрываться интервалы между заявками и интервалы работы каналов как некоторые случайные величины, при помощи генератора случайных чисел в среде разработки Lazarus.

В продукте за исходные данные взяты:

- Посекундный отсчёт времени с начала работы СМО
- Переменные длины промежутков между заявками
- Постоянные параметры производительности каналов.
-

Каждый раз моделировалось одинаковое время работы СМО.

Были выбраны переменные длины промежутков между заявками и постоянные параметры производительности для того, чтобы было возможно сравнение поведения одного и того же рассматриваемого СМО при разных обстоятельствах.

Выходные данные:

- Время занятости каждого канала
- Число обработанных и отклонённых заявок

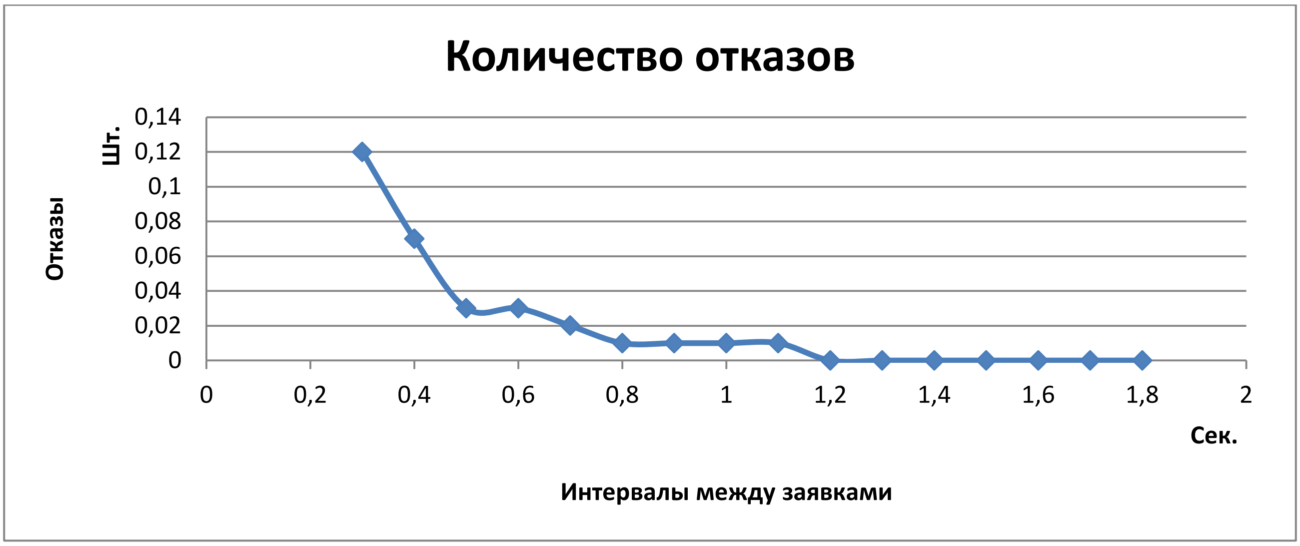
Результаты

В качестве выходных данных продукта были получены:

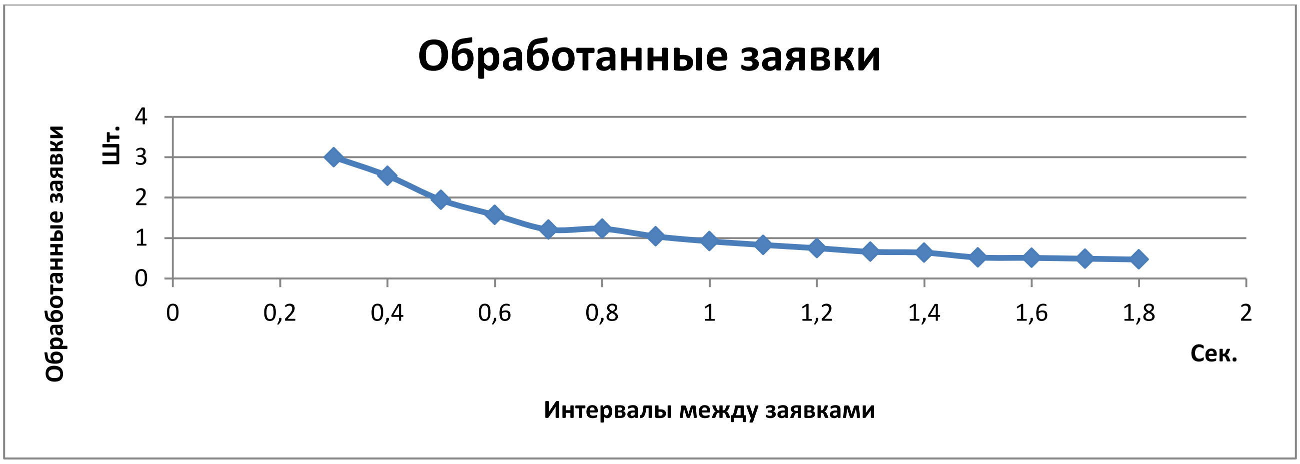
- Количество отклонённых запросов
- Времена занятости каналов
- Количество обработанных запросов.

Также построены графики зависимости количества отказов, обработанных заявок и доли отказов от длины интервала между заказами.

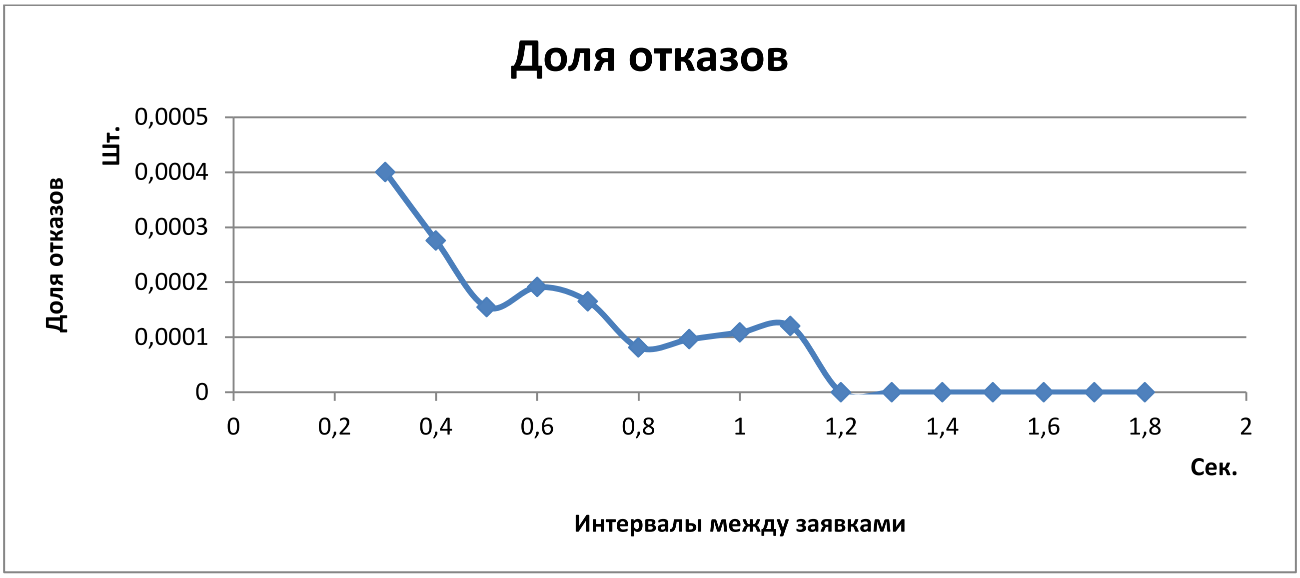
Отношение количества отказов к максимальному значению интервала между заявками (Рис.1)



Отношение количества обработанных заявок к максимальному значению интервала между заявками (Рис.2)



Отношение доли отказов к максимальному значению интервала между заявками (Рис.3)



Заключение

В ходе исследования было изучено, определено и рассмотрено:

1. Основы математического моделирования
2. Основные понятия СМО
3. Рассмотрена классификация СМО
4. Определён объект исследования, его характеристики и свойства
5. Определены исходные и выходные данные
6. Определены гипотезы и упрощения для данного исследования
7. Изучена математическая постановка СМО с бесконечной очередью и СМО с отказами
8. Рассмотрена, изучена и решена предполагаемая задача для СМО с отказами.
9. Создана модель, симулирующая работу СМО с отказами.

Были аналитически рассчитаны вероятности состояний и параметры эффективности для:

- СМО с ожиданием
- СМО с отказами

Дальнейшее развитие

- Усовершенствование модели в виде добавления очередей, добавления подходящих методов генерации случайных чисел и т.д.
- Возможно, предложение мер по улучшению эффективности СМО (т.к. модель управленческая).
- Расширение круга используемого теоретического материала.

Список литературы

1. Ашихмин В.Н. Введение в математическое моделирование. М.: Логос. 2007. 439 с.
2. Авсиевич.А.В, Авсиевич.Е.Н. Теория массового обслуживания: Потоки требований, системы массового обслуживания: Методические указания и контрольные задания для студентов специальности 071900 «Информационные системы и технологии» заочной формы обучения. Самара: СамГАПС. 2004. 24 с.