Краевая научно- практическая конференция

учебно- исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Практическое применение треугольников при измерительных работах

Ширинкина Ирина Михайловна,

9 А кл., МАОУ СОШ №135, г. Пермь,

Мартьянова Любовь Ивановна,

учитель математики

МАОУ СОШ №135, г. Пермь

Пермь, 2016

Содержание

1 Введение

Еще в глубокой древности люди начали проводить измерения на поверхности Земли. Несколько тысячелетий назад египтяне после ежегодного разлива Нила научились восстанавливать границы своих полей и рисовать их планы. Так родилась геометрия — наука об измерении Земли. В наше время геометрия – это не просто наука о свойствах треугольников, параллелограммов, окружностей и других фигур. Геометрия – это целый мир, который окружает нас с самого рождения.

Геометрия – это не просто наука о свойствах геометрических фигур. Геометрия – это целый мир, который окружает нас с самого рождения. Ведь все, что мы видим вокруг, так или иначе относится к геометрии, ничто не ускользает от ее внимательного взгляда. Геометрия помогает человеку идти по миру с широко открытыми глазами, учит внимательно смотреть вокруг и видеть красоту обычных вещей, смотреть и думать, думать и делать выводы.

Цель: Изучение применения подобия треугольников при измерительной работе на местности.

Задачи:

1 Уметь применять признаки подобия треугольников при решении геометрических задач на местности.

2 Разобрать решения задач различного уровня сложности, решаемые методом подобия.

3 Провести практическую работу.

Интересно то, что без каких - либо инструментов, можно измерить высоту столба, пирамиды, колокольни, дерева, ширину реки, озера, оврага, длину острова, глубину пруда и т.д. В ходе работы были применены следующие методы: обзор литературы, практическая работа, сравнение. Работа носит практико-ориентированный характер, так как практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов исследования на уроках геометрии, в повседневной жизни.

2 Историческая справка

Учение о подобии фигур было создано в Древней Греции в V – IV веке до н.э. трудами Гиппократа Хиосского, АрхитаТарентского, ЕвдоксаКнидского и других. Оно изложено в шестой книге «Начал» Евклида, начинающейся следующим определением: «Подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны». Свойства подобных фигур издавна широко использовались на практике при составлении планов, карт, при выполнении архитектурных чертежей и чертежей различных деталей машин и механизмов. Жители Древнего Египта задались вопросом: «Как найти высоту одной из громадных пирамид?» Фалес нашёл решение этой задачи. Он воткнул длинную палку вертикально в землю и сказал: «Когда тень от этой палки будет той же длины, что и сама палка, тень от пирамиды будет иметь ту же длину, что и высота пирамиды».

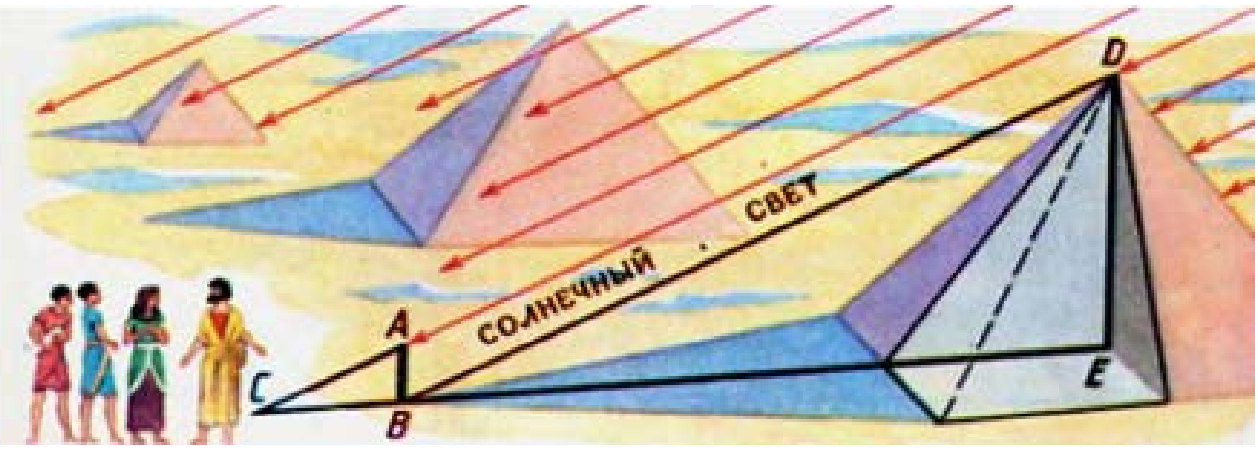


Рисунок 1

Нить практической геометрии тянулась от вавилонян и древних египтян. Некоторые черты развития практической геометрии можно отметить и в Древней Руси. Уже в XVI веке в России нужды землемерия, строительства и военного дела привели к созданию рукописных руководств геометрического содержания. Первое дошедшее до нас сочинение носит название "О земном верстании, как землю верстать". Оно является частью "Книги сошного письма", написанной в 1556 году при Иване IV. Сохранившаяся копия относится к 1629 году. При разборе Оружейной Палаты в Москве в 1775 году была обнаружена инструкция "Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до военной науки", изданная в 1607 и 1621 годах. Инструкция содержит некоторые геометрические сведения, которые сводятся к определенным приемам решения задач на нахождение расстояний.

3 Подобие треугольников

3.1 Подобные треугольники

Подобные треугольники — треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного соответственно пропорциональны сторонам другого треугольника.

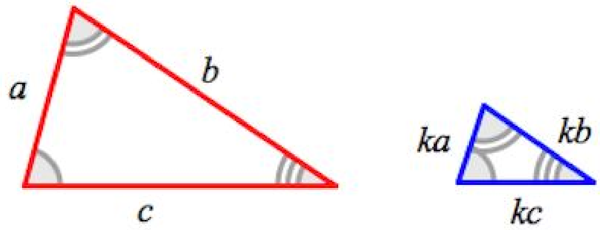


Рисунок 2

Коэффициентом подобия называют число **k**, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников.

Сходственные (или соответственные) стороны подобных треугольников — стороны, лежащие напротив равных углов.

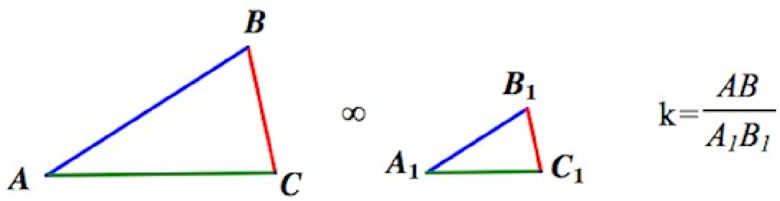


Рисунок 3

3.2 Признаки подобия треугольников

<u>Первый признак подобия треугольников</u>

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

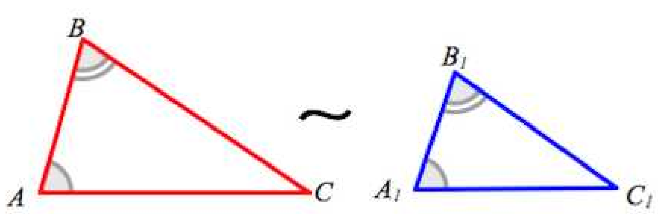


Рисунок 4

Если $\angle B=\angle B_1$ и $\angle C=\angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Второй признак подобия треугольников

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

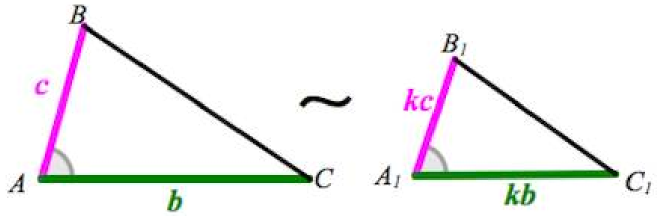


Рисунок 5

Если$ABA_1B_1=ACA_1C_1$и$\angle A=\angle A_1$, то$\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

Третий признак подобия треугольников

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

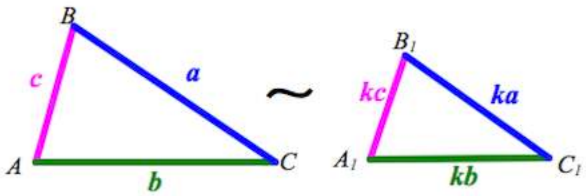


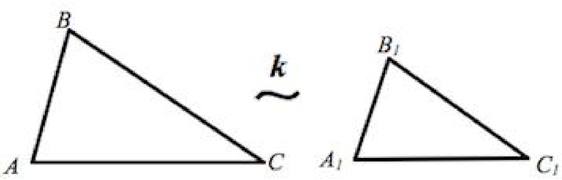
Рисунок 6

Если $ABA_1B_1=BCB_1C_1=ACA_1C_1$, то $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

Свойства подобных треугольников:

- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

- Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.



$$\Rightarrow \quad \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}=k; \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=k^2$$

Рисунок 7

- Отношение длин соответствующих элементов подобных треугольников (в частности, длинбиссектрис,медиан,высоти серединных перпендикуляров) равно коэффициенту подобия.

4 Применение подобия треугольников при измерительных работах

Задачи на нахождение расстояний всегда имели и имеют большое значение в военном деле.Многие задачи, требующие нахождения расстояния на местности решаются с помощью признаков подобия треугольников, но чаще всего применяется первый признак подобия треугольников по двум углам. Рассмотрим некоторые из них.

4.1 Задача на определение высоты предмета по длине его тени

Самый простой способ состоит в том, что в солнечный день можно пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ab}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{bc}}$(смотри рисунок 8). Т.е. высота дерева во столько раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее тени человека (или тени шеста). Это вытекает из геометрического подобия треугольниковABCиabc(по двум углам).

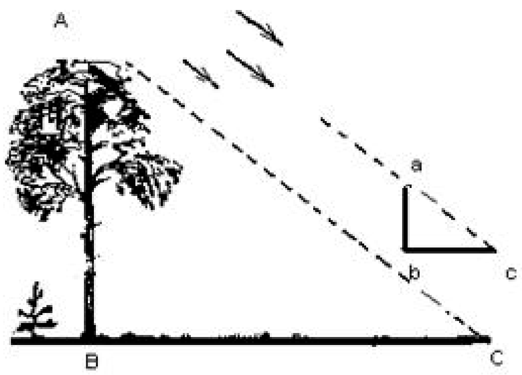


Рисунок 8

Этот способ называется способ Фалеса. В честь греческого мудреца Фалес Милетского, который научил египтян определять высоту пирамиды по длине ее тени еще за шесть веков до нашей эры.

<u>Преимущества способа Фалеса:</u>

- не требуются вычисления.

<u>Недостатки:</u>

- нельзя измерить высоту предмета при отсутствии солнца и, как следствие, тени.

4.2 Задача на определение высоты предмета с помощью прямоугольного треугольника

Для того, чтобы измерить высоту дерева BD, нужно приготовить равнобедренный прямоугольный ΔAB_1C_1($\angle A=45°$) и, держа его вертикально, отойти на такое расстояние, при котором, глядя вдоль гипотенузы AB_1, нужно увидеть верхушку деревaB.

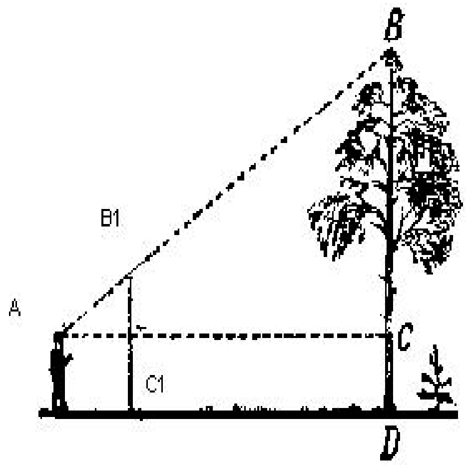


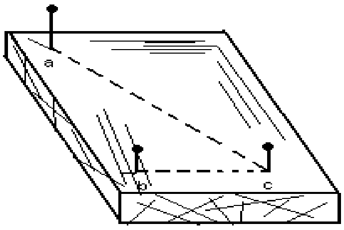
Рисунок 9

Так как$\angle A$общий для обоих треугольников, $\angle AC_1B_1=\angle ACB=90^o$ (по условию), то$\triangle AC_1B_1$и$\triangle ACB$– подобные (по признаку подобия о двух углах).

Тогда$\angle AB_1C_1=\angle ABC=45^o$, =>BC=AC, но к получившейся длине мы должны еще прибавить рост человека, то есть длина деревaBD=BC+CD.

4.3 Задача на определение высоты предмета с помощью булавочного прибора

Можно воспользоваться свойствами равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к весьма простому прибору, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формынамечают три точки – вершины равнобедренного прямоугольного треугольника – и в них втыкают по булавке (смотри рисунок10).



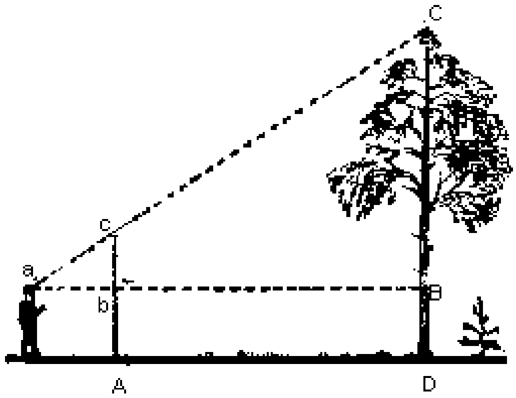


Рисунок 10

Если нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон, то можно перегнуть любой кусок бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, - получим прямой угол. Та же бумага пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния. Отойдя от измеряемого дерева, нужно держать прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можно пользоваться ниточкой с грузиком, привязанным к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, всегда можно найти такое местоA(смотри рисунок 10), из которого, глядя на булавкиаис, можно увидеть, что они покрывают верхушку Сдерева: это значит, что продолжение гипотенузы аспроходит через точкуС. Тогда, очевидно, расстояние aB=CB, так как $\angle a=45^{o}$. Следовательно, измерив расстояниеaB(или на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD)и прибавивBD,т.е. возвышениеaAглазанад землей, получим искомую высоту дерева.

4.4 Задача на определение высоты предмета с помощью шеста

При отсутствии тени в пасмурную погоду можно воспользоваться способом измерения, который живописно представлен у Жюль Верна в известном романе «Таинственный остров».

Необходимо воткнуть шест в землю. Место для шеста надо выбирать так, чтобы, лежа, как показано на рисунке 11, было видно верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как $\triangle Abc$– равнобедренный и прямоугольный, то$\angle A=45^o$ и, следовательно,AB=BC, т.е. искомой высоте дерева.

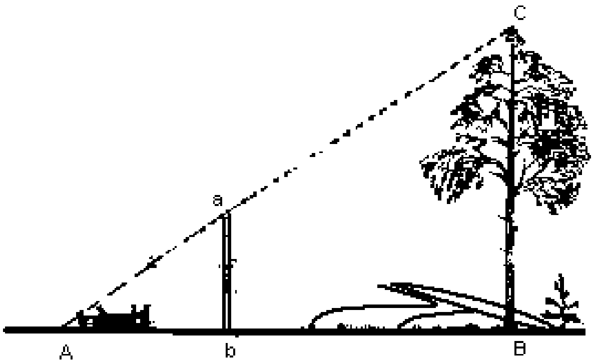


Рисунок 11

<u>Преимущества способа Жюль Верна:</u>

- можно производить измерения в любую погоду;
- простота формулы.

<u>Недостатки:</u>

- нельзя измерить, высоту предмета не испачкавшись, так как приходится ложиться на землю.

4.5 Задача на определение высоты предмета с помощью записной книжки и карандаша

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты можно использовать карманную записную книжку и карандаш. Она поможет построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота.

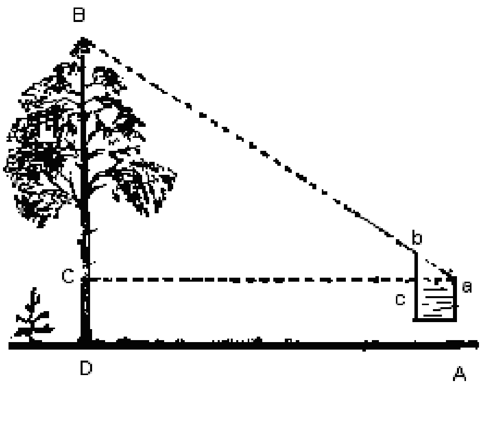


Рисунок 12

Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощенном рисунке 12. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигаться над верхнем обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки авидеть вершинуВдерева покрытой кончиком bкарандаша. Тогда вследствие подобия треугольников abcиaBCвысотаBCопределяется из пропорции BC : bc=aC:ac.

Расстояние bc, ac и aC измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить еще длину CD,т.е. – на ровном месте – высоту глаза над почвой. Так как ширинаacкнижки неизменна, то если всегда становитьсяна одном и том же расстоянии от измеряемого дерева, высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части bc карандаша. Поэтому можно заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер.

4.6 Задача на определение высоты предмета с помощью зеркала

Своеобразный способ определения высоты дерева при помощи зеркала. На некотором расстоянии (смотри рисунок 13) от измеряемого дерева, на ровной земле в точке Складут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой наблюдатель видит в зеркальце верхушку Адерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя (ED), во сколько раз расстояниеBCот зеркала до дерева больше расстояния CDот зеркала до наблюдателя.

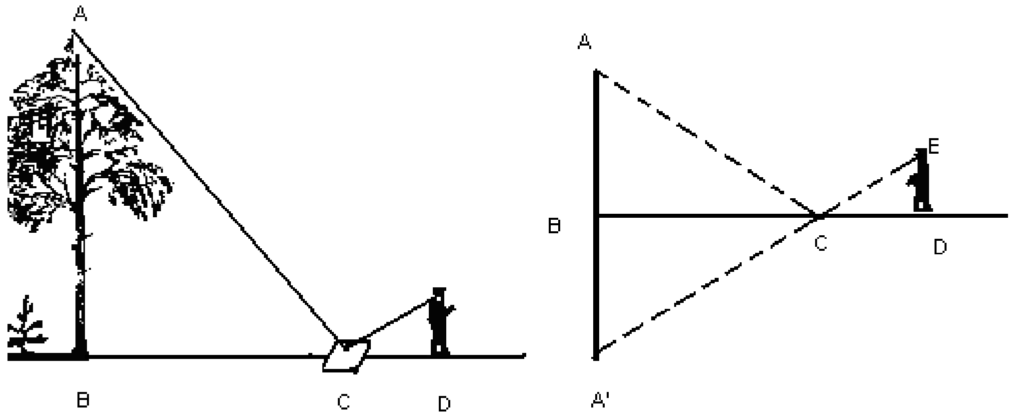


Рисунок 13

Способ основан на законе отражения света. Вершина A(смотри рисунок 13) отражается в точкеAтак чтоAB=A’B.Из подобия же треугольников BCA’иCEDследует, чтоA’B:ED=BC:CD.

В этой пропорции остается лишь заменить A’B равным ему AB, чтобы обосновать указанное соотношение.

Преимущества способа:

- можно производить измерения в любую погоду;
- простота формулы.

Недостатки:

- нельзя измерить, высоту предмета в густом насаждении, применяется к одиноко стоящему дереву.

4.7 Задача на определение высоты предмета с помощью высотомера лесника

На рисунке 14 изображенвысотомер лесника.Он представляет собой прямоугольную пластинку размером 10X10 см с закрепленным в точке Aотвесом, шкалой на сторонеBCи визирами в точках AиD.Наведя с помощью визиров сторону ADна вершину дереваEи заметив деление шкалы, которое показывает отвесAF,лесник с помощью несложной формулы и находит высоту дерева. Пусть, например, BF=3 см. Докажем, что H – h = 0.3d.

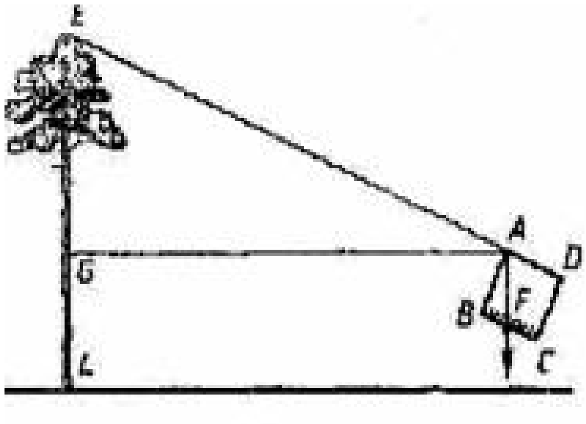


Рисунок 14

H — высота дерева, h — высота человека на уровне глаз, d — расстояние от дерева до человека (все размеры в метрах).

Решение:Так как $\angle GEA = \angle AFB$,то прямоугольные треугольники EGA и FBAподобны. Поэтому (все размеры в см):

$$\frac{GE}{BF} = \frac{GA}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{100(H-h)}{3} = \frac{100d}{10}$$

4.8 Задача на доказательство подобия треугольников

Дано:

треугольник Δ ABC, два угла

$\angle$ A = 54°

$\angle$ B = 18°

CH – биссектриса угла $\angle$ C

Доказать:$\Delta BHC \sim \Delta ABC$

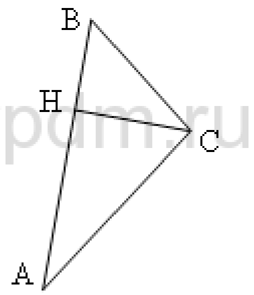


Рисунок 15

Доказательство:

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$

$\angle C = 180^\circ - (54^\circ + 18^\circ) = 108^\circ$

Т.к. CH – биссектриса угла $\angle$C, то углы равны

$\angle BCH = \angle HCA = 108^\circ : 2 = 54^\circ$

Рассмотрим Δ BHC

$\angle HBC = \angle B = 18^\circ$

$\angle BCH = \angle A = 54^\circ$

Тогда CHB = C = 108°

Поэтому треугольники подобны $\Delta BHC \sim \Delta ABC$.

4.9 Задача на нахождение высоты здания

Найдите высоту здания (в метрах), длина тени которого равна 27 м, если тень человека ростом 1 м 60 см равна 2 м 40 см.

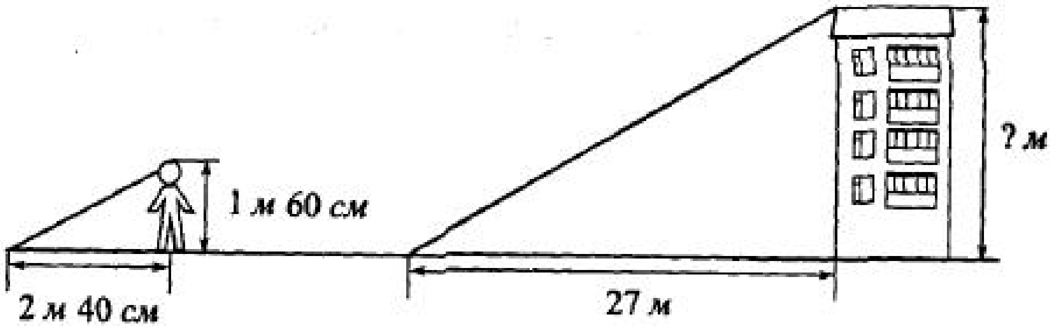


Рисунок 16

Решение: Треугольники подобны (по двум углам), значит можно составить пропорцию, например, такую: $\frac{1.6}{2.4} = \frac{x}{27}$

Тогда x=(27*1.6)/2.4=(27*16)/24=18 (м).

4.10 Задача на определение расстояния до недоступной точки

Для того, чтобы найти расстояние от пункта А до недоступного пункта В выбираем точку С, провешиваем отрезок АС и измеряем его. Затем измеряем углы А и С. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник А1В1С1, у которого угол А1 равен углу А, угол С1 равен углу С, и измеряем длины сторон А1В1 и А1С1 этого треугольника. Так как треугольники АВС и А1В1С1 подобны, то из пропорциональности их сторон найдём АВ.

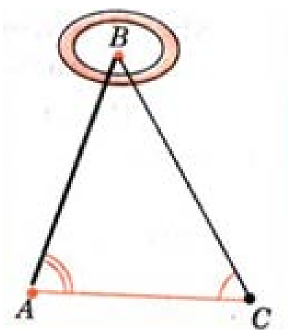


Рисунок 17

4.11 Задачи на нахождение расстояний

Задача «Неприятельская вышка». Открытый участок дороги находится на полосе АВшириной в 50 м; неприятельский наблюдательный пункт находится на верху колокольни высотой MN=22 м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску КВ на расстоянии 500 м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?

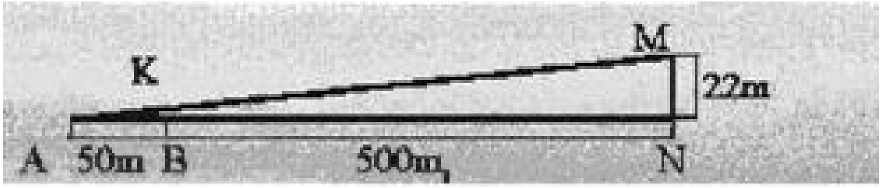


Рисунок 18

Дано:△AMN, AB=50 м, MN=22м, BN=500 м.

Найти:KB.

Решение:△AKB ~ △AMN(по двум углам:∠A–общий,∠ABKи∠ AMN– прямые, а если треугольники подобны, то все его элементы тоже подобны.

То есть,$\frac{BN}{AB} = \frac{MN}{KB} = k$, а $k = \frac{550}{50} = 11$

Следовательно,$KB = \frac{MN}{k} = 2$м

4.12 Задачи на определение расстояния до кораблей в море

Необходимо расстояние от точки A, находящейся на берегу до корабля.

Дано:∠A=∠1;∠B=∠2;AB=a.

Найти:AK.

Решение:

Первый способ.Пусть корабль находится в точке K, а наблюдатель в точкеA. Требуется определить расстоянияKA. Построив в точке Aпрямой угол, необходимо отложить на берегу два равных отрезка AB=BC. В точке вновь построить прямой угол, причем наблюдатель должен идти по перпендикуляру до тех пор, пока не дойдет до точки D, из которой корабльKи точкабыли бы видны лежащими на одной прямой. Прямоугольный треугольники BCDиBAKравны, следовательно,CD=AK, а отрезокCDможно непосредственно измерить.

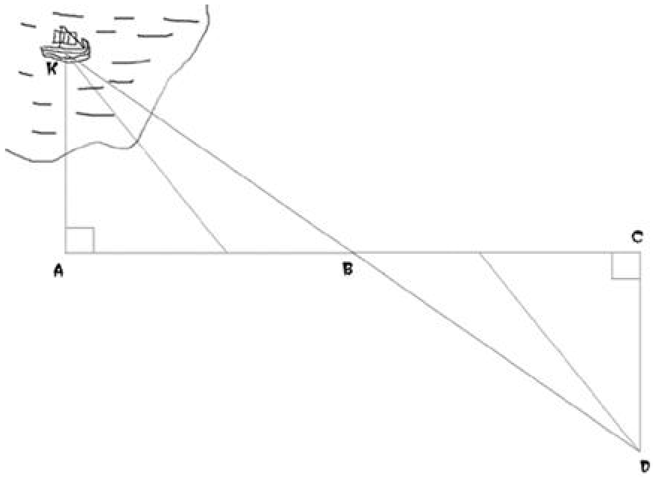


Рисунок 19

<u>*Второй способ.*</u> Получил название - метод триангуляции, нашел применение в астрономии. С его помощью измерялись расстояния до небесных тел.

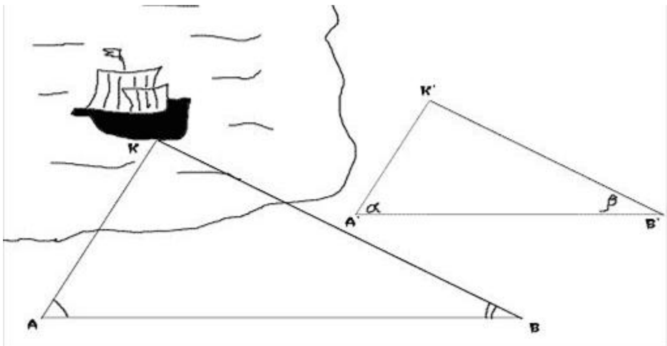


Рисунок 20

Этот метод состоит из трех этапов:

1 Измерение углов 1 и 2 и расстоянияAB.

2 Построение△A'B'K'с углами 1 и 2 при вершинахA'и B'соответственно.

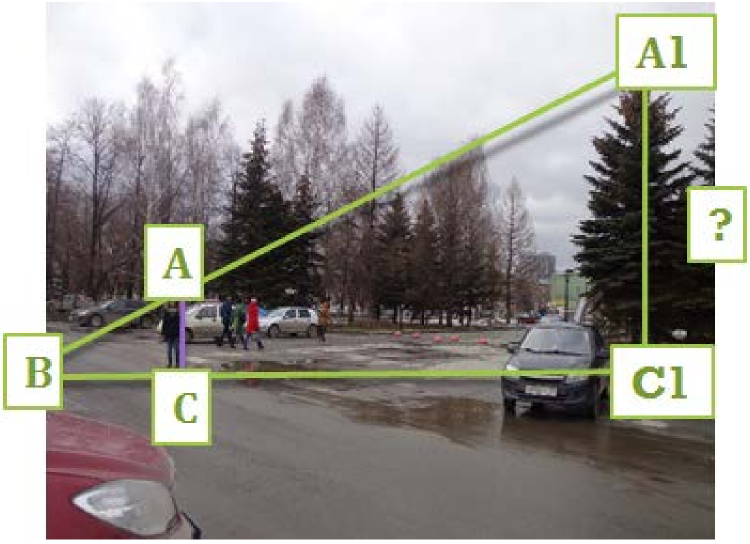
3 Учитывая подобие треугольников ABK,A'B'K'и равенство

$\frac{AK}{AB} = \frac{A'K'}{A'B'}$, по известным длинам отрезковAB,A'K' и A'B'нетрудно найти длину отрезка AK. $AK = \frac{A'K' \cdot AB}{A'B'}$

5 Исследовательская часть

5.1 Задача на нахождение расстояния

Измерим высоту дерева с помощью полученных знаний о подобных треугольниках. Для этого выйдем на местность, выберем объект измерения — дерево.На некотором расстоянии от него установим шест, в моем случае шестом будет служить мой рост, и сфотографируем. Затем измерим расстояние от объекта до шеста, мне понадобится рулетка. Мне так же потребуется знать расстояние от шеста до пересечения гипотенузы с землёй.



Дано: CC_1=9 м,расстояние от дерева до меня (шест)

AC=1.64 м, мой рост

BC=2.4 м, расстояние от меня (шест) до точки пересечения гипотенузы с землей.

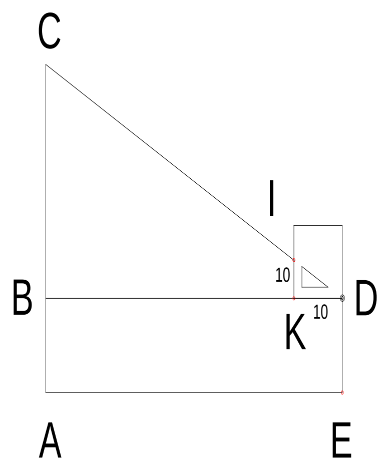
Найти: A_1C_1 – высота дерева.

Решение: т.к. $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1 B_1 C_1$ (по двум углам), отсюда следует $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$ $A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC} = \frac{1.64 \cdot 9}{2.4} = 6.15$

Ответ: высота дерева равна 6.15 м.

5.2 Определение высоты столба с помощью планшета

Для измерения столба мне понадобились: планшет с изображением прямоугольного равнобедренного треугольника, нить с грузиком, рулетка. Катеты, изображенного прямоугольного равнобедренного треугольника, равны 10 см. Затем измерила расстояние от столба до меня. Так же мне понадобилось знать мой рост до глаз.



Дано: BD=6.12 м, расстояние от меня до столба

DE = 1.55 м, мой рост до глаз

Найти: AC – высота столба

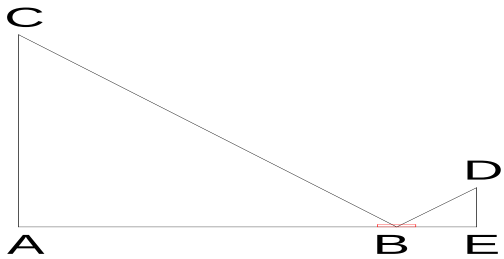
Решение:так как треугольник на планшете и $\triangle$BCD подобны, оба прямоугольные равнобедренные, то BC=BD

Следовательно, AC=BC+AB=BC+DE=6.13+1.54=7.67

Ответ: высота столба равна 7.67 м.

5.3 Определение высоты столба с помощью зеркала

Для измерения столба мне понадобились: зеркало, рулетка.Положив зеркало на землю, я передвигала его до тех пор, пока не увидела в нём отражение нижнего изолятора.Затем измерила расстояние от зеркала до столба и расстояние от зеркала до меня. Так же мне понадобилось знать мой рост до глаз.



Дано: AB= 7.1 м, расстояние от зеркала до столба

BE=1.5 м, расстояние от зеркала до меня

DE = 1.55 м, мой рост до глаз

Найти:AC – высота столба

Решение:△ACB подобен △BED по двум углам

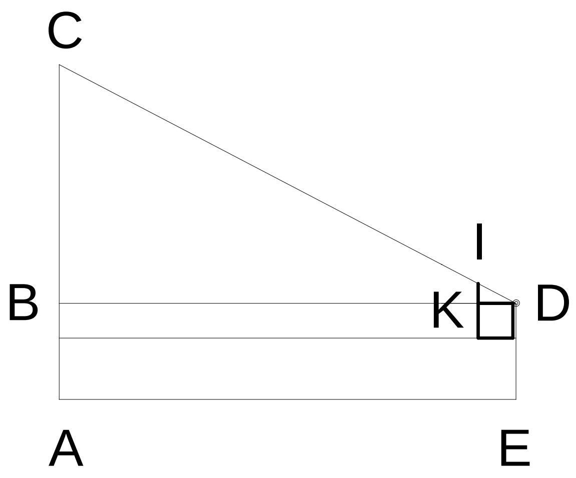
Следовательно, $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE}$ $\frac{AC}{1.55} = \frac{7.1}{1.5}$ $AC = \frac{1.55 \cdot 7.1}{1.5}$

AC=7.34

Ответ: высота столба равна 7.34 м.

5.4 Определение высоты столба с помощью книжки и карандаша

Для измерения столба мне понадобились: книга, карандаш, рулетка. Я измерила ширину книги и выдвинула карандашнад книгой на расстояние 7 см. Затем измерила расстояние от меня до столба.Так же мне понадобилось знать мой рост до глаз.



Дано:KD=15 см, ширина книги

IK =7 см, расстояние, на которое выдвинуткарандаш над книгой

AE=13.2 м, расстояние от меня до столба

DE = 1.55 м, мой рост до глаз

Найти:AC – высота столба

Решение:△CBD подобен △IKD по двум углам

Следовательно, $\frac{BC}{BD} = \frac{IK}{KD}$ $\frac{BC}{0.07} = \frac{13.2}{0.15}$

$BC = \frac{0.07 \cdot 13.2}{0.15}$ BC = 6.16

AC=BC+AB=BC+DE=6.16+1.55=7.71

Ответ: высота столба равна 7.71 м.

Получив три значения высотыэлектрического столба, я занесла полученные данныев таблицу 1. Также я узнала, что высота электрических столбов равна 7.5 м.

Таблица 1

Метод	Результат вычислений	Фактически	Погрешность
С помощью планшета	7.67 м	7.5 м	+0.17
С помощью зеркала	7.34 м	7.5 м	-0.16
С помощью книги и карандаша	7.71 м	7.5 м	+0.21

Из таблицы 1 видно, что метод определение высоты столба с помощью зеркала наиболее близок к фактической высоте столба. Так же этим методом можно производить измерения в любую погоду и вместо зеркала можно использовать лужу.

6 Заключение

Решение задач на нахождение расстояний при помощи подобия треугольников всегда имели и имеют большое значение в составлении планов местности, строительстве, в военном деле.

7 Выводы

В результате проведенной работы я повторила признаки подобия треугольников и разобрала решения задач различного уровня сложности, решаемые методом подобия. Я думаю, чтоэтопоможетмнеприподготовке к экзаменам по математике.

Я научилась видеть подобные треугольники в различных ситуациях, умею правильно записывать отношения сходственных сторон, по известным элементам, вычислять неизвестные, используя свойства пропорции.

Подобие треугольников применяется в повседневной жизни довольно часто. Для себя я выяснила на конкретных примерах, что с помощью подобия можно найти высоту или расстояние до недоступной точки.Я смогу применять метод подобия для решения практических задач.

Интересен материал из истории подобия, скоторымяознакомилась. Думаю, что те, кто изучит данный материал, тоже углубят свои знания в одной из областей геометрии.

8 Литература

8.1 Энциклопедический словарь юного математика, Москва, «Педагогика», 1983 год.

8.2 В.Г.Болтянский «Элементарная геометрия», Москва, «Просвещение», 1985 год.

8.3 Г.И.Глейзер «История математики в школе», Москва, «Просвещение», 1982 год.

8.4 В.Н.Ганьшин «Простейшие измерения на местности», Москва, «Недра», 1983 год.

8.5 Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов «Геометрия 7-9 класс», Москва, «Просвещение», 2010 год.