Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Геометрия треугольника

Смирнова Мария Сергеевна,

9 класс, МАОУ «СОШ №1», г. Горнозаводск,

Данько Татьяна Александровна,

Учитель математики, «Почетный работник

общего образования Российской Федерации»

МАОУ «СОШ №1», г. Горнозаводск.

Пермь. 2016.

Содержание

Введение

Геометрия как предмет – наиболее уязвимое звено школьной математики. Решение геометрических задач вызывает трудности у многих учеников. Это связано как с обилием различных типов задач, так и с многообразием приемов и методов их решения. В отличие от алгебры, в геометрии нет стандартных задач, решающихся по образцу. Практически каждая задача требует «индивидуального» подхода. Программа для общеобразовательных школ по геометрии не акцентирует внимание на методах решения задач.

Простейший из многоугольников треугольник - играет в геометрии особую роль. За несколько тысячелетий математики очень подробно изучили треугольник, поэтому иногда говорят о "геометрии треугольника" как о самостоятельном разделе элементарной геометрии. Центральное место в треугольнике занимают его свойства. Просматривая экзаменационные работы за 9 и 11 класс, увидела, что в них есть множество задач на применение свойств треугольника, но мне не хватает знаний, полученных на уроках и я не знаю многих методов, с помощью которых можно рационально решать эти задачи.

Проанализировав литературу, я узнала, что математики и психологи по-разному проводят классификацию методов. Так основными методами решения геометрических задач В.А. Гусев и В.Н. Литвиненко считают следующие три метода: геометрический, алгебраический и комбинированный [4].

Э.Г. Готман, И.А. Кушнир, И.Д. Новиков, В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин показывают в своих работах возможность использования метода площадей и объемов для решения некоторых видов задач. В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко говорят о применении соответственно координатного метода.

Т.Т. Фискович выделяет в отдельные методы метод геометрических мест, метод применения тригонометрии к решению геометрических задач, метод применения начал анализа к решению геометрических задач.

Эвристические методы решения задач рассматривались математиками А. Пуанкаре и Ж. Адамаром, психологами Ю.Н. Кулюткиным и Л.М. Фридманом, методистами Д. Пойа и Ю.М. Колягиным. Эвристический метод решения задачи, как отмечает Л.В. Виноградова, не является приемом в полном смысле слова [1]. Эвристики лишь помогают делать поиск задачи.

Интересны идеи классификации методов решения геометрических задач предложенные З.А Скопецем и Э.Г. Готманом [2]. Они объединяют большую группу методов решения геометрических задач в один класс – аналитические методы: алгебраический метод (применения тождеств, уравнений, неравенств и их систем); применения тригонометрии к решению геометрических задач; применения свойств функций; метод координат.

В школьных учебниках геометрии встречаются задачи на построение, доказательство, вычисления. Поэтому обучение методам решения геометрических задач вызывает большие трудности. Свой выбор я остановила на изучении методов решения задач по теме «Треугольник и его свойства». Данную тему считаю интересной, потому что она имеет прикладной характер, позволяет рассмотреть различные методы решения геометрических задач.

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать геометрические задачи при сдаче экзамена. Большинство задач по планиметрии не решается с помощью жестких алгоритмов, почти каждая геометрическая задача требует своего подхода. Мало иметь те или иные знания, нужно уметь применять их в каждом конкретном случае. Особое значение имеет выработка разнообразных эвристических подходов, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач. Задача выступила не только в качестве иллюстрации теории, но и рассматривалась как самостоятельный объект, как средство развития исследовательской и эвристической деятельности.

Объект исследования - геометрическая задача из раздела «Планиметрия».

Предмет изучения – методы решения задач, связанные с геометрией треугольника.

Гипотеза состоит в том, что изучать различные методы решения геометрических задач лучше на примере одной задачи, если она будет иметь несколько способов решения.

Проблема, предмет, гипотеза исследования обусловили следующие цели и задачи.

Цель работы: поиск рациональных методов решения геометрических задач из раздела планиметрии, связанных с треугольником.

Задачи:

- классифицировать свойства треугольника;
- изучить разнообразные методы, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач;
- выбрать наиболее эффективные методы решения задач разными методами.

В теоретической части работы:

1. даны формулировки свойств треугольника;
2. представлено применение свойств в геометрических задачах.

В исследовательской части работы:

1. проведен опрос учащихся девятых классов на знание свойств треугольника;
2. проанализированы методы решения задач;
3. сделан анализ о том, какие методы решения задач применяют учащиеся девятых классов чаще всего;
4. определены методы для решения 12-ти задач на «геометрию треугольника».

Методы исследования:

1. анализ литературы;
2. математическое моделирование;
3. подбор эффективных методов решения задач с треугольниками.

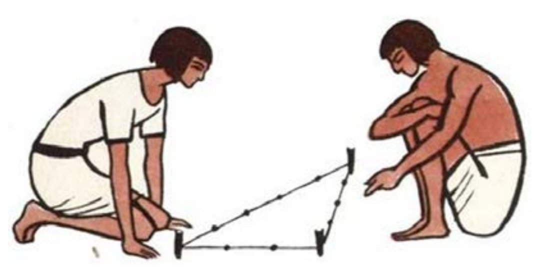
История возникновения треугольника

Треугольник – самая простая замкнутая прямолинейная фигура, одна из первых, свойства которых человек узнал еще в глубокой древности, так как эта фигура всегда имела широкое применение в практической жизни.

Изображения треугольников и задачи на треугольники встречаются во многих папирусах Древней Греции и Древнего Египта. Древнегреческий ученый Герон впервые применил знак «Δ» вместо слова «треугольник».

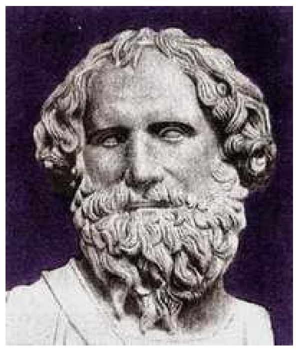
Как известно, с давних времен, существует целая наука тригонометрия ("тригон"- по-гречески означает "треугольник"). С ее помощью можно было, измерив одну сторону и два угла треугольника, найти длины всех его сторон. Но еще ранее с ее помощью научились измерять воображаемые треугольники на небе, вершинами которых были звезды. «Тригон» и его методы широко вошли в курс геометрии и крепко основались. Нет ни одной фигуры, кроме треугольника, у которого существуют столь разнообразные приемы нахождения.

Прямоугольный треугольник занимал почетное место в Вавилонской геометрии.



В Древней Греции уже был известен способ построения прямоугольного треугольника на местности. Для этого использовали веревку, на которой были завязаны 13 узелков, на одинаковом расстоянии друг от друга.

Родоначальником метода масс был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в. до н. э. он обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств центра масс.



Основные свойства треугольников

Рассматривая экзаменационные задачи за 9 и 11 класс, я выделила свойства треугольника, на которые нужно опираться при решении задач. Затем провела тест с учащимися девятых классов, чтобы проверить знают ли они свойства. Как показало тестирование (Приложение №1) ребята плохо владеют материалом. Поэтому, прежде всего, свойства треугольника разбила на следующие группы:

Соотношения между сторонами и углами треугольника

- Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов.
- Теорема синусов: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.
- Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус двоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.
- Против большей стороны лежит больший угол, и наоборот.
- Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.
- Сумма углов треугольника равна 180 °.
- Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
- Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:
  - косинус острого угла прямоугольного треугольника – это отношение прилежащего катета к гипотенузе;
  - синус угла - это отношение противолежащего катета к гипотенузе;
  - тангенс угла - это отношение противолежащего катета к прилежащему катету.
- Теорема Фалеса: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают и на другой его стороне равные отрезки.

Свойства отрезков в треугольнике

- В равнобедренном треугольнике высота, проведенная из вершины, является медианой и биссектрисой.
- Центр тяжести - неизменно связанная с твердым телом точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, действующих на частицы этого тела при любом положении тела в пространстве. Центр тяжести треугольника - точка пересечения медиан.
- В правильном треугольнике совпадают точки пересечения медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров.
- Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.
- В равнобедренном треугольнике высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам, равны.
- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

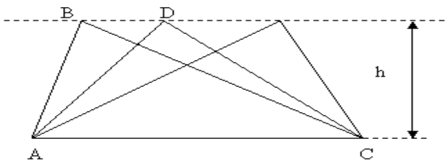
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

- высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой;
- катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла)

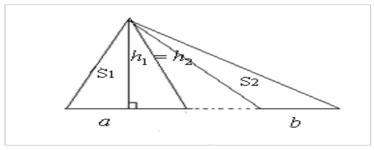
Основные свойства площадей

- $R = \frac{abc}{4S}$; где a, b, c — стороны треугольника, R – радиус описанной около треугольника окружности, S – площадь треугольника.
- $r = \frac{S}{p}$, где S-площадь, а $p = \frac{a+b+c}{2}$, r – радиус вписанной окружности.

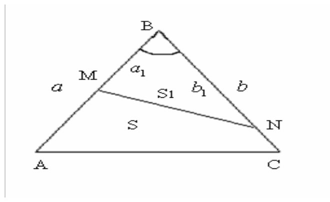
- Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится



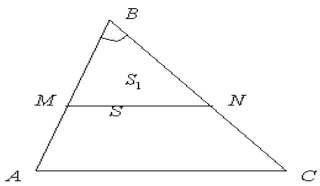
- Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



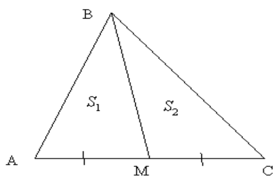
- Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.



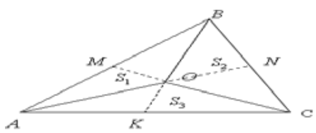
- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



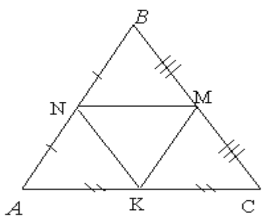
- Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.



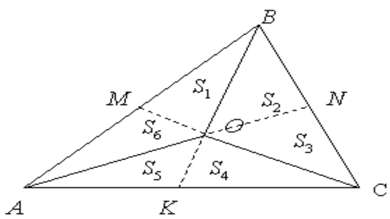
- Медианы треугольника делят его на три равновеликие части



- Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники, площади которых равны одной четвертой части площади Δ ABC



- Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей**.**



Методы решения геометрических задач

После классификации свойств, применяемых в экзаменационных задачах, я провела опрос о том, какие методы решения задач знают учащиеся девятых классов и применяют чаще всего. Оказалось, что это методы площадей, треугольника, геометрических преобразований, подобия, составления уравнений и применения тригонометрии (Приложение №2). То есть из огромного списка существующих методов решения задач, ребята знают лишь шесть. Возникла необходимость изучения методов как для меня, так и для девятиклассников.

В своих работах психологи А.Н. Леонтьева и Я.А. Пономарева указывают на то, что формирование общего принципа решения задач следует начинать с решения тех задач, условия которых оказывают решающее влияние на нахождение метода решения [3].

В чем же заключается искусство – решать задачи? Искусство решать задачи основывается на хорошем знании теории, на знании достаточного количества геометрических фактов и в овладении приёмами и методами решения.

Эти методы обладают некоторыми особенностями: большое разнообразие, трудность формального описания, взаимозаменяемость, отсутствие чётких границ области применения.

При решении геометрических задач используются три основных метода:

- **геометрический** – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;
- **алгебраический** – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;
- **комбинированный** – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других - алгебраическим.

Геометрический метод

Геометрический метод чаще всего используется при решении задач на доказательство. Требуемое утверждение при этом выводится из ряда известных теорем с помощью логических рассуждений. При решении задачи геометрическим методом часто используются методы и результаты решения предшествующих задач. Поэтому полезно выявление связей рассматриваемой задачи с ранее изученными теоремами и решенными задачами. К геометрическим методам также относят:

1. метод дополнительных построений;
2. синтетический метод;
3. метод площадей;
4. метод треугольника;
5. метод геометрических преобразований;
6. метод подобия треугольников;
7. метод замены;
8. метод введения вспомогательного неизвестного;
9. координатный метод.

Геометрические методы связаны с геометрическими объектами, их изменениями, но не выходят за рамки этих объектов.

Метод дополнительного построения

Всякое геометрическое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом. При этом иногда на чертеже, на котором изображено только условие, трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру достроить, эти связи становятся очевидными.

Среди дополнительных построений выделяют:

- проведение прямой через две точки;
- продолжение отрезка или отрезков на определенное расстояние или до пересечения с другой прямой;

- проведение через заданную точку прямой, параллельной или перпендикулярной данной;
- удвоение медианы треугольника с последующим достраиванием треугольника до параллелограмма;
- проведение через одну из вершин треугольника прямой, параллельной его противоположной стороне;
- продолжение до пересечения боковых сторон трапеции;
- проведение через одну из вершин трапеции прямой, параллельной диагонали.

Решение планиметрической задачи начинается с построения чертежа, аккуратное выполнение которого помогает найти связи между элементами фигуры и наметить дальнейшие действия. Дополнительные линии чаще всего проводятся для того, чтобы свести задачу к ранее решенной или просто более простой задаче. Они позволяют включить в задачу новые фигуры с их свойствами, тем самым увеличить число теорем, которые можно использовать при решении задачи.

Синтетический метод решения геометрических задач основан на рассмотрении данных в задаче фигур и сопоставлении их с искомыми фигурами или отношениями между ними. При этом методе каждая задача требует своего подхода. В основе синтетического метода, как и в целом геометрического метода, лежит аксиоматический метод.

Метод площадей состоит в том, что главным объектом данного метода является площадь. Для треугольника площадь довольно просто выражается через разнообразные комбинации элементов треугольника. Поэтому весьма эффективным оказывается прием, когда сравниваются различные выражения для площади данной фигуры. В этом случае возникает уравнение, содержащее известные и искомые элементы фигуры, разрешая которое можно определить неизвестное. Особенность метода площадей в том, что из геометрической задачи он «делает» алгебраическую, сводя все к решению уравнения.

Метод треугольника - основной способ нахождения того или иного элемента в треугольнике с помощью свойств, определяющих соотношения между сторонами и углами треугольника

Метод геометрических преобразований состоит в том, что кроме данных в условии задачи фигур, рассматриваются вспомогательные фигуры, полученные из данных фигур или их элементов при помощи какого-либо частного вида преобразования (осевой симметрии, параллельного переноса, гомотетии и др.). Использование этого метода необходимо при решении достаточно сложных задач, в условии которых не фигурируют геометрические преобразования. В зависимости от использованного частного преобразования метод геометрических преобразований может распределяться на метод осевой симметрии, метод параллельного переноса, метод поворота, метод центральной симметрии, метод подобия.

Метод подобия треугольников применяется в задачах на построение, к доказательству теорем, а так же в задачах, в которых используются свойства подобных треугольников для определения длин пропорциональных отрезков. Метод заключается в следующем. Пусть даны некоторые элементы фигуры: величины углов или сами углы, её линейные элементы и отношения некоторых линейных элементов, т.е. одни данные определяют форму искомой фигуры, а другие - линейные - определяют её размеры. Тогда, используя углы или отношения линейных элементов, строят фигуру, подобную искомой, выбрав коэффициент подобия k, равный отношению соответствующих линейных элементов, затем, используя остальные данные, строят искомую фигуру.

Метод замены широко применяется в алгебре, но не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условии задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

Метод введения вспомогательного неизвестного заключается в том, что, исходя из условия задачи, составляют уравнение (или систему уравнений). В качестве вспомогательных аргументов удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру.

Координатный метод. Координаты на плоскости можно вводить бесконечным числом разных способов. И, решая ту или иную геометрическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще, удобнее. Самые простые координаты называются прямоугольными. Их называют ещё декартовыми по имени Рене Декарта (1596-1650) – французского учёного и философа, который впервые ввел координаты в геометрию (на плоскость).

Алгебраический метод

Алгебраический метод состоит в том, что задачу формулируют так, чтобы в качестве данных и искомых фигур были отрезки. Далее, используя теоремы о свойствах фигур, выражают искомый отрезок через данные в виде формулы и по этой формуле находят этот отрезок [6]. Наиболее распространенным путем получения уравнения является выражение какой-либо величины двумя независимыми способами.

Выделяют следующие виды алгебраического метода:

- поэтапно-вычислительный;
- метод составления уравнений или систем уравнений;
- метод прямого счета;
- метод геометрических мест;
- метод применения тригонометрии к решению геометрических задач;
- метод применения начал анализа к решению геометрических задач.

Метод прямого счета или **поэтапно-вычислительный метод** состоит в поэтапном нахождении ряда промежуточных величин, с помощью которых находят затем и искомую величину.

М**етод геометрических мест** состоит в сведении задачи к нахождению одной точки (или фигуры), удовлетворяющей каким либо условиям, вытекающим из условия задачи. Как правило, одному условию удовлетворяет одна линия, другому – другая. Тогда искомая точка является точкой пересечения этих линий.

Метод применения тригонометрии к решению геометрических задач состоит в составлении формулы выражающей зависимость искомых отрезков (или углов) от данных отрезков (или углов), только формула эта содержит кроме отрезков тригонометрические функции углов.

Метод применения начал анализа к решению геометрических задач состоит в том, что в формулах, связывающих геометрические величины, представляют одну из искомых переменных величин как функцию другой переменной величины и, исследуя эту функцию средствами анализа, находят нужные значения.

Комбинированный метод

Для выбора метода решения геометрических задач при работе с конкретной задачей важен этап, который можно назвать развитием темы задачи. Здесь могут быть рассмотрены задачи, в которых часть данных исходной задачи принимается за искомое, а некоторые искомые считаются данными; задачи, полученные заменой одних объектов другими. По отношению к некоторым задачам с ярко выраженными особенностями (по содержанию и приемам решения) следует на заключительном этапе рассмотреть поучительные выводы из проделанной работы о том, как в подобных случаях находится и осуществляется решение, а также какие особенности задач подсказывают прием решения. Так, при составлении уравнения используются различные геометрические факты, формулы и теоремы. Поэтому реально на практике часто мы имеем комбинацию геометрических и алгебраических методов. При составлении уравнения могут быть избраны также векторный, или координатный методы. При решении геометрических задач могут применяться геометрические преобразования, заданные аналитически, тогда в рамках алгебраического метода говорят о методе геометрических преобразований. При решении конкретной задачи нет необходимости применять какой-либо метод в «чистом виде». На разных этапах решения могут применяться различные методы. В подобных случаях говорят, что задача решается комбинированным методом.

Интересны идеи классификации методов решения геометрических задач предложенные З.А Скопецем и Э.Г. Готманом [2]. Они объединяют большую группу методов решения геометрических задач в один класс – аналитические методы: алгебраический метод (применения тождеств, уравнений, неравенств и их систем); применения тригонометрии к решению геометрических задач; применения свойств функций; метод координат.

Эвристические методы решения задач

Эвристический метод решения задачи не является приемом в полном смысле слова[1]. Это основная идея решения задачи. Знание, которой не дает еще гарантии того, что задача будет решена. Эвристики лишь помогают делать поиск задачи. Выделяют следующие эвристические методы:

- метод опорного элемента;
- метод вспомогательного переменного;
- метод замены;
- метод восходящего анализа;
- метод переформулирования.

Метода опорного элемента. Иногда, нарисовав рисунок фигуры и отметив на нем все данные величины, не удается найти требуемые в задаче отрезки или углы. В этой ситуации может помочь использование метода опорного элемента Он заключается в следующем: один и тот же элемент (сторона, угол, площадь, радиус, средняя линия и т. д.) выражается через известные и неизвестные величины двумя разными способами, и полученные выражения приравниваются.

Метод вспомогательной переменной – эвристика, используемая при решении алгебраических и геометрических задач.

М**етод замены** состоит в том, фигура, о которой идет речь в условии задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче. Данный метод широко применяется в алгебре, но не менее эффективно он может быть применен и в геометрии.

М**етод восходящего анализа** – решение задачи с конца, от требования – к условию. Этот метод наиболее часто используется эвристикой.

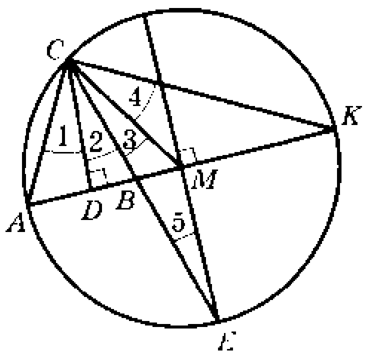
Метод переформулирования заключается в том, что условия или требования, а , возможно, и то и другое одновременно, заменяются на новые, эквивалентные имеющимся, но позволяющие упростить поиск решения.

Выбор метода решения задач в «геометрии треугольника»

«Математика интересна тогда, когда дает пищу нашей изобретательности и способности к рассуждениям», — писал Д. Пойа [5]. Какой бы путь решения ни был выбран, успешность его использования зависит, от метода, знания теорем и умения их применять. Проанализировав различные методы решения задач, я выбрала среди экзаменационных задач для 9 и 11 классов задачи на «геометрию треугольника» и определила рациональные методы их решения.

Задача №1. Найдите углы треугольника, если известно, что медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят соответствующий угол на четыре равных угла.

Данную задачу можно решить с использованием методов дополнительного построения, метода геометрического места точек и поэтапно-вычислительного.



Анализ. Из условия следует, что угол, из вершины которого проведены медиана, биссектриса и высота, имеет вполне определенную величину. Значит, треугольник, о котором идет речь в задаче, определенного вида.

Такими треугольниками являются равносторонний и прямоугольный. Равносторонним данный треугольник быть не может. Треугольник является прямоугольным, так как во всяком треугольнике, вписанном в окружность, серединный перпендикуляр пересекает биссектрисы противолежащего ей угла и смежного с ним угла в точках, принадлежащих окружности.

Решение. Докажем, что точка C лежит на окружности диаметра AK. Для этого достаточно доказать, что точка M (середина AK) - центр окружности. Выполним дополнительное построение – проведем серединный перпендикуляр к отрезку AK. E - точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра принадлежит окружности, описанной около треугольника. CD параллельна ME, CE- секущая.

Тогда ∟2= ∟5. Но ∟2=∟3 (по условию), тогда ∟3=∟5, то есть CM=ME.

Точка М (середина стороны АК треугольника) принадлежит серединному перпендикуляру стороны АК треугольника и равноудалена от точек С и Е, принадлежащих окружности с диаметром АК, описанной около данного треугольника. Значит, ∟С=90°. Тогда ∟CAD=90°-∟ACD=90°-22,5°=67,5°; ∟CKA=22,5°.

Ответ: 90°; 22,5°; 67,5°.

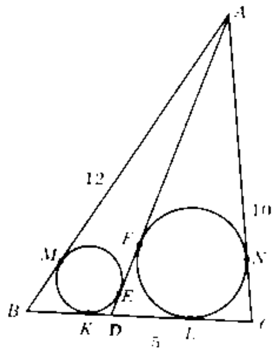
Задача № 2. В треугольнике ABC AB=12, BC=5, AC=10. D лежит на прямой BC так, что BD:DC= 4:9. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ABC и ACD, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Данную задачу можно решить с использованием метода введения вспомогательного элемента и поэтапно-вычислительного метода.

<u>Решение.</u>

BD= $\frac{4}{4+9}$BC= $\frac{20}{13}$= a,

CD=$\frac{4}{4+9}$BC= $\frac{45}{13}$= b,



Пусть DE=x, DF=y, DA=z.

Тогда по свойству касательных

2x=DE+DK=DA+DB-BK-AE=z+a-12.

Аналогично 2y=z+b-10.

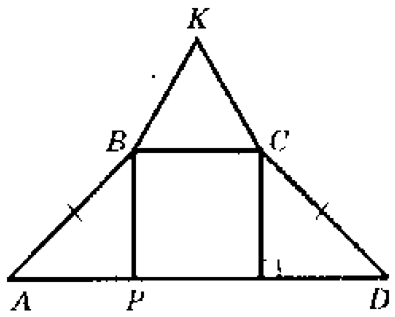
Поэтому 2(y-x)=b-a+12_10=$\frac{45}{13}$ - $\frac{20}{13}$+2= 2+$\frac{25}{13}$, =>EF=y-x=1 $\frac{25}{26}$.

Ответ: 1 $\frac{25}{26}$.

Задача №3. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен равносторонний треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

Данную задачу можно решить с использованием метода введения вспомогательного элемента, метода площадей, метода применения тригонометрии и поэтапно-вычислительного метода.

Анализ. Чтобы найти угол A трапеции, достаточно найти значение какой-либо тригонометрической функции этого угла. Так как условием задачи связаны площади треугольника и трапеции, очевидно, целесообразно найти тангенс угла A, а для этого нужно знать BP и AP.



Решение. Так как условием задачи связаны площади фигур, а линейных величин не задано, введем вспомогательную линейную величину *a*, обозначив ею общую сторону BC треугольника и трапеции. Выразим площадь равностороннего треугольника через *a*: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. По условию высота трапеции равна высоте равностороннего треугольника, а отношение площадей рассматриваемых фигур равно 5. Используя эти данные, составим уравнение и выразим основание AD трапеции через *a*: $\frac{(a+AD)}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}=5\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; a+AD=5a; AD=4a.

По свойству равнобедренной трапеции AP=(4a-a)/2= 3a/2.

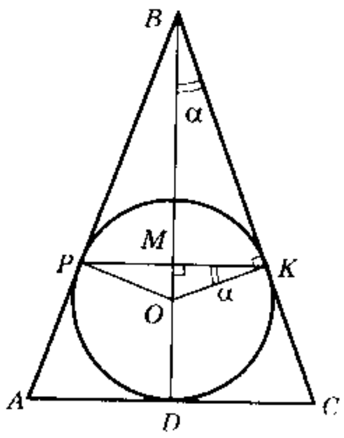
Из прямоугольного треугольника ABP находим тангенс угла A: $tgA=\frac{BP}{AP}$;

$tgA=\frac{a\sqrt{3}/2}{3a/2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Вывод: ∟A=30°.

Ответ: 30°

Задача №4. В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 10см, и основанием, равным 6 см, вписана окружность. Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

Данную задачу можно решить с использованием метода геометрических преобразований, метода применения начал анализа, метода применения тригонометрии.



<u>Анализ.</u> В силу симметрии комбинации данных фигур относительно прямой BD для нахождения расстояния PK достаточно найти расстояние MK. MK можно найти из прямоугольного треугольника MKO, зная OK и косинус угла MKO.

Отрезок OK можно найти по формуле радиуса окружности, вписанной в треугольник. Тригонометрическую функцию острого угла MKO величиной α можно найти, рассматривая треугольник DBC, так как прямоугольные треугольники MKO и DBC имеют равнее острые углы.

<u>Решение.</u> Рассмотрим ΔABC: равнобедренный, BC=10, AC=6, BD - высота, проведенная к основанию. DC= 3, BD= $\sqrt{100-9}$=91, S= 3√91.

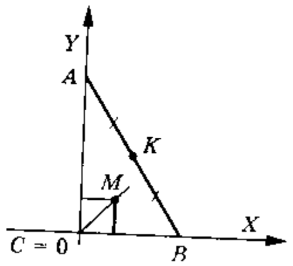
Имеем периметр: P=10+10+6=26, S=3√91, тогда r=$\frac{2\cdot 3\sqrt{91}}{26}$=$\frac{3\sqrt{91}}{13}$.

Из ΔDBC: cosα=$\frac{\sqrt{91}}{10}$. Из ΔMKO: OK=$\frac{3\sqrt{91}}{13}$, cosα $\frac{\sqrt{91}}{10}$, ∟OMK-прямой (в силу симметрии комбинации фигур относительно прямой BD и, как следствие, симметричности точек P и K относительно BD).

Тогда MK=$\frac{3\sqrt{91}\cdot\sqrt{91}}{13\cdot 10}$=$\frac{21}{10}$; KP=$\frac{21}{10}$·2=4,2(см).

Ответ: 4,2 см.

Задача №5. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см. Для решения этой задачи целесообразно применить координатный метод и метод геометрических мест.

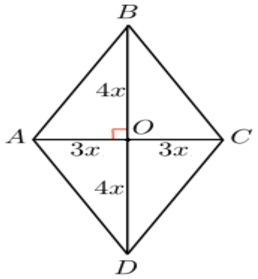


Решение. Пусть ABC - данный треугольник. ∟C=90°, AC=4, BC=3. Поместим его в систему координат: C=0, AC=0Y, BC=0X. Тогда C(0;0), A(0;4), B(0:3).

Пусть К центр описанной окружности, тогда К- середина AB и К(1,5;2). Пусть М - центр вписанной окружности. Координаты точки М равны, так как она принадлежит биссектрисе угла С и каждая из них равна радиусу вписанной окружности. Стороны треугольника составляют 3, 4, 5, тогда $r=\frac{3+4-5}{2}=1$, то есть М(1;1). По формуле расстояния между двумя точками найдем расстояние между центрами окружностей: МК=$\sqrt{(1{,}5-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{1{,}25}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача №6. Диагонали ромба относятся как 3:4 . Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.

Данную задачу можно решить с применением метода площадей и метода опорного элемента.

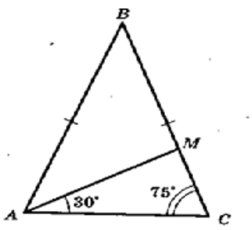


Решение. Диагонали ромба перпендикулярны, значит, треугольник АОВ — прямоугольный. Пусть диагонали ромба равны 6х и 8х. По теореме Пифагора $AB^2=AO^2+OB^2$, $AB^2=9x^2+16x^2$, $AB^2=25x^2$, AB=5x.

Поскольку Р=200, 5х·4=200, х=10, АВ=50, а диагонали ромба равны 60см и 80см, то S=0,5·60·80=2400, S=h·50, 2400=h·50, h=48. Ответ: 48.

Задача №7. Через вершину угла величиной 75° равнобедренного треугольника проведена прямая под углом 30° к основанию, разбивающая треугольник на две части. Найдите отношение площадей этих частей.

Данную задачу можно решить используя метод площадей и метод применения тригонометрии.



Анализ. Так как треугольники AMC и AMB имеют общую высоту, то для нахождения отношений площадей этих треугольников достаточно найти отношение MC и MB.

Так как в условии задачи даны только величины углов, введем вспомогательную величины углов, введем вспомогательную величину AC = *a*.

Можно заметить, что треугольник AMC равнобедренный с основанием MC. Выразив MC и BC через a, найдем отношение MC к MB.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC: пусть AC= *a*.

По теореме синусов

$\frac{BC}{\sin 75°}=\frac{a}{\sin 30°}$,

BC= $\frac{a\sin 75°}{\sin 30°}$;

BC=2asin75°.

Рассмотрим треугольник AMC: ∟A = 30°, ∟C = 75°, тогда ∟M = 75°. Треугольник равнобедренный с основанием MC=2asin15°.

BM = BC – MC = 2asin75° - 2asin15° = 2a2sin30°cos45° = a√2.

Тогда $\frac{S\,\Delta AMC}{S\,\Delta ABM}=\frac{MC}{BM}=\frac{2a\sin 15°}{a\sqrt{2}}$ = √2sin15°.

Ответ: √2sin15°

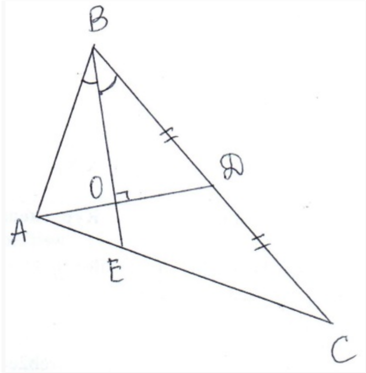
Задача №8. В произвольном треугольнике ABC биссектриса BE перпендикулярна медиане AD, причем BE = AD = 4. Найти стороны треугольника ABC.

Решение:

Данную задачу можно решить шестью различными методами [11].

Я покажу решение этой задачи методом введения вспомогательного неизвестного, методом координат и методом площадей.

Метод введения вспомогательного неизвестного



Пусть AB = x, AE = y, тогда BC = 2x и CE = 2y, AC=y+2y=3y.

Пусть BC=a, AC= b, AB=c.

Тогда медиана AD^2 = $(AC^2+AB^2):2-BC^2:4=(9y^2+x^2):2-(4x^2):4$,

А биссектриса

$BE^2=BC\cdot AB-CE\cdot AE=2x\cdot x-2y\cdot y$

Получим систему уравнений:

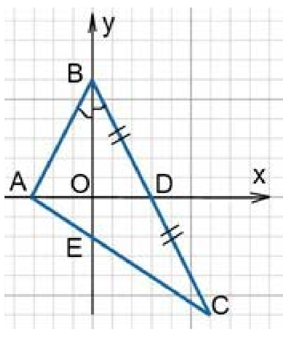
$$\begin{cases}(9y^2+x^2):2-x^2=16\\ 2x^2-2y^2=16\end{cases}$$

$$\begin{cases}(9y^2+x^2):2-x^2=16\\ x^2-y^2=8\end{cases}$$ $x^2=y^2+8$, $(9y^2+y^2+8):2-y^2-8=16$, $y^2=5$,

$x^2=13$. Значит, AB = $\sqrt{13}$, BC = $2\sqrt{13}$ и AC=$3\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

Метод координат



Решение. В ΔABC точка O – точка пересечения биссектрисы BE и медианы AD. Прямоугольные треугольники ABO и DBO равны по катету и острому углу.

Поэтому AO = OD = 2 и AB = BD, так что BC = 2AB.

_Пусть $\frac{OD}{2}$ – единичный отрезок координатной плоскости. В введенной системе координат точки A, D, B имеют координаты: A(-2; 0), B(0; b), и D(2; 0).

Чтобы вычислить длины сторон треугольника ABC надо определить, чему равно число b. Его можно выразить через координаты точек C и E.

Зная, что D – середина BC, получаем, что C(4; -b).

Найдем вторую координату точки E(0; y), пользуясь тем, что она принадлежит прямой AC. Уравнение прямой AC имеет вид: $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{-b}$. Координаты точки E(0; y) удовлетворяют этому уравнению, поэтому x=0, тогда y = - $\frac{1}{3}$·b. BE = $\frac{4}{3}$ · b. По условию задачи BE = 4, значит, b = 3.

Координаты вершин ΔABC: A(-2; 0), B(0; 3), C(4; -3).

Найдем его стороны:

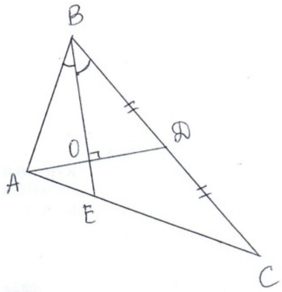
AB = $\sqrt{(0+2)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}$

BC = $\sqrt{(4-0)^2+(-3-3)^2}$ =$2\sqrt{13}$

AC = $\sqrt{(4+2)^2+(-3-0)^2}$ =$3\sqrt{5}$

Ответ: $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

Метод площадей



Решение. Так как AO = OD = 2, BE = 4 и AD перпендикулярно BE, то площадь каждого из треугольников BAE и BDE равна 4 .

Площадь ΔCDE=4, так как медиана ED делит ΔBCE на два равновеликих треугольника. Значит, S_{ABC}=12. AD – медиана треугольника ABC, то S_{ABD} = 6.

$S_{ABD}=\frac{1}{2}AD \cdot BO$ =AO·BO=6. Но AO=2, а значит, BO=6:2=3.

По теореме Пифагора: AB = $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, BC = 2BD = $2\sqrt{13}$, AE = $\sqrt{4+1}$ = $\sqrt{5}$.

$\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BC}$, EC =$2\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}:\sqrt{13} = 2\sqrt{5}$, AC = AE + EC = $\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ = $3\sqrt{5}$.

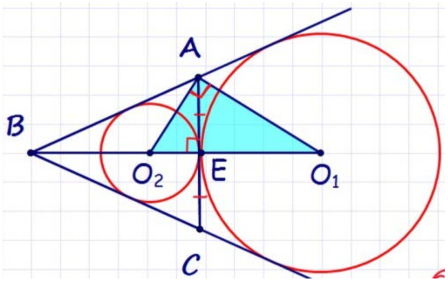
Ответ: $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

Задача №9. Основание АС равнобедренного треугольника АВС равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и основания АС. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник АВС.

Можно применить методы треугольника и поэтапно-вычислительный.

Решение. ΔАВС – равнобедренный с основанием АС.

O_1 - центр окружности вне этого треугольника, касающаяся продолжений боковых сторон треугольника, а O_2 – центр окружности, вписанной в ΔАВС.



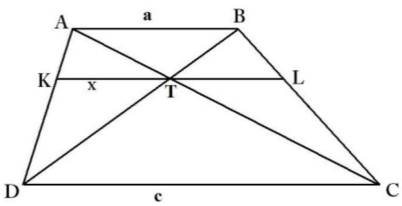
AO_2 и AO_1 = биссектрисы смежных углов, сумма которых равна 180^0. Тогда $<O_2AE + <EAO_1 = 90^0$. Значит ΔABC – прямоугольный и AE его высота.

А высота, прведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Тогда $AE^2 = O_1E \cdot O_2E$, $O_2E = AE^2 : O_1E = 6^2 : 8 = 4$. Ответ: 4,5.

Задача №10. Основания трапеции относятся как 1:5. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

Данную задачу можно решить методом подобия и методом площадей.



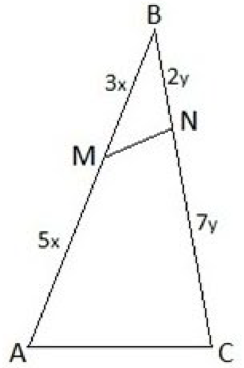
Диагонали делят трапецию на треугольники, причем:

1. треугольники, содержащие основания подобны и $k=\frac{a}{c}$;
2. треугольники, содержащие общее основание в трапеции и боковую сторону, равновелики.

Решение. $\Delta ATB \sim \Delta CTД$ с $k=\frac{1}{5}$. Пусть $S_{ATB}=S$, тогда $S_{CTД}=25S$, а $S_{ДAT}=5S$.

Тогда S_{ATB}: $S_{ДAT}=S:5S=1:5$,т.е. АК:КД=1:5. $\frac{5}{6}S:(\frac{25}{6}S+\frac{25}{6}S+25S)=0{,}08$. Ответ:0,08

Задача №11. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что AM : MB = 5 : 3 и BN : NC = 2 : 7. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNB равна 11.
В задаче целесообразно использовать метод введения вспомогательного неизвестного и метод применения тригонометрии.



Решение:

Пусть AM=5x, MB=3x,

а BN=2y, NC=7y

$S_{MNB} = \frac{1}{2}MB \cdot BN \cdot \sin B$

$S_{MNB} = \frac{1}{2} 3x \cdot 2y \cdot \sin B = 3xy\sin B$

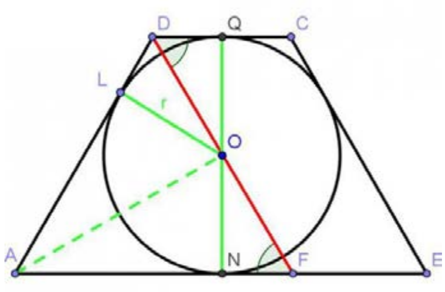
Так как $S_{MNB} = 11$, составим уравнение: $3xy \sin B = 11$, $xy \sin B = \frac{11}{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} 8x \cdot 9y \cdot \sin B = 36xy \sin B$

Так как $xy \sin B = \frac{11}{3}$, $S_{ABC} = 36 \cdot \frac{11}{3} = 132$.

Ответ: $S_{ABC} = 132$.

Задача №12. Окружность с радиусом 6 вписана в равнобедренную трапецию с большим основанием 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину тупого угла трапеции, отсекает от неё треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.
Задачу можно решить методом площадей.



Решение. DF проходит через центр окружности, следовательно биссектриса DF отсекает равнобедренный треугольник.

QN=h=12.

Тогда $S_{ADF} : S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+в)\ h : \frac{1}{2}(2a+2в)\ h = \frac{a+в}{2(a+в)} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Результаты исследования

- В данной работе представлены основные методы решения геометрических задач из раздела «Планиметрия: геометрия треугольника» - геометрический (12 методов), алгебраический (6 методов) и комбинированный, кроме того, рассмотрены эвристические (5 методов).
- Проведен тест для учащихся 9-ых классов на свойства треугольника: соотношения между сторонами и углами треугольника знают 76,2% учащихся, пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике - 26%, основные свойства площадей - 44,25%, свойства отрезков в треугольнике - 81,3% учащихся. Ребята не знают свойства прямоугольного треугольника и основные свойства площадей, именно те, на которых основаны задачи ОГЭ (Приложение №1).
- Проанализировано, что из геометрических учащиеся 9-ых классов предпочитают методы треугольника, геометрических преобразований и подобия. Из алгебраических - методы составления уравнений и применения тригонометрии. Лучше владеют методами учащиеся 9б класса (Приложение №2).
- Проанализированы результаты входной диагностики тренировочного ОГЭ: задачи раздела «Геометрия» тренировочного ОГЭ решены на 7,9%, задачи 1 части решены на 36,9%, большинство учащихся не приступали ко 2 части.
- Следует обратить внимание на следующие разделы курса «Геометрия»: свойства геометрических фигур, построение доказательства, построение чертежа по условию, решение задач на нахождение величин (Приложение №3).
- Для 12-ти задач «геометрии треугольника» определены рациональные методы решения. А также решена задача разными методами. Проделанная работа подтверждает, что выдвинутая гипотеза справедлива. Подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал. Использование же этих знаний на практике является творческой работой, при которой действенно учишься применять теорию на практике. Чтобы найти рациональный метод решения задачи, нужно хорошо знать эти методы, тогда легче ориентироваться в их выборе.

Выводы

1. Основным методом решения геометрических задач в условиях экзамена является аналитический метод, применение которого не требует особой изобретательности. Тем не менее, важно, владеть геометрическими приемами, уметь находить наиболее простое и красивое решение с помощью дополнительных построений.
2. При решении задач чаще всего применяется комбинированный метод.
3. Можно овладеть основными методами решения задач, составляющих важную часть многих эвристических алгоритмов, учиться рационально, планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи.
4. Благодаря такой работе снимается психологический барьер перед поиском решения задач. Зная, что задача может быть решена разными способами, можно смелее браться за ее решение. Постепенно, решая задачу за задачей, приобретем некоторый опыт, что позволит развить математическое чутье.

Заключение

При решении задач разными способами формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания, расширяется общеобразовательный кругозор, накапливается полезный опыт. Разбор задач, допускающих ряд решений, – увлекательное занятие, требующее знания всех разделов школьной математики. Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач. Все перечисленное создает условия для формирования навыков исследовательской учебной деятельности, способствующей накоплению творческого потенциала. Выбранный мною исследовательский метод позволил заглянуть за пределы школьного учебника, провести поиск интересных задач. Данный материал можно использовать на уроках геометрии при повторении и обобщении темы "треугольник" в 9-х и 11-х классах, а так же на занятиях элективных курсов при подготовке к экзаменам.

Библиографический список

1. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2005
2. Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом. Пособие для учащихся 9 – 10 кл. — М.: Просвещение, 1979.
3. Леонтьев А. Н. Опыт экспериментального исследования. Доклад на совещании по вопросам психологии. — М., 1954
4. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1992
5. Пойа Д. Как решать задачу. – М., 1961.
6. Фискович Т. Т. Геометрия без репетитора. — М.: УНЦ ДО МГУ, 1998.
7. И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. ЕГЭ: 1000 задач с ответами и решениями по математике. Все задания группы С «Закрытый сегмент». – М. : Издательство «Экзамен», 2013.
8. О.Е. Креславская, В.В. Крылов, В.И. Снегурова, В.Е. Ярмолюк. ЕГЭ – 2009. Математика: Сдаем без проблем! – М.: Эксмо, 2009.
9. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7-9: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012г.
10. ГИА 2012. Математика: сборник заданий: 9 класс/ В.В.Кочагин, М.Н.Кочагина. – Эксмо, 2012.
11. Ресурсы сети Интернет
    http://znanija.com
    yandex.ru/images