Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Пропорциональные отрезки и то, что за ними

Соколов Олег Андреевич,
10 класс, МБОУ «Ильинская СОШ №1»,
Ильинский район,
Самохина Наталья Александровна,
учитель математики высшей категории
МБОУ «Ильинская СОШ №1»

Пермь 2016

Оглавление

Введение

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Об этом свидетельствуют древнеегипетские храмы, знаменитые пирамиды в Гизе (III тысячелетие до н.э.), вавилонские зиккураты (ступенчатые культовые башни), персидские дворцы, индийские и другие памятники древности. Особенности архитектуры, требования удобства, эстетики, техники и экономичности при возведении зданий и сооружений вызвали возникновение и развитие понятий отношения и пропорциональности отрезков, площадей и других величин.

Исследовательская работа «Пропорциональные отрезки и то, что за ними» посвящена одной из самых трудных, но в то же время интересных и увлекательных тем геометрии – отношение отрезков.

Понятие пропорциональных отрезков используется при решении треугольников с применением теорем Фалеса, Чевы, Менелая, теоремы о биссектрисе треугольника, признаков подобия. Пропорциональность и подобие рассматриваются в трапециях и правильных многоугольниках. Обилие различных видов геометрических задач и многообразие приёмов и методов их решения делают геометрию наиболее трудным разделом школьной математики.

Гипотеза: знание особых свойств и подходов к решению задач на пропорциональные отрезки – необходимое условие успешного решения сложных планиметрических задач.

Объект исследования: задачи на свойства пропорциональных отрезков.

Предмет исследования: методы решения задач.

Цель: изучение свойств пропорциональных отрезков и их приложений к решению геометрических задач.

Задачи:
1. Собрать информацию о свойствах пропорциональных отрезков.
2. Создать банк ключевых задач.
3. Систематизировать подходы и методы решения задач на отношение отрезков.
4. Применить полученные знания к практике решения задач.

Структура: Работа состоит из двух глав. В первой – теоретической – систематизируются сведения о свойствах пропорциональных отрезков, доказываются некоторые зависимости между ними. Также рассматриваются ключевые задачи, которые представляют формулировку математического факта или метода решения , часто используемого в других задачах. Во второй главе показаны практические применения рассматриваемых понятий, различные способы решения сложных планиметрических задач.

Глава 1. Пропорциональные отрезки. Система ключевых задач

Пропорциональные отрезки – отрезки, для длин которых выполняется пропорция (соразмерность, выравненность частей, определенное соотношение частей между собой).

Отношением отрезков *AB* и *CD* называется отношение их длин, то есть $\frac{AB}{CD}$.

Отрезки *AB* и *CD* пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

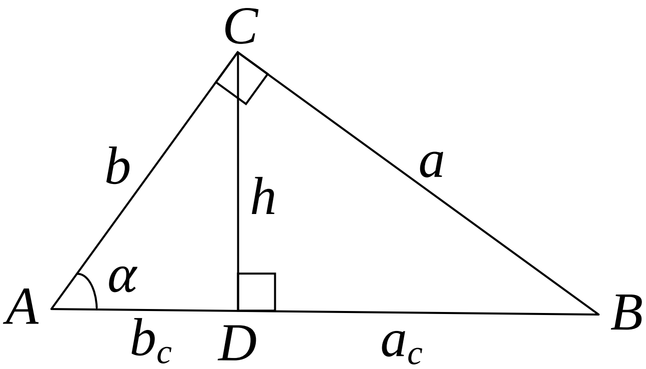
Понятие пропорциональности для большего числа отрезков: три отрезка AB, CD и EF пропорциональны трем отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если справедливо равенство $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}$.

В курсе геометрии изучается множество теорем. Некоторые из них даются как ключевые задачи, идеи решения которых применяются при решении других задач темы.

1.1. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

$\Delta ABC, \angle C = 90°, CD \perp AB$; AD – проекция катета AC на гипотенузу AB; DB - проекция катета BC на гипотенузу AB.

Обозначения:



$AB = c$

$AC = b$

$CB = a$

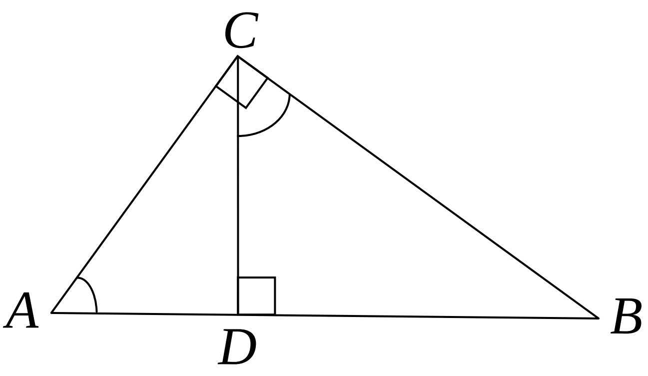
$AD = b_c$

$DB = a_c$

$CD = h$

$\angle BAC = \alpha$

Ключевая задача 1. *Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному.*



Доказательство:

1. ΔABC и ΔACD;

$$\left.\begin{array}{c}\angle A - \text{ общий} \\ \angle ACB = \angle ADC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta ACD$ по двум равным углам.

2. ΔABC и ΔCBD;

$$\left.\begin{array}{c}\angle B - \text{ общий} \\ \angle ACB = \angle BDC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta CBD$ по двум равным углам.

3. ΔACD и ΔCBD;

$$\left.\begin{array}{c}\angle A = \angle BCD \\ \angle CDB = \angle ADC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta CBD \text{ по двум равным углам.}$$

В геометрии в формулировках ряда утверждений и при решении отдельных задач используется понятие «среднее пропорциональное отрезков» или «среднее геометрическое». Отрезок xy называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) для отрезков AB и CD, если выполняется равенство

$xy = \sqrt{AB \cdot CD}$.

Ключевая задача 2. *В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов, то есть* $\boldsymbol{\frac{h}{a_c} = \frac{b_c}{h} \Leftrightarrow h = \sqrt{a_c \cdot b_c}}$.

Доказательство:

1. $\Delta CDA, \angle D = 90^\circ;\ \angle A = \alpha.\ \ tg\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{h}{b_c}$.

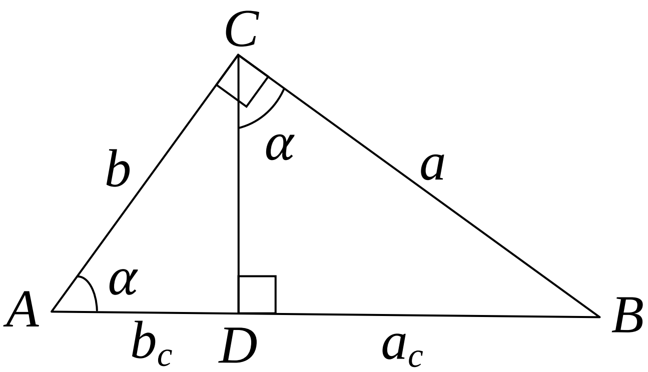
2. $\Delta BDC, \angle D = 90^\circ;\ \angle B = 90^\circ - \alpha, \angle BCD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

$tg\angle BCD = tg\alpha = \dfrac{a_c}{h}$.

Из 1) и 2) следует, что $\frac{h}{b_c} = \frac{a_c}{h} \Rightarrow h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

Ключевая задача 3. *В прямоугольном треугольнике каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, то есть* $\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \sqrt{c \cdot a_c},\ b = \sqrt{c \cdot b_c}}$.

Доказательство:



1. $\Delta ACB, \angle C = 90°;\ \angle A = \alpha.\ \ sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$.

2. $\Delta BDC, \angle D = 90°;\ \angle BCD = \alpha.\ sin\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{a_c}{a}$.

Из 1) и 2) следует, что $\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a} \Rightarrow a = \sqrt{c \cdot a_c}$.

$$\left.\begin{array}{l} 3. \Delta ABC, \angle C = 90°;\ \angle A = \alpha.\ cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \\ 4. \Delta ACD, \angle D = 90°.\ cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{b_c}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\frac{b}{c} = \frac{b_c}{b} \Leftrightarrow b = \sqrt{c \cdot b_c}$

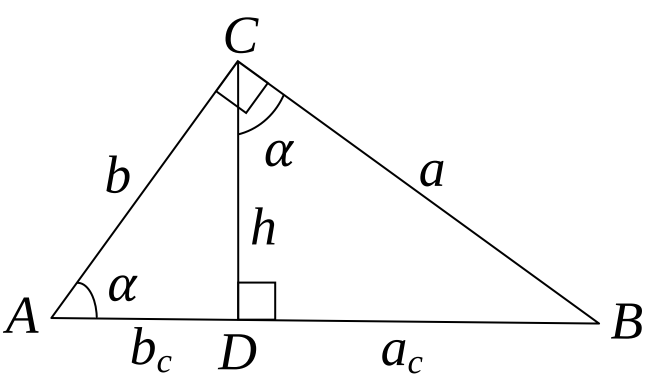
Ключевая задача 4. *В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит гипотенузу в таком отношении, в каком находятся квадраты прилежащих катетов, то есть* $\boldsymbol{\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}}$.

Доказательство: $a = \sqrt{c \cdot a_c},\ b = \sqrt{c \cdot b_c};\ \ a^2 = c \cdot a_c;\ b^2 = c \cdot b_c$; тогда

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c \cdot a_c}{c \cdot b_c} = \frac{a_c}{b_c}.$$

Ключевая задача 5. *В прямоугольном треугольнике отношение одного из катетов к гипотенузе равно отношению высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, к другому катету, то есть* $\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{h}{b}}$ *или* $\boldsymbol{\frac{b}{c} = \frac{h}{a}}$.

Доказательство:



$$\left.\begin{array}{l} 1. \Delta ABC, \angle C = 90°;\ \angle A = \alpha.\ \ sin\alpha = \frac{a}{c} \\ 2. \Delta ACD, \angle D = 90°;\ \ \angle A = \alpha.\ sin\alpha = \frac{h}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$.

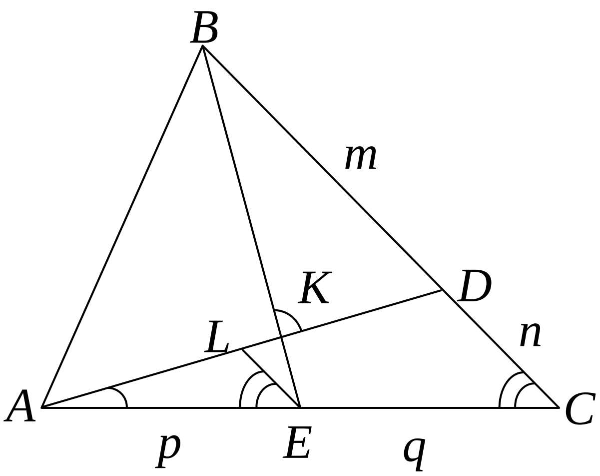
$$\left.\begin{array}{l} 3.\,\Delta BDC, \angle D = 90°;\ \angle BCD = \alpha.\ \ cos\alpha = \frac{h}{a} \\ 4.\,\Delta ABC, \angle C = 90°;\ \ \angle A = \alpha.\ cos\alpha = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{a}.$$

Вывод: соотношения между элементами прямоугольных треугольников позволяют легко вычислять неизвестные элементы прямоугольного треугольника.

1.2. Пропорциональные отрезки в произвольном треугольнике.

Ключевая задача 6. *Если точки D и E сторон BC и AC треугольника ABC соответственно такие, что* $\frac{AE}{EC} = \frac{p}{q}$, $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, *то* $\frac{BK}{KE} = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{q}{p}\right)$, $\frac{AK}{KD} = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{n}{m}\right)$, *где K – точка пересечения отрезков AD и BE.*

Доказательство первого свойства:



1. Проведем $EL \| BC$, $L -$ точка отрезка *A*.

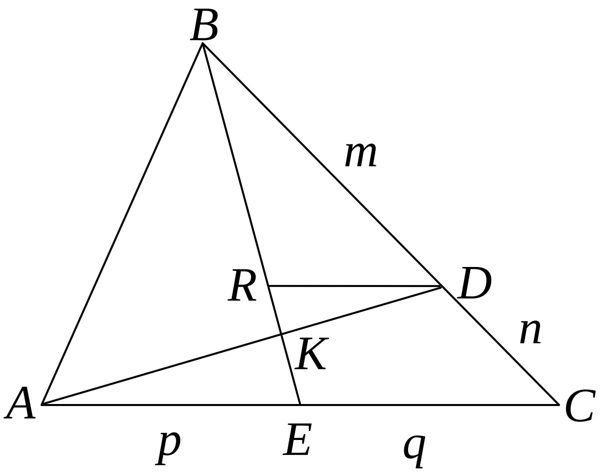
2. $\Delta ALE \backsim \Delta ADC$ (I признак). $\frac{AC}{AE} = \frac{p+q}{P} = k$ (коэффициент подобия).

3. $\frac{DC}{LE} = \frac{p+q}{p} \Rightarrow DC = \frac{p+q}{p} \cdot LE$.

4. По условию $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n} \Rightarrow BD = \frac{m}{n} \cdot DC = \frac{m}{n} \cdot \frac{p+q}{p} \cdot LE$.

5. $\Delta BDK \backsim \Delta ELK$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{BK}{KE} = \frac{BD}{LE} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p+q}{p} = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{q}{p}\right)$.

Докажем второе свойство:



1. Проведем $DR \| AC$ ($R -$ точка отрезка *BE*).

2. $\Delta BRD \backsim \Delta BEC$; $k = \frac{m+n}{m}$.

3. $\frac{EC}{RD} = \frac{m+n}{m} \Rightarrow EC = \frac{m+n}{m} \cdot RD$.

4. По условию $\frac{AE}{EC} = \frac{p}{q} \Rightarrow AE = \frac{p}{q} \cdot EC = \frac{p}{q} \cdot \frac{m+n}{m} \cdot RD$.

5. $\Delta AEK \backsim \Delta DRK \Rightarrow \frac{AK}{KD}=\frac{AE}{RD}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right)$.

Вывод: Это свойство позволяет по известным отношениям, в которых отрезки *AD* и *BE* делят противолежащие вершинам *A* и *B* стороны треугольника *ABC*, определить, в каком отношении эти отрезки делятся между собой.

Интересна обратная задача.

Ключевая задача 7. *Если D и E – точки сторон BC и AC треугольника ABC соответственно, K – точка пересечения отрезков AD и BE такая, что* $\frac{AK}{KD}=\lambda$, $\frac{BK}{KE}=\mu$, *где* $\lambda\cdot\mu>1$, *то* $\frac{AE}{EC}=\frac{\lambda\mu-1}{1+\mu}, \frac{BD}{DC}=\frac{\lambda\mu-1}{1+\lambda}$.

Доказательство:

$$1.\ \left.\begin{aligned}&\frac{AK}{KD}=\lambda\ (\text{по условию})\\&\frac{AK}{KD}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right)=\lambda$$

$$2.\ \left.\begin{aligned}&\frac{BK}{KE}=\mu\ (\text{по условию})\\&\frac{BK}{KE}=\frac{m}{n}\left(1+\frac{q}{p}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{m}{n}\left(1+\frac{q}{p}\right)=\mu$$

3. Составляем систему:

$$\begin{cases}\frac{p}{q}\left(1+\frac{n}{m}\right)=\lambda\\\frac{m}{n}\left(1+\frac{q}{p}\right)=\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\frac{n}{m}=\lambda\cdot\frac{q}{p}\\1+\frac{q}{p}=\mu\cdot\frac{n}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\cdot\frac{q}{p}-\frac{n}{m}=1\\\mu\cdot\frac{n}{m}-\frac{q}{p}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\cdot\frac{q}{p}-\frac{n}{m}=1\\-\lambda\cdot\frac{q}{p}+\lambda\mu\cdot\frac{n}{m}=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda\mu\cdot\frac{n}{m}-\frac{n}{m}=\lambda+1\Leftrightarrow\frac{n}{m}=\frac{\lambda+1}{\lambda\mu-1}\Leftrightarrow\frac{m}{n}=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda+1};$$

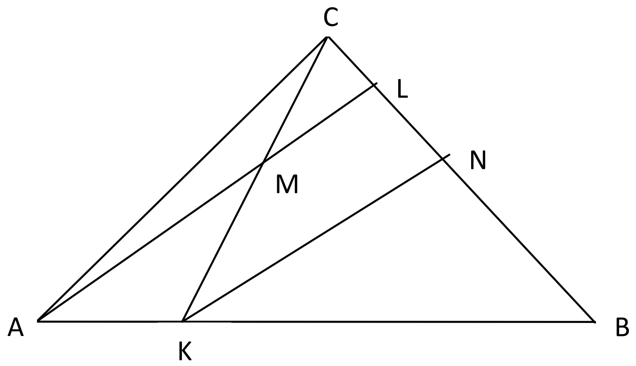
$$\begin{cases}\lambda\cdot\frac{q}{p}-\frac{n}{m}=1\\\mu\cdot\frac{n}{m}-\frac{q}{p}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\mu\cdot\frac{q}{p}-\mu\frac{n}{m}=\mu\\\mu\cdot\frac{n}{m}-\frac{q}{p}=1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda\mu\cdot\frac{q}{p}-\frac{q}{p}=\mu+1\Leftrightarrow\frac{q}{p}=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{\lambda\mu-1}{\mu+1}.$$

Рассматриваемая тема работы изложена в статье В.П. Пантелеева «Пропорциональные отрезки и то, что за ними». В этой статье приводится теорема, которая обобщает предыдущие две задачи.

Рассмотрим теорему и доказательство теоремы в авторском варианте.

Ключевая задача 8. *Пусть в треугольнике ABC точки K и L делят стороны AB и BC соответственно в отношениях* $p = \frac{\text{АК}}{\text{КВ}}$ *и* $q = \frac{BL}{LC}$*. Тогда точка M пересечения прямых AL и CK делит отрезок CK в отношении* $r = \frac{1+p}{pq}$.



Доказательство:

Прямая *KN*, проходящая через точку *K* параллельно прямой *AL*, пересекает прямую *BC* в некоторой точке *N*. Параллельные прямые *AL* и *KN* делят сторону угла *ABC* на пропорциональные отрезки AK/AB = LN /LB, а стороны угла KBC на пропорциональные отрезки CM /MK = CL/LN.

Умножив левые части этих равенств и отдельно правые, получаем равенство:

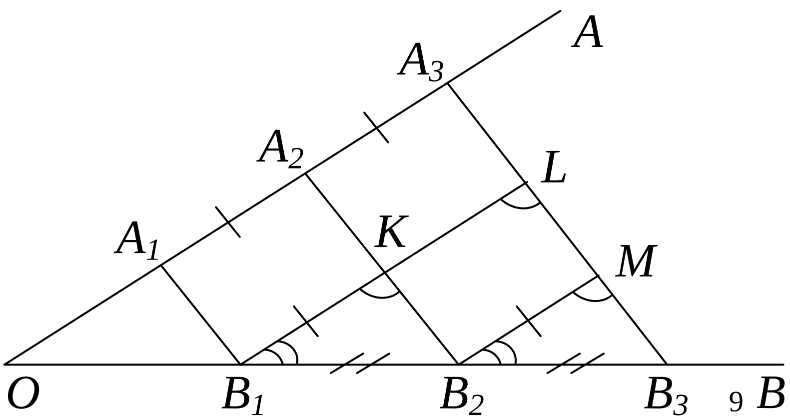
$$\frac{CM}{MK} \cdot \frac{AK}{AB} = \frac{CL}{LB}; \;\; r \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{1}{q}; \; r = \frac{1}{q} \cdot \frac{p+1}{p} = \frac{p+1}{qp}.$$

Равенство $\boldsymbol{p \cdot q \cdot r = p + 1}$ легко запоминается, оно служит удобным инструментом к решению многих задач геометрии.

1.3. Теорема Фалеса

Ключевая задача 9. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.*

Доказательство:



1. Пусть параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекают стороны угла AOB, причем $A_1A_2 = A_2A_3$.

2. Проведем B_1L и B_2M параллельно OA.

3. Четырехугольники $A_1A_2KB_1$ и $A_2A_3MB_2$ - параллелограммы, поэтому $B_1K = A_1A_2, B_2M = A_2A_3$. Значит $B_1K = B_2M$.

4. $\angle B_1KB_2 = \angle KLM = \angle B_2MB_3$ и $\angle KB_1B_2 = \angle MB_2B_3$ (соответственно при параллельных прямых).

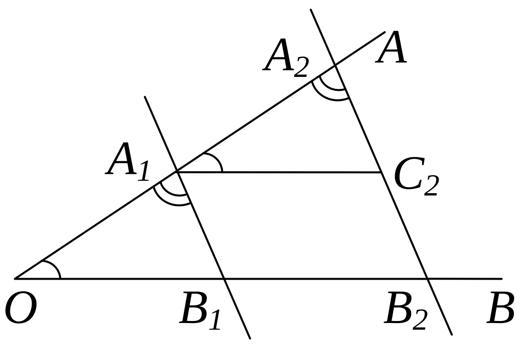
5. $\Delta B_1KB_2 = \Delta B_2MB_3$ (по стороне и двум прилежащим углам) $\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема Фалеса применяется тогда, когда в задаче даны соотношения между отрезками.

Следствием теоремы Фалеса служит теорема о пропорциональных отрезках.

Теорема о пропорциональных отрезках

Ключевая задача 10. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.*



$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$

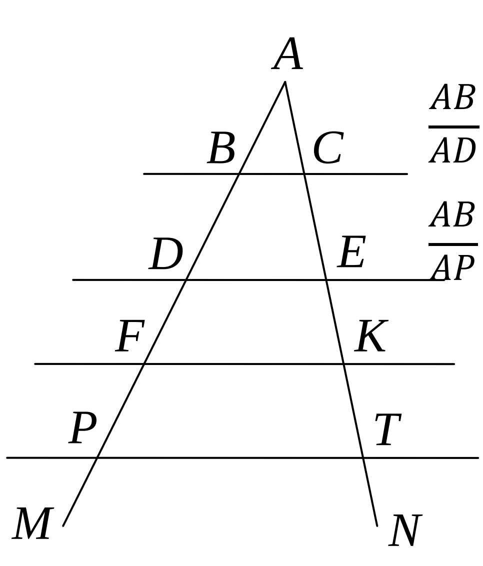
Доказательство:

1. Проведем прямую $A_1C_2 \| OB$.

2. $\Delta B_1OA_1 \backsim C_2A_1A_2$ (по двум углам) $\Rightarrow$ $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{A_1C_2}$.

3. $A_1B_1B_2C_2 -$ параллелограмм $\Rightarrow A_1C_2 = B_1B_2$. Значит $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$.

Если параллельных прямых больше, то и количество пропорциональных отрезков увеличивается.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \qquad \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AK}$$

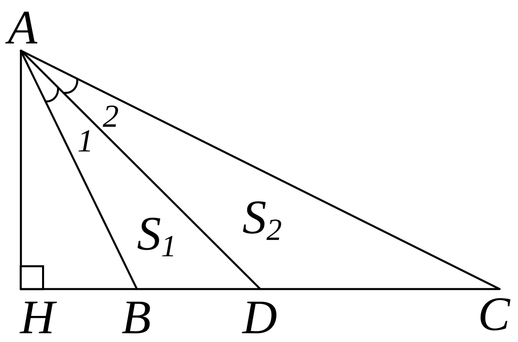
$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AT}, \qquad \frac{BD}{BF} = \frac{CE}{CK} \text{ и т. д.}$$

1.4. Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Теорема о биссектрисе – одна из теорем геометрии, связанная с понятием биссектрисы треугольника. Она является способом решения многих задач геометрии на пропорциональные отрезки.

Ключевая задача 11. *Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*



Доказательство:

1. ΔABD и ΔACD; AH - общая высота.

2. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BD}{DC}$.

3. ΔABD и ΔACD имеют по равному углу: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB \cdot AD}{AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$.

4. Из (2) и (3) получаем: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Это свойство часто используется в задачах, в которых фигурирует биссектриса треугольника.

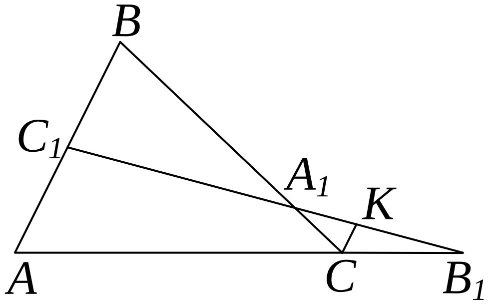
1.5. Теоремы Чевы и Менелая

Геометрия – одна из наиболее древних математических наук. Свойства пропорциональных отрезков интересовали математиков со времён Евклида, у которых уже были предпосылки использовать свойства, но без доказательства. Первые, кто доказали свойства пропорциональных отрезков в треугольнике были Джованни Чева (1648-1734) – итальянский инженер и математик, и Менелай Александрийский (I в) – древнегреческий математик и астроном.

Теорема Менелая

Ключевая задача 12. *Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то* $\boldsymbol{\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1}$.

Доказательство:



1. Проведем через точку *С* прямую, параллельную *АВ*. *CK*||*AB*.

2. $\Delta AC_1B_1 \backsim CKB_1, \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C} \Rightarrow CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$.

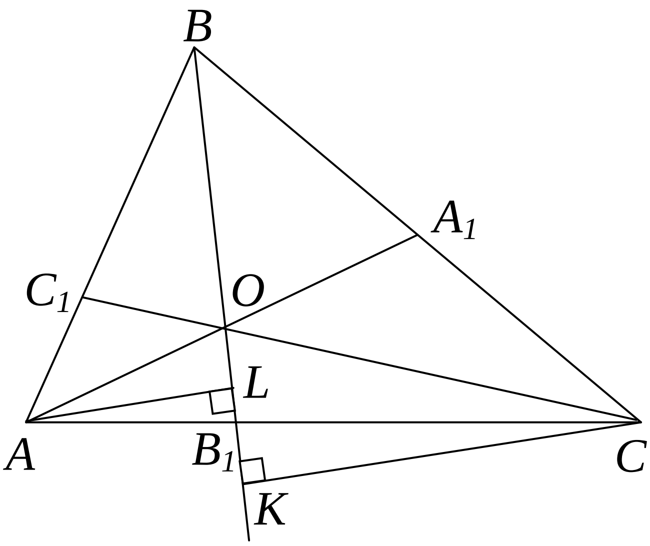
3. $\Delta BC_1A_1 \backsim CKA_1, \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$.

Тогда $\frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$ или $\frac{AC_1 \cdot B_1C \cdot BA_1}{B_1A \cdot C_1B \cdot A_1C} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

Теорема Чевы

Ключевая задача 13. *На сторонах ВС, АС, АВ треугольника АВС отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются водной точке, то* $\boldsymbol{\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1}$.



Доказательство:

1. ΔAOB и ΔBOC; OB - общая сторона. Площади треугольников относятся как высоты, проведенные на эту сторону: $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AL}{CK} = \frac{AB_1}{CB_1}$, так как $\Delta ALB \backsim \Delta CKB \Rightarrow \frac{AL}{CK} = \frac{AB_1}{CB_1}$.

2. ΔBOC и ΔAOC; OC - общая сторона. $\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

3. ΔBOA и ΔAOC; OA - общая сторона. $\frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{BA_1}{A_1C}$.

4. $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}} \cdot \frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta AOC}} \cdot \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOB}} = 1.$

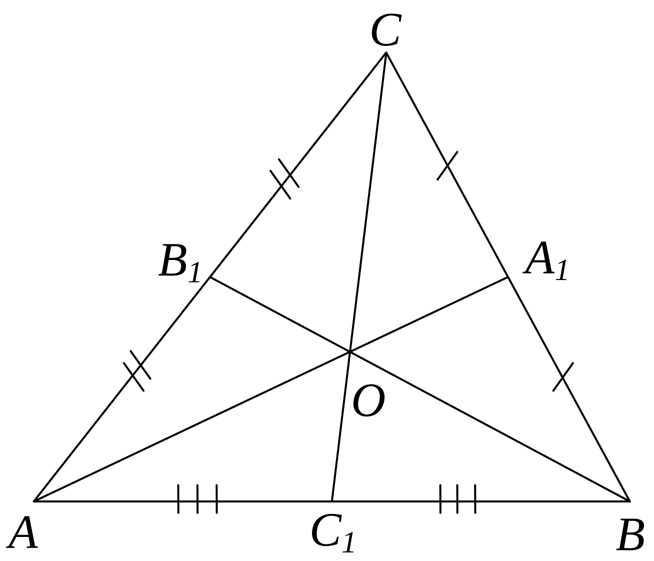
Следствиями из теорем Чевы и Менелая являются известные теоремы о замечательных точках в треугольнике: биссектрисы, медианы, высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство одной из них с использованием теорем Чевы и Менелая, теоремы Фалеса.

Теорема. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.*

<u>Первый способ.</u> Доказательство: 1. AA_1, BB_1, CC_1 - медианы $\Delta ABC \Rightarrow AB_1 = B_1C$, $CA_1 = A_1B,\ BC_1 = C_1A$.

$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \Rightarrow$ по теореме Чевы медианы AA_1, BB_1, CC_1 ΔABC пересекаются в одной точке – точке *O*.



2. ΔACC_1. Прямая BB_1 пересекает две стороны $\Delta ACC_1 (BB_1 \cap AC = B_1; BB_1CC_1 = O)$ и продолжение третьей $(BB_1 \cap AC_1 = B)$, значит, по теореме Менелая:

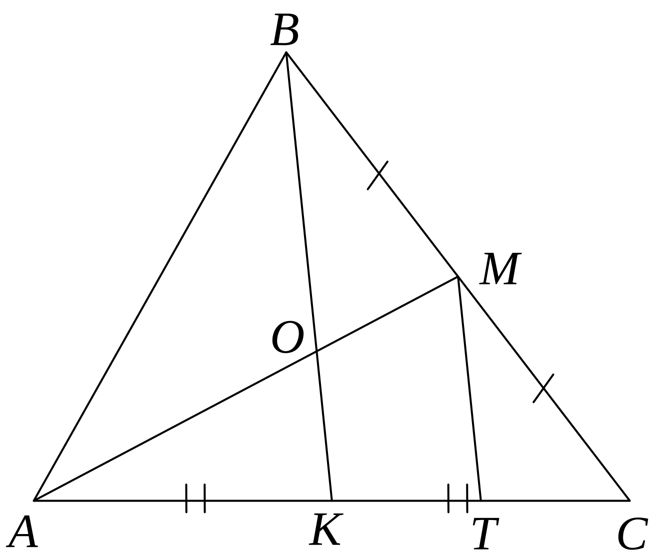
$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CO}{OC_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} = 1;\ 1 \cdot \frac{CO}{OC_1} \cdot \frac{1}{2} = 1;\ \frac{CO}{OC_1} = 2:1.$

3. ΔAA_1B: $\frac{A_1O}{OA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} = 1;\ \frac{A_1O}{OA} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{OA}{A_1O} = 2:1.$

4. ΔCB_1B: $\frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1;\ \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OB_1} = 2:1.$

Вывод: все три медианы ΔABC пересекаются в точке *O* и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

<u>Второй способ.</u> Доказать, что медианы в треугольнике делятся в отношении 2:1, считая от вершины.



Решение:

1. Проведем медианы *AM* и *BK*, отрезок *MT*||*BK*.

2. $\left.\begin{matrix} BM = MC \\ MT \parallel BK \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{т.Фалеса}} KT = TC$

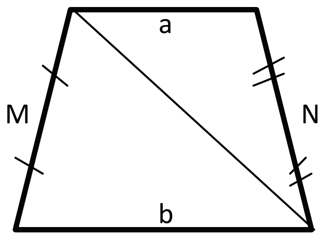
3. $KT = TC \Rightarrow AK = 2KT \Rightarrow AO:OM = AK:KT = 2:1.$

Ответ: 2:1.

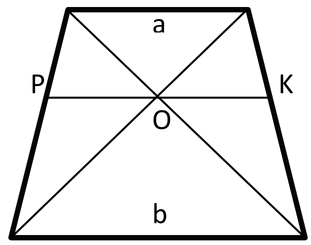
1.6. Пропорциональные отрезки в трапециях

Особенностью трапеции является наличие двух параллельных сторон. При пересечении их (или их продолжений) любой прямой образуются равные углы, что приводит к появлению пар подобных треугольников, и соответственно, пропорциональных отрезков. В соответствии с теоремой Фалеса пропорциональные отрезки возникают на боковых сторонах трапеции или их продолжениях, если проводится прямая, параллельная основаниям. Зависимости между основаниями трапеции и отрезками, параллельными основаниям:

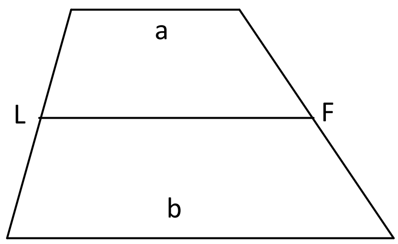
1)



2)



3)



$$\boldsymbol{MN = \frac{a+b}{2}}$$

Среднее арифметическое чисел a и b

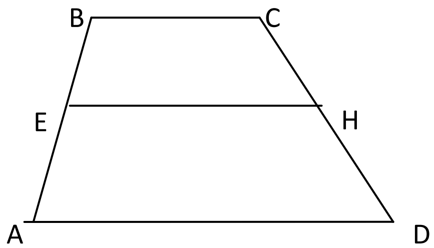
$$\boldsymbol{PK = \frac{2ab}{a+b}}$$

Среднее гармоническое чисел a и b

$$\boldsymbol{LF = \sqrt{ab}} \qquad ALFD \sim LBCF$$

Среднее геометрическое чисел

4)



$$S_{EBCH} = S_{AEHD} \Rightarrow \boldsymbol{EH = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

Среднее квадратичное чисел a и b

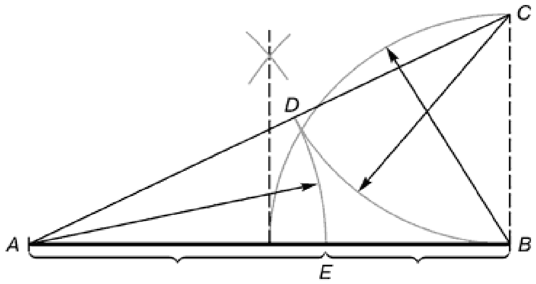
1.7. Пропорциональные отрезки золотого сечения

Человек различает окружающие предметы по форме. Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения –

высшее проявление структурного совершенства целого и его частей в науке, искусстве, технике и природе.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.

Деление отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки:



1. Отрезок *AB*.

2. Строим перпендикуляр к прямой *AB*.

3. На перпендикуляре отложить отрезок $BC = \frac{1}{2}AB$.

4. На отрезке AC отложить отрезок $AD = AC - CB$.

5. На отрезке *AB* отложить отрезок *AE*=*AD*.

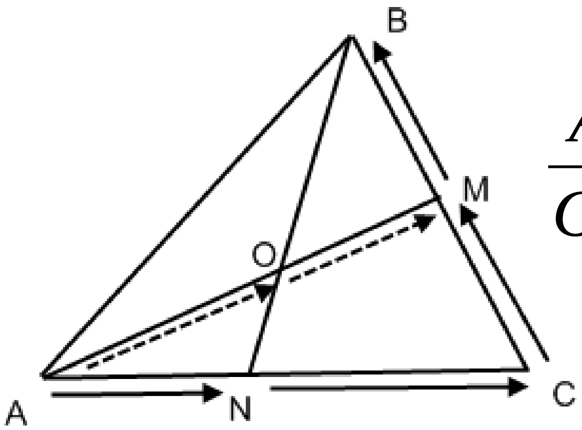
Вывод: Рассмотрены свойства пропорциональных отрезков .По материалам исследования создан банк ключевых задач (приложение1), которые используются при решении сложных планиметрических задач.
Появился новый блок знаний, с помощью которых можно продвинуться в решении задач повышенной сложности

Глава 2. Пропорциональность отрезков в решении задач

2.1. Решение треугольников

Для решения треугольников применяется легко запоминающаяся формула, которая связывает заданные в условии задачи отношения:

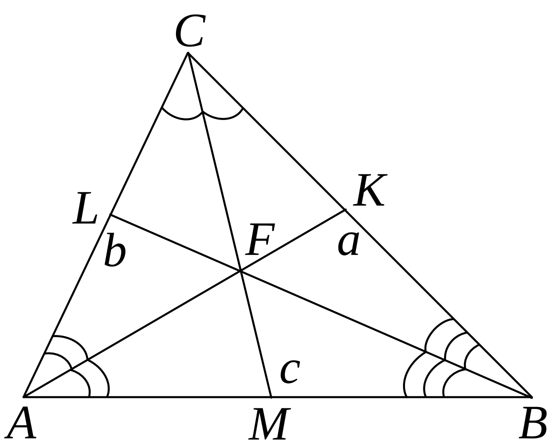
• отношение частей одного из пересекающихся внутри треугольника отрезков, считая от вершины, равно отношению отрезков на стороне, прилежащей к этой вершине, умноженному на сумму единицы и отношения отрезков противолежащей стороны, считая по направлению обхода



$$\frac{AO}{OM}=\frac{AN}{NC}\left(\frac{CM}{MB}+1\right)$$

Задача 1. *В треугольнике ABC сторона $AB=c, BC=a, AC=b$. В каком отношении биссектрисы AK, BL, CM этого треугольника делятся их общей точкой F?*

Решение:



Первый способ. 1. $\Delta ABC; CM-$ биссектриса. По свойству биссектрисы $\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{CB}=\frac{b}{a}=p$.

AK – биссектриса $\Rightarrow \frac{BK}{KC}=\frac{c}{b}=q$.

$$\frac{CF}{FM}=r;\ p\cdot q\cdot r=p+1;\ \ r=\frac{p+1}{pq}=\frac{\frac{b}{a}+1}{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}$$

$$=\frac{b+a}{a}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b+a}{c}.$$

Второй способ. $\Delta ACM; BL-$ секущая сторон AC и CM и продолжение AM. По теореме Менелая:

$$\frac{MA}{AB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CF}{FM}=1;\ \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{CF}{FM}=1;\ \frac{CF}{FM}=\frac{a+b}{c}.$$

2. ΔBCA; $\frac{BK}{KC}=\frac{c}{b}\ (p)$; $\frac{CL}{LA}=\frac{a}{c}\ (q)$; $\frac{AF}{FK}=r$;

$$p\cdot q\cdot r=p+1;\ r=\frac{p+1}{p\cdot q}=\frac{\frac{c}{b}+1}{\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{c+b}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{c+b}{a}.$$

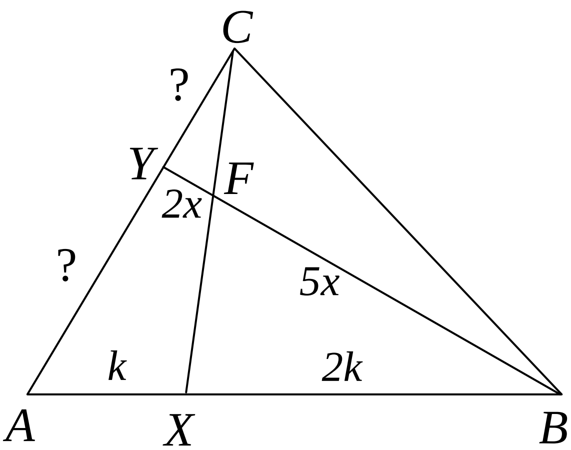
3. ΔCAB; $\frac{CL}{LA}=\frac{a}{c}\ (p)$; $\frac{AM}{MB}=\frac{b}{a}(q)$; $\frac{BF}{FL}=r$;

$$r=\frac{p+1}{pq}=\frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{a+c}{c}\cdot\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Ответ: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{c+b}{a}$, $\frac{a+c}{b}$.

Задача 2. *Точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении 2:1. Точка Y лежит на стороне AC и отрезок BY делится отрезком XC в отношении 5:2. В каком отношении точка Y делит сторону AC?*

Решение:



Первый способ.

$\frac{CY}{YA}=p$; $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}=q$; $\frac{BF}{FY}=\frac{5}{2}=r$.

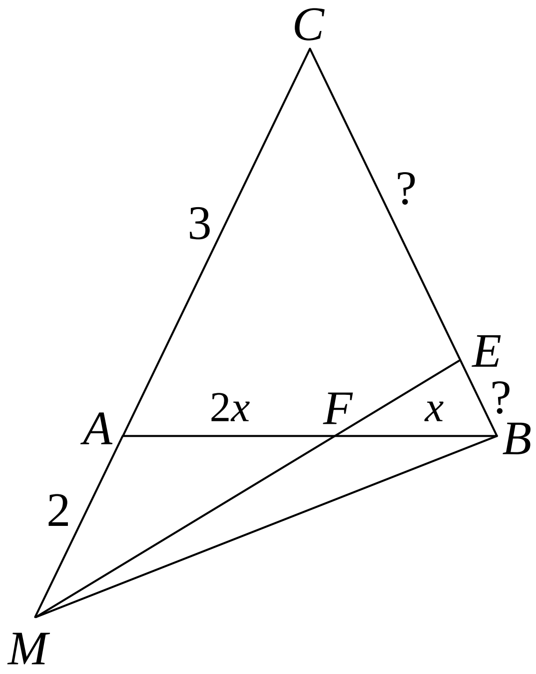
$p\cdot q\cdot r=p+1$; $p\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=p+1$; $5p=4p+4$; $p=4\Rightarrow\frac{CY}{YA}=\frac{4}{1}$.

Второй способ. По теореме Менелая:
$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BF}{FY}\cdot\frac{YC}{CA}=1$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{YC}{CA}=1$; $\frac{YC}{CA}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{YC}{AY}=\frac{4}{1}$.

Ответ: 4:1.

Задача 3. *Прямая делит основание AB равнобедренного ΔABC с боковой стороной 3 в отношении 2:1 и отсекает на луче CA отрезок CM длиной 5. На какие части делит она другую боковую сторону?*

Решение:



1. Соединим точки M и B.

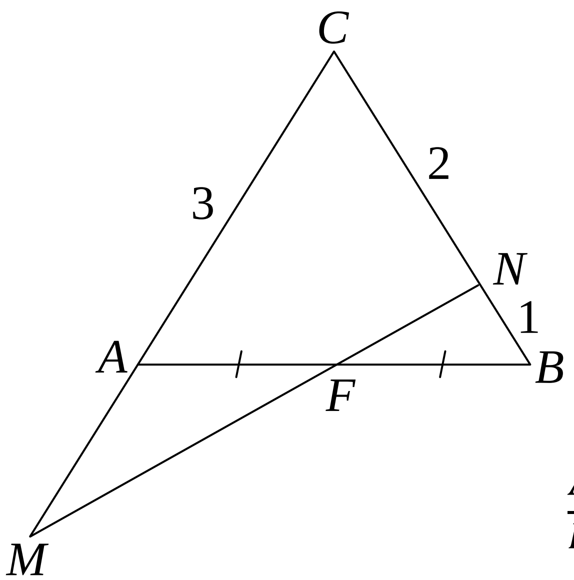
2. ΔMCB; $\frac{MA}{AC}=\frac{2}{3}=p$; $\frac{CE}{EB}=q$; $\frac{BF}{FA}=\frac{1}{2}$.

$p\cdot q\cdot r=p+1$; $\frac{2}{3}\cdot q\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+1$; $q=5\Rightarrow$ $\frac{CE}{EB}=5:1$.

Ответ: 5:1.

Задача 4. *Прямая делит пополам основание AB равнобедренного треугольника ABC с боковой стороной 3 и отсекает на лучах CA и CB отрезки CM и CN соответственно. Найти длину CM, если длина CN равна 2.*

Решение: Первый способ.



ΔMCB: $\frac{MA}{AC}=\frac{x}{3}$ (p); $\frac{CN}{NB}=\frac{2}{1}$ (q); $\frac{BF}{FA}=1$.

$p\cdot q\cdot r=p+1$; $\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot 1=\frac{x}{3}+1$; $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x=1$; $x=AM=3\Rightarrow CM=6$.

Ответ: 6.

Второй способ (с использованием теоремы Менелая).

ΔABC; $MN\cap BC=N$, $MN\cap AB=F$, $MN\cap AC=M$.

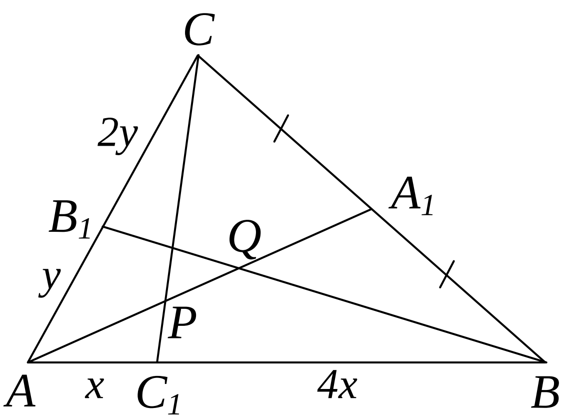
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CM}{MA}=1;\ 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CM}{MA}=1;\ \frac{CM}{MA}=2\Rightarrow CA=AM=3\Rightarrow CM=6.$$

Ответ: 6.

Задача 5. *Точки* C_1, B_1, A_1 *делят стороны* AB, AC, BC *треугольника ABC в отношениях* $AC_1:C_1B=1:4, CB_1:B_1A=2:1, BA_1:A_1C=1:1$. *Пусть точка P –*

точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1, а Q – точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. В каком отношении точки P и Q делят отрезок AA_1?

Решение:



1. ΔCBA; $\frac{CA_1}{A_1B} = 1\ (p)$; $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{4}{1}\ (q)$; $\frac{AP}{PA_1} = r$.

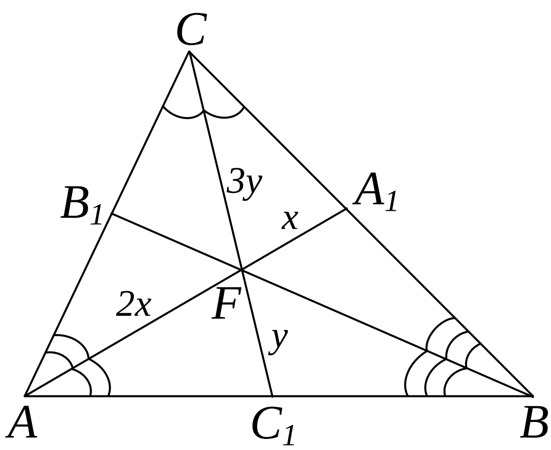
$p \cdot q \cdot r = p + 1$; $1 \cdot 4 \cdot r = 2$; $r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AP}{PA_1} = \frac{1}{2}$.

2. ΔBCA; $p = 1$; $q = 2$; $\frac{AQ}{QA_1} = r$; $1 \cdot 2 \cdot r = 1 + 1$; $r = 1 \Rightarrow \frac{AQ}{QA_1} = \frac{1}{1}$.

$AP = \frac{1}{3}AA_1$; $AQ = \frac{1}{2}AA_1 \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AA_1 - \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{6}AA_1 \Rightarrow AP:PQ:QA_1 = \frac{1}{3}:\frac{1}{6}:\frac{1}{2} = \frac{2}{6}:\frac{1}{6}:\frac{3}{6} = 2:1:3$.

Ответ: 2:1:3.

Задача 6. *Две биссектрисы в треугольнике делятся в точке пересечения 2:1 и 3:1 (считая от вершины). Найти, в каком отношении делится точкой пересечения третья биссектриса.*



Решение:

1. ΔABC. Пусть $BC = a, AC = b, AB = c$.

2. AA_1 – биссектриса $\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$;

CC_1 – биссектриса $\Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}$;

BB_1 – биссектриса $\Rightarrow \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}$.

3. ΔABC; $\left.\begin{array}{l} \dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{b}{a}\ (p) \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{b}\ (q) \\ \dfrac{CF}{FC_1} = \dfrac{3}{1}\ (r) \end{array}\right| p \cdot q \cdot r = p + 1; \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{b}{a} + 1;\ \dfrac{3c}{a} = \dfrac{a+b}{a};\ 3c = a + b.$

$$4.\ \Delta BCA;\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{c}{b}\ (p) \\ \dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a}{c}\ (q) \\ \dfrac{AF}{FA_1}=\dfrac{2}{1}\ (r) \end{array}\right| p\cdot q\cdot r=p+1; \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{2}{1}=\frac{c}{b}+1;\ \frac{2a}{b}=\frac{b+c}{b};\ 2a=b+c.$$

$$5.\ \Delta CAB;\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a}{b}\ (p) \\ \dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{b}{a}\ (q) \\ \dfrac{BF}{FB_1}=r \end{array}\right| p\cdot q\cdot r=p+1; \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot r=\frac{a}{c}+1;\ \frac{b\cdot r}{c}=\frac{a+c}{c};\ r=\frac{a+c}{b}.$$

6. Составляем систему:

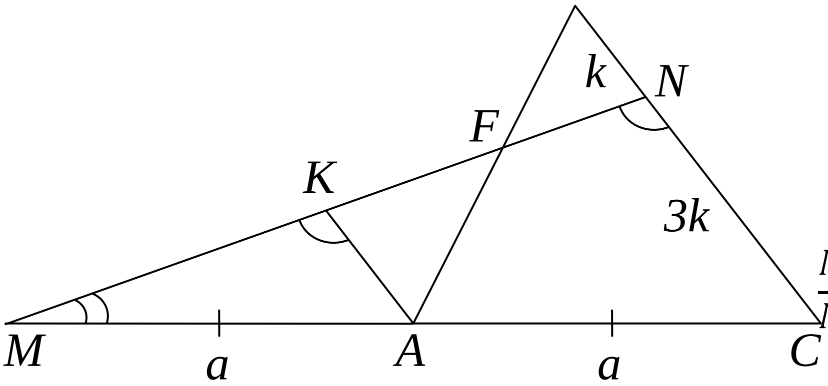
$$\begin{cases} 3c=a+b \\ 2a=b+c \\ r=\dfrac{a+c}{b} \end{cases};\ \begin{cases} b=3c-a \\ b=2a-c \\ r=\dfrac{a+c}{b} \end{cases};\ \begin{cases} 4c-3a=0 \\ r=\dfrac{a+c}{b} \end{cases};\ \begin{cases} c=\dfrac{3}{4}a \\ r=\dfrac{a+\frac{3}{4}a}{b}=\dfrac{7}{4}\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{4}a:\dfrac{5}{4}a=\dfrac{7}{5}=7:5. \end{cases}$$

$$\left(b=2a-c=2a-\frac{3}{4}a=\frac{5}{4}a\right).$$

Ответ: 7:5.

Задача 7. *В ΔABC на стороне ВС взята точка N так, что $NC=3BN$. На продолжении стороны АС за точку А взята точка М так, что $MA=AC$. Прямая MN пересекает сторону АВ в точке F. Найти отношение* $\frac{BF}{FA}$.

Решение: Первый способ.



1. Дополнительное построение: проведем $AK\parallel BC$. Пусть $AC=MA=Q$.

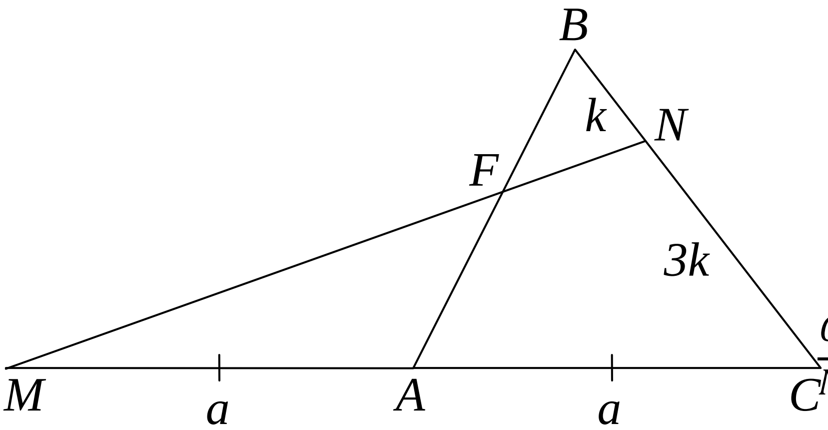
2. $\Delta MKA\backsim\Delta MNC$ (по двум углам);

$$\frac{MA}{MC}=\frac{AK}{NC};\ \frac{1}{2}=\frac{AK}{3k};\ AK=\frac{3k}{2}.$$

3. $\Delta BNF \backsim AKF$ (по двум углам);

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BN}{AK} = \frac{k}{1{,}5k} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ (с использованием теоремы Менелая).



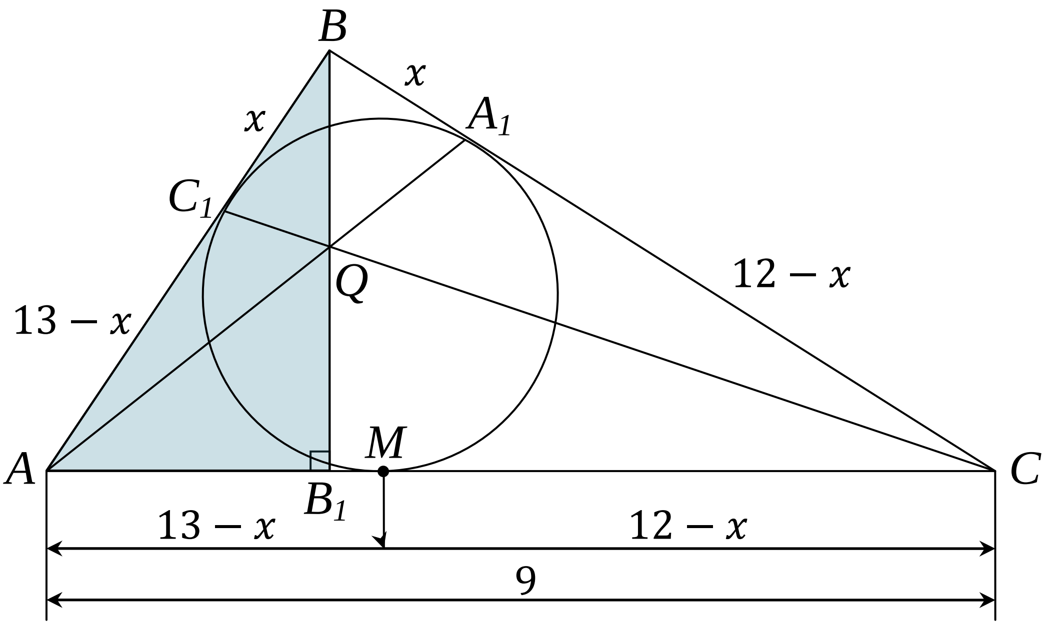
Прямая MN пересекает две стороны ΔABC ($MN \cap AB = F; MN \cap BC = N$) и продолжение третьей ($MN \cap AC = N$). Значит, по теореме Менелая:

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AN}{NC} = 1; \ \frac{3}{1} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{1}{2} = 1; \ \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 8 . *В ΔABC, описанном около окружности, $AB = 13, DC = 12, AC = 9$, A_1 и C_1 – точки касания, лежащие соответственно на сторонах BC и AB. Q – точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Q лежит на высоте BB_1. Найти отношение BQ: QB_1.*

Решение:



1. ΔABC – равносторонний, значит, точка B_1 не совпадает с точкой касания M.

2. Пусть $C_1B = x$, тогда $AC_1 = 13 - x$, $BA_1 = x$, $A_1C = 12 - x$, $AM = 13 - x$, $MC = 12 - x$ (свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки).

3. $13 - x + 12 - x = 9$; $x = 8 = B_1C = BA_1$.

4. $\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BB_1 \cdot AC = 4{,}5 \cdot BB_1 \\ S_{\Delta ABC} = \sqrt{17 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8} = 4\sqrt{170} \end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 = \frac{4\sqrt{170}}{4{,}5} = \frac{8\sqrt{170}}{9}$.

5. $\Delta ABB_1; CC_1 \cap AB = C_1;\ CC_1 \cap BB_1 = Q;\ CC_1 \cap AB_1 = C$.

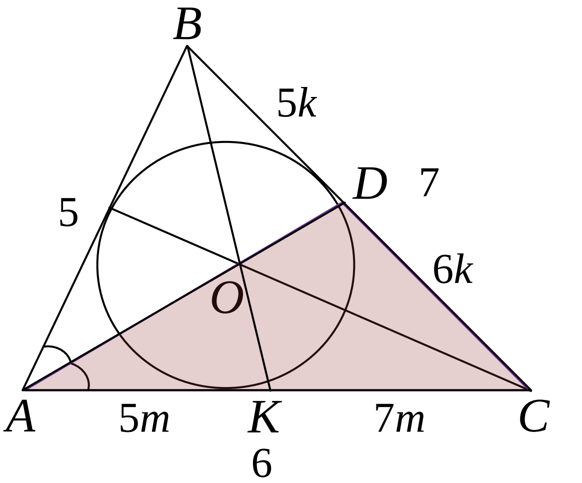
По теореме Менелая:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1;\ \frac{5}{8} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{9 - \frac{53}{9}}{9} = 1;\ \frac{BQ}{QB_1} = \frac{72 \cdot 9}{5 \cdot 28} = \frac{162}{35}.$$

Ответ: $\frac{162}{35}$.

Задача 9. *Стороны треугольника 5, 6, 7. Найти отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.*

Решение:



1. $\angle BAC -$ больший.

2. Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис O.

3. $\Delta ABC; AD -$ биссектриса, $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}$ (свойство биссектрисы угла).

$BK -$ биссектриса, $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{7}$.

4. ΔADC. Прямая BK пересекает две стороны и продолжение третьей ΔADC.

По теореме Менелая:

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1;\ \frac{AO}{OD} \cdot \frac{5k}{11k} \cdot \frac{7m}{5m} = 1;\ \frac{AO}{OD} = \frac{11}{7}.$$

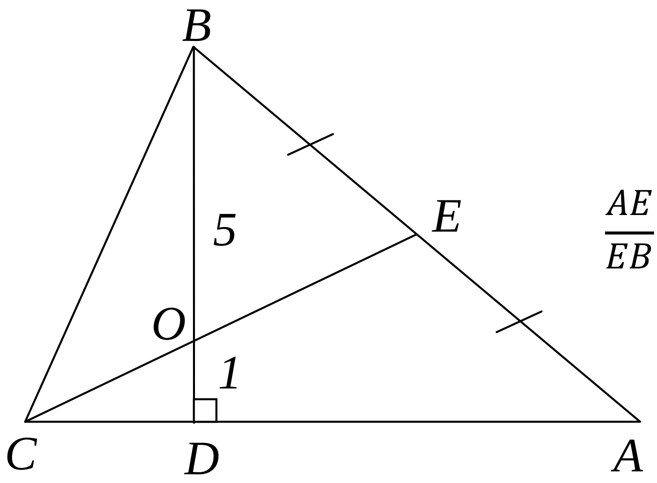
Ответ: $\frac{11}{7}$.

2.2. Теорема Фалеса, Чевы, Менелая в задачах

Теорема Фалеса, а также теоремы Чевы и Менелая применяются в задачах с соотношениями между отрезками. Очень часто при этом приходится проводить дополнительный отрезок. Идеи использования теоремы Фалеса хорошо видны на следующих примерах.

Задача 10. *В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равна 1. Найти длину стороны AB.*

Решение:



1. $BD \cap CE = O, BO = 5, OD = 1.$

2. Применим к ΔABD и секущей OE теорему Менелая:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DC}{CA} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{DC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{CA} = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = 4.$$

3. Применим теорему Менелая к ΔACE и секущей OD:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CO}{OE} \cdot \frac{EB}{BA} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{1} \cdot \frac{CO}{OE} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{1}{2}.$$

4. $CO + OE = 5; OE = 2CO.$ Значит $CO = \frac{5}{3}$.

5. $\Delta COD, \angle D = 90°$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}$.

Значит $AD = 4CD = \frac{16}{3}$.

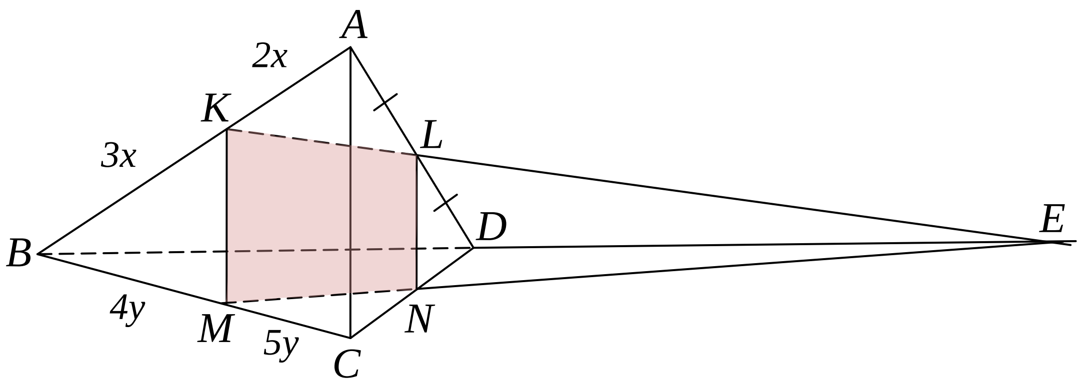
6. $\Delta ABD, \angle D = 90°$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{36 + \frac{256}{9}} = \frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Ответ: $AB = \frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Теорема Менелая используется при решении задач, связанных с сечением тетраэдра.

Задача 11. *В тетраэдре ABCD на ребрах AB, AD и BC взяты соответственно точки K, L и M так, что AK:KB=2:3, AL=LD, BM:MC=4:5. Построить сечение тетраэдра плоскостью KLM и найти, в каком отношении эта плоскость делит ребро CD.*

Решение:



1. Построим сечение.

а) *MK*

б) *KL*

в) *KL*∩*BD*=*E*

г) *ME*

д) *ME*∩*CD*=*N*

е) *NL*

MKLN – искомое сечение.

2. Применим теорему Менелая к ΔABD и секущей *KL*.

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DL}{LA}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{1}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{BE}{ED}=\frac{3}{2}.$$

3. Применим теорему Менелая к ΔBCD и секущей *MN*.

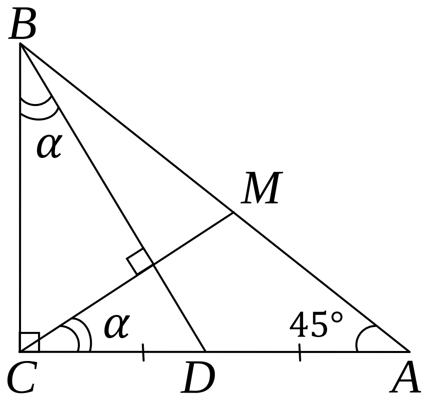
$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DE}{EB}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{CD}{ND}\cdot\frac{2}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{CD}{ND}=\frac{15}{8}.$$

Ответ: 15:8.

Решение одной задачи разными способами способствует более глубокому пониманию и усвоению геометрического материала, дает возможность сравнивать способы решения и выделять преимущества каждого из них, искать наиболее простые решения.

Задача 12. *В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC* ($\angle C = 90°$) *проведены медианы BD и отрезок* $CM \perp BD$ $(M \in AB)$. *Найти отношение AM:BM.*

Решение: 1 способ (в решении используется тригонометрия).



1. Пусть $\angle ACM = \alpha$.

2. ΔACM; применяя теорему синусов, получим: $\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{CM}{\sin 45°} \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{\sin\alpha}{\sin 45°}$.

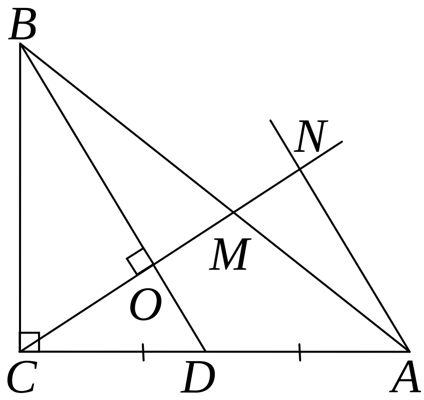
3. ΔBCN; применяя теорему синусов, получим: $\frac{BM}{CM} = \frac{\sin(90°-\alpha)}{\sin 45°} = \frac{\cos\alpha}{\sin 45°}$; $\frac{AM}{BM} = \mathrm{tg}\alpha$.

4. $\angle ACM = \angle CBD = \alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.

Следовательно $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2 способ (в решении используется подобие треугольников и теоремы о пропорциональных обрезках в прямоугольном треугольнике).



1. Проведем прямую $AN \| BD$.

2. BCD; $\angle C = \angle O = 90°$;

$$BD = \frac{\sqrt{5}}{2}; OD = \frac{CD^2}{BD} = \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

$$OB = \frac{CB^2}{BD} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. ΔANC: $AN = 2 \cdot OD = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. $\Delta AMN \sim \Delta BOM$; $\frac{AN}{OB} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3 способ (в решении используется теорема Менелая).

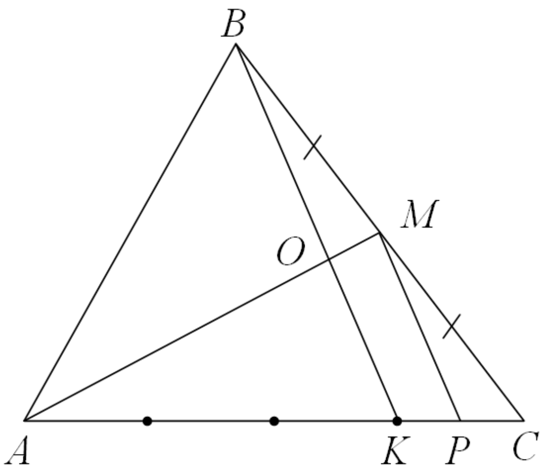
ΔABD и секущая OM. Точки A, M, B лежат на одной прямой.

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DC}{CA} = -1 \Rightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 13. *В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M так, что MB=MC, а на стороне AC взята точка K так, что AK=3KC. Отрезки BK и AM пересекаются в точке O. Найти* $\frac{AO}{OM}$.

Решение:



1. Проведем $MP \| BK$.

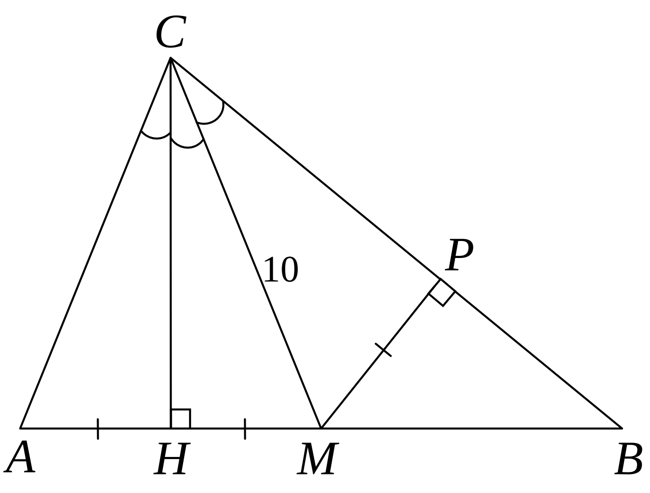
2. По теореме Фалеса $KP = PC$.

3. $AK = 3KC = 6 \cdot KP$.

4. По теореме о пропорциональных отрезках $AO : OM = AK : KP = 6$.

Ответ: 6.

Задача 14. *Определите стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из вершины одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10.*



Решение: 1. $\Delta ACM; CH -$ высота, биссектриса, медиана $\Rightarrow \Delta ACM -$ равнобедренный $\Rightarrow AC = CM = 10$ и $AH = HM = \frac{1}{4}AB$.

2. Проведем $MP \perp CB$.

3. $\Delta CHM = \Delta CPM$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow HM = MP = \frac{1}{2}MB \Rightarrow \angle MBP = 30°$.

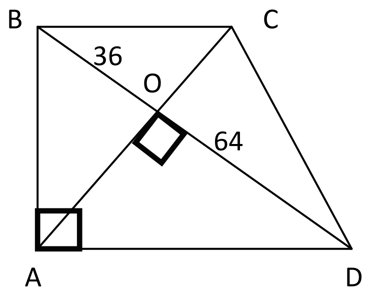
4. Тогда $\angle HCB = 60° \Rightarrow \angle ACB = 90°$.

5. $AC = 10, Ab = 20, BC = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$. Ответ: $10, 20, 10\sqrt{3}$.

Вывод: Теоремы о пропорциональных отрезках позволяют успешно решать целый класс задач. Решение задач с помощью теорем Чевы и Менелая рационально, чем их решения другими способами.

2.3. Подобие и пропорциональность в трапеции

Задача 15. *Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, и большая из них точкой пересечения делится на отрезки, равные 36 и 64. Найдите основания трапеции.*



Решение: 1) ΔBAD, $AO^2=BO*OD$, $AO^2=36*64$, $AO^2=2304$, $AO=48$.

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD, \frac{BO}{OD}=\frac{OC}{AO}, \frac{36}{64}=\frac{OC}{48}$, OC=27

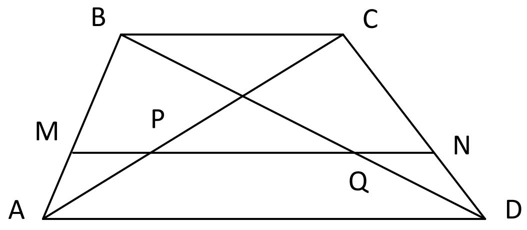
2) ΔBOC; $\angle O=90^0$, $BC^2=BO^2+OC^2$, $BC^2=36^2+27^2$, $BC^2=1296+729$, $BC^2=2025$, BC=45.

3) ΔAOD; $\angle O=90^0$, $AD^2=AO^2+OD^2$,

$AD^2=48^2+64^2$, $AD^2=2304+4096$, $AD^2=6400$, AD=80

Ответ: 45;80

Задача 16. *Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает ее боковые стороны и диагонали последовательно в точках M, P, Q, N. Доказать, что MP=QN.*



Решение:

1) $\Delta AMP \sim \Delta ABC => \frac{AM}{AB}=\frac{MP}{BC}$

2) $\Delta DNQ \sim \Delta DBC => \frac{DN}{DC}=\frac{QN}{BC}$

3) По теореме Фалеса $\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{CD}$

Следовательно $\frac{AM}{AB}=\frac{MP}{BC}=\frac{DN}{DC}=\frac{QN}{BC} => MP=QN$.

Вывод: Понятие пропорциональных отрезков используется при решении треугольников с применением теорем Фалеса, Чевы, Менелая, теоремы о биссектрисе треугольника, признаков подобия. Пропорциональность и подобие рассматриваются в трапециях и многоугольниках.

Заключение

Две стихии господствуют в математике – числа и фигуры с их многообразием свойств и взаимосвязей. Решение задачи – это всегда поиск, приводящий к выявлению каких–то зависимостей и отношений, и в этом процессе помогают не только разные приёмы и методы, но и интуиции и догадки. Как заметил Д. Пойа, «крупное научное открытие даёт решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия».

Изучение математики осуществляется в основном в процессе решения задач. Умение решать сложные задачи различными способами является одним из критериев глубины усвоение материала. Какой бы путь решения ни был выбран, успешность его использования зависит от знания определений, свойств, от знания теории и умения их применять.

Тема учебно–исследовательской работы «Пропорциональные отрезки и то, что за ними» составляет основу для решения задач в старшей школе на отношение площадей, на которые многоугольник разбивается прямой и на отношение объёмов частей многогранников, разбивающихся секущей плоскостью.

И те и другие сегодня содержатся в задачах ЕГЭ. Таким образом выбранная тема актуальна и перспективна.

В данной работе доказаны и проведены исследования свойств пропорциональных отрезков, сформулированы и решены ключевые задачи, результатом которых являются формулы, используемые при решении других, более сложных задач. Составлен банк ключевых задач.

Решено большое количество задач различными способами и разных уровней сложности. Рассмотрены основные подходы к их решению.

Приобретён определённый опыт решения планиметрических задач.

Таким образом, цель работы достигнута.

Выдвинутая гипотеза подтверждена.

Практическая ценность данного исследования заключается в использовании результатов для более качественной подготовки к олимпиадам, математическим конкурсам и ЕГЭ.

Список используемой литературы

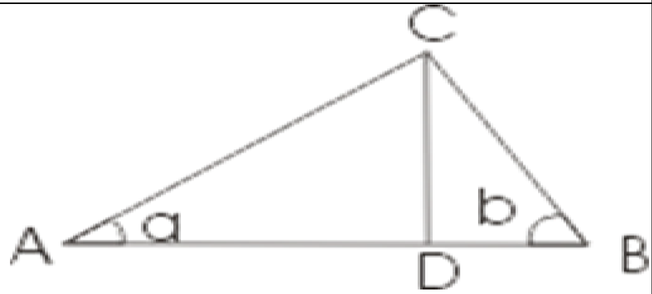
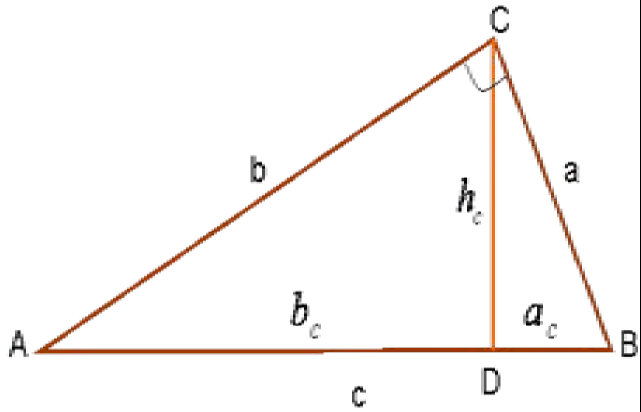
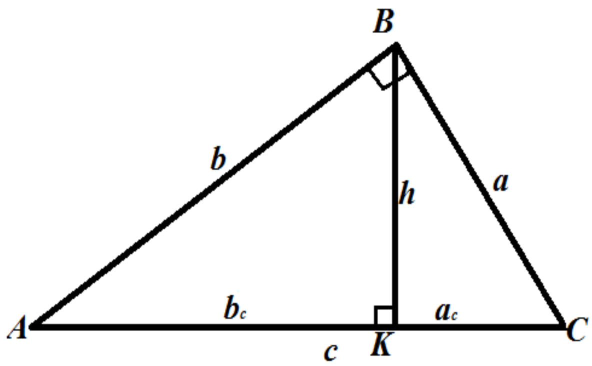
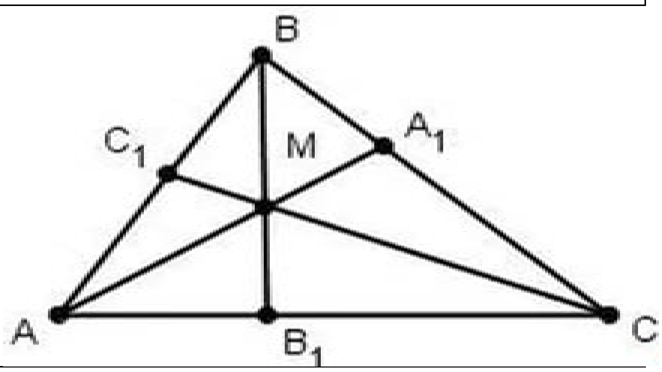
1. Атанасян Л.С. Геометрия 7–9 классы: учебник для общеобразовательного учреждения/М: «Просвещение» 2013».

2. Гордин Р.К. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4/Под редакция А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2012 – 148 с.

3. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания/ Под редакцией А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

4. Корянов А.Г. математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С4.

5.Пантелеев В.П.Статья «Пропорциональные отрезки и то, что за ними», журнал «Математика в школе» №8 2000г.

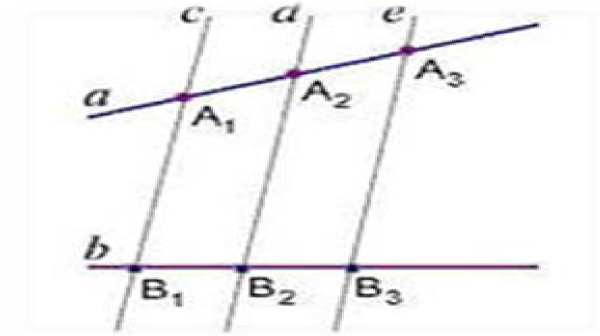
Пропорциональные отрезки. Банк ключевых задач.	
Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, Разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которого подобен данному треугольнику. ΔABC~ΔACD, ΔABC~ΔCBD, ΔACD~ΔCBD.	
Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высоты. $h_c= \sqrt{a_c * b_c}$ $h_c^2=a_c*b_c$	
Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла. $a=\sqrt{a_c * c}$, $a^2=a_c*c$ $b=\sqrt{b_c * c}$, $b^2=b_c*c$	
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. $\frac{AM}{A_1M} = \frac{BM}{B_1M} = \frac{CM}{C_1M} = \frac{2}{1}$	

<table>
<tr>
<td>

Теорема Фалеса.

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой пропорциональные отрезки.

</td>
<td>



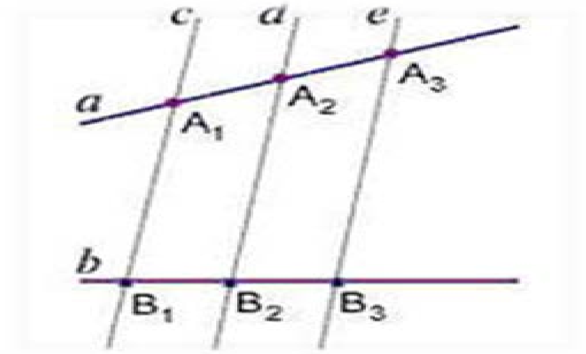
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Обобщённая теорема Фалеса.

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки.

$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$

</td>
<td>

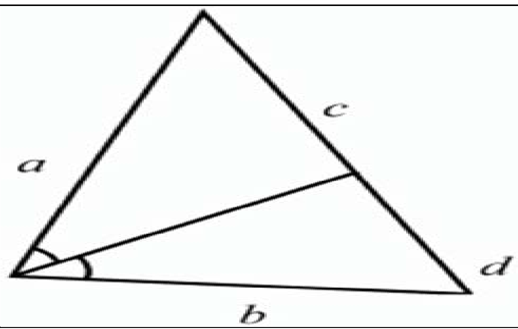


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Биссектрисы треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

</td>
<td>

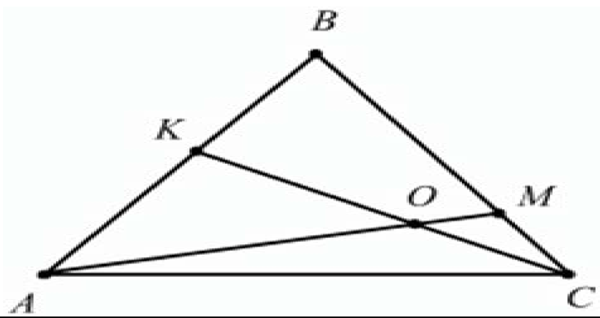


</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\frac{AK}{KB} = p; \frac{BM}{MC} = q; \frac{CO}{OK} = r$, тогда

$$pqr = p + 1.$$

</td>
<td>

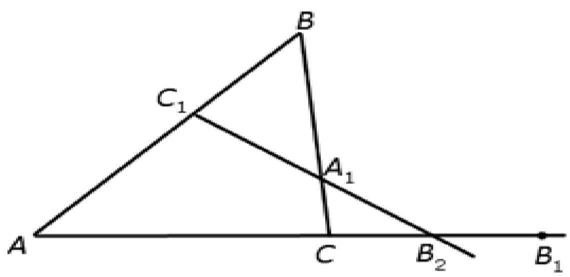


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>