Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

Прикладные вопросы математики

В поисках абсолютного центра

Голыжбина Юлия Юрьевна,
7 кл., МАОУ «СОШ №3»,
г. Краснокамск,

Собянина Анастасия Сергеевна,
учитель математики,

Пермь. 2017.

Оглавление

Введение

Моё знакомство с элементами теории графов началось ещё в прошлом году. Данное направление в математике меня очень заинтересовало. Я ознакомилась с начальной теорией и изучила метод нахождения центра графа. Узнала, что с помощью них можно моделировать сети дорог и ветки железнодорожных путей, а также решать различные комбинаторные задачи. В течение всего года я активно расширяла знания по теории графов и продолжила свою учебно-исследовательскую работу, которую начала в 6 классе, поставив перед собой новые задачи.

Цель и задачи учебно-исследовательской работы

Целью работы является нахождение абсолютного центра графа и применение данных знаний на практике. В рамках указанной цели поставлены следующие задачи:

1. Изучить специальную литературу по теории графов.
2. Освоить метод нахождения абсолютного центра графа.
3. Применить данный метод на практике.

Постановка задачи

Как известно в июне этого года на федеральной трассе Е22 начали ремонт моста через реку Сюзьву, который продолжался все лето. В связи с этим на данном участке пути образовались огромные пробки. Люди, проезжающие через мост, стали терять большое количество времени, находясь в пробках, пожарные машины не исключение. Ближайшее пожарное депо расположено в г. Нытва Пермского края. В случае чрезвычайного происшествия машина пожарной службы просто не в силах добраться до данного места, так как с одной стороны трасса практически перекрыта, а с другой, время, потраченное до пункта ЧП, станет максимальным.

Для разрешения данной ситуации появляется необходимость в установке пожарного депо. Каким же образом выбрать место для строительства, чтобы время, потраченное на проезд в самую отдаленную точку, было минимальным?

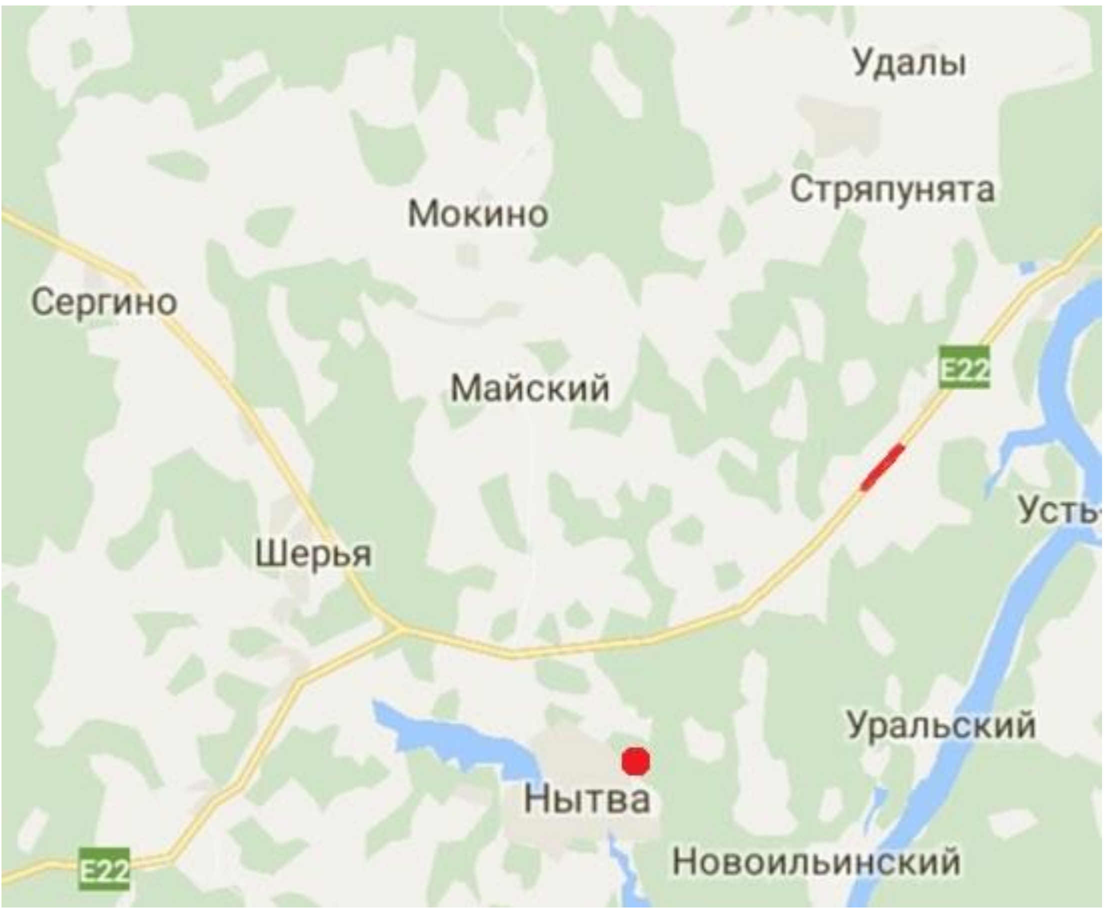


Рис. 1

Теоретическая справка

Для решения данной задачи мы воспользовались элементами теории графов, поэтому необходимо было ознакомиться со следующими понятиями:

Граф – это объект, состоящий из множества вершин и множества ребер;

Подграф графа – это граф, вершины и ребра которого принадлежат множеству вершин и ребер исходного графа.

Графы можно разделить по типу:

- *ориентированный граф* – граф, ребрам которого присвоено направление (рис. 2);
- *неориентированный граф* – соответственно, направление ребер не присвоено (рис. 3);

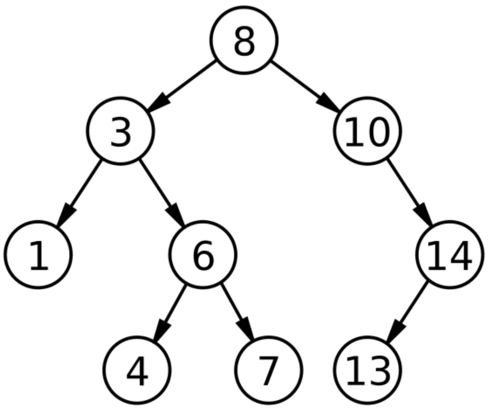


Рис. 2

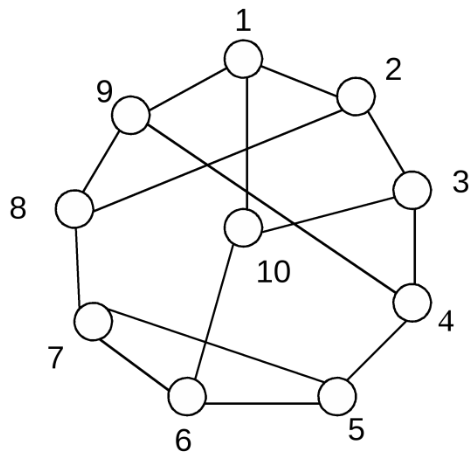


Рис. 3

Графу можно задать веса вершин и веса ребер:

Вес ребра – значение, поставленное в соответствие данному ребру;

Вес вершины – значение, поставленное в соответствие данной вершине;

Расстояние между двумя вершинами в графе – называется число, равное длине кротчайшего пути, соединяющего эти вершины;

Центр графа - это любая вершинаv, такая, что расстояние от нее до наиболее отдаленной вершины минимально;

Абсолютный цент графа – это любая точка на дуге, расстояние от которой до наиболее отдаленной вершины графа минимально.

Матрица – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы (например, целых чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

Матрица кратчайших расстояний графа – это квадратная матрица типа «вершина-вершина», содержащая в качестве элементов кратчайшие расстояния между вершинами.

Решение

В случае размещения пожарного депо интересуются расстоянием (или временем), которое необходимо для проезда в наиболее отдаленный район. Следовательно, задача состоит в минимизации это расстояния, а значит, для её решения нам необходимо найти центр графа.

Алгоритм поиска центра графа

1. Находим матрицу длин кратчайших расстояний: $A(v_{i,j}),\ i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$
2. Определяем MBB(i) для каждой вершины графа;
3. Из всех MBB(i) выбираем минимальное. Вершина, соответствующая минимальному MBB(i) будет являться центром графа.

MBB(i) – максимальное расстояние от вершины v_i до v_j.

Смоделируем карту (рис. 1) в виде неориентированного графа (рис. 4),

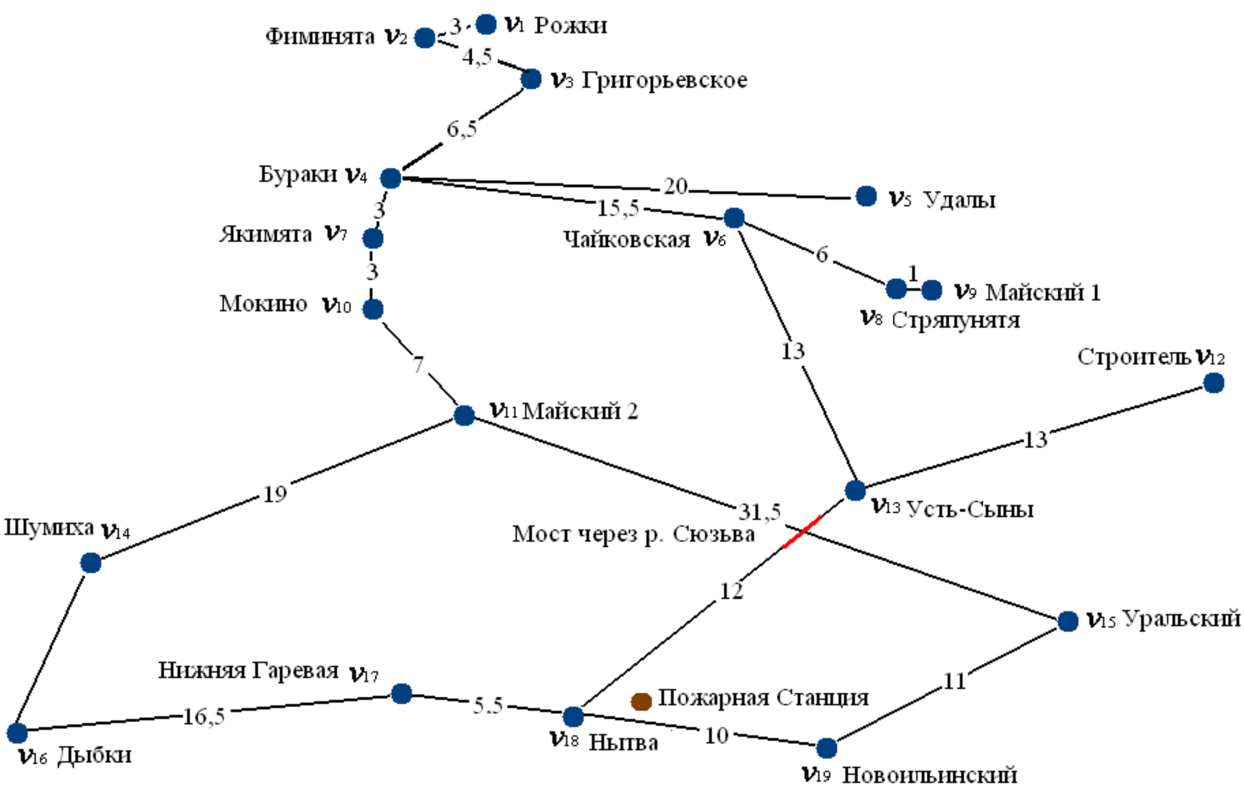


Рис. 4

Пусть вершины графа соответствуют жилым районам:

v_1 – Рожки

v_2 – Фиминята

v_3 – Григорьевское

v_4 – Бураки

v_5 – Удалы

v_6 – Чайковская

v_7 – Якимята

v_8 – Стряпунята

v_9 – Майский 1

v_{10} – Мокино

v_{11} – Майский 2

v_{12} – Строитель

v_{13} – Усть-Сыны

v_{14} – Шумиха

v_{15} – Уральский

v_{16} – Дыбки

v_{17} – Нижняя Гаревая

v_{18} – Нытва

v_{19} – Новоильинский

Ребрам графа зададим вес, который равняется расстоянию (км) между соседними пунктами (рис. 4)

Для решения данной задачи рассмотрим подграф v_1 - v_{11}, так как именно к этим населенным пунктам затрудняется проезд.

Рис. 5

Пользуясь алгоритмом поиска центра, составим матрицу длин кратчайших расстояний А($v_{i,j}$).

Матрица А($v_{i,j}$) имеет вид (таблица 1):

A =

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1	0	3	7,5	14	34	29,5	17	35,5	36,5	20	27
v_2	3	0	4,5	11	31	26,5	14	32,5	33,5	17	24
v_3	7,5	4,5	0	6,5	26,5	22	9,5	28	29	12,5	19,5
v_4	14	11	6,5	0	20	15,5	3	21,5	22,5	6	13
v_5	34	31	26,5	20	0	35,5	23	41,5	42,5	26	33
v_6	29,5	26,5	22	15,5	35,5	0	18,5	6	7	21,5	28,5
v_7	17	14	9,5	3	23	18,5	0	24,5	25,5	3	10
v_8	35,5	32,5	28	21,5	41,5	6	24,5	0	1	27,5	34,5
v_9	36,5	33,5	29	22,5	42,5	7	25,5	1	0	35,5	42,5
v_{10}	20	17	12,5	6	26	21	3	27,5	35,5	0	7
v_{11}	27	24	19,5	13	33	28,5	10	34,5	42,5	7	0

Табл. 1

Найдем МВВ(i) для каждой вершины графа:

МВВ(1)=max{v(1, j)}= 36,5

МВВ(2)=max{v(2, j)}= 33,5

МВВ(3)=max{v(3, j)}= 29

МВВ(4)=max{v(4, j)}= 22,5

МВВ(5)=max{v(5, j)}= 42,5

МВВ(6)=max{v(6, j)}= 35,5

МВВ(7)=max{v(7, j)}= 25,5

МВВ(8)=max{v(8, j)}= 41,5

МВВ(9)=max{v(9, j)}= 42,5

МВВ(10)=max{v(10, j)}= 35,5

МВВ(11)=max{v(11, j)}= 42,5

Таким образом, получаем, что минимальное значение МВВ(4)= 22,5, а значит, вершина v_4 - Бураки является в данном случае центром графа.

Рис. 6

Если опущено ограничение, состоящее в том, что пожарное депо должно размещаться в каком-то из жилых районов, то оптимальным размещением будет размещение пожарного депо в абсолютном центре графа, который может совпасть с центром, либо оказаться на любом из его ребер.

Алгоритм поиска абсолютного центра графа

1. На каждом ребре графа искусственно помещаем точку, которая претендует на роль абсолютного центра;
2. Строим для каждого ребра в одной системе координат функциональные зависимости расстояния точка-вершина;
3. Определяем точку, в которой достигается наименьшее значение верхней границы;
4. Из полученных вариантов среди вершин графа и его внутренних точек выбираем наименьшее значение расстояния до наиболее удаленной вершины графа.

Рассмотрим ребро графа v_1 - v_2 с расстоянием $d(1,2)=3$. Искусственно помещаем на нем точку *y*, соответственно расстояние $d(y,1)=x$, $d(y,2)=3-x$ (рис. 6)

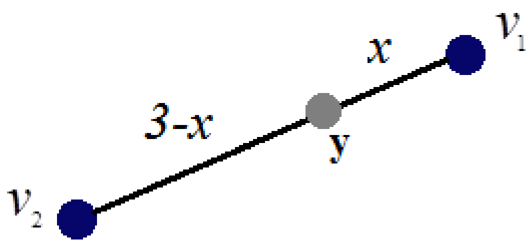


Рис. 7

Находим минимальные расстояния от точки y до каждой вершины графа. Получим следующую таблицу функций

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
y	x	3-x	7,5-x	14-x	34-x	29,5-x	17-x	25,5-x	26,5-x	20-x	27-x

Табл. 2

Строим все функции в одной системе координат и определяем точку, в которой достигается наименьшее значение верхней границы (рис. 8).

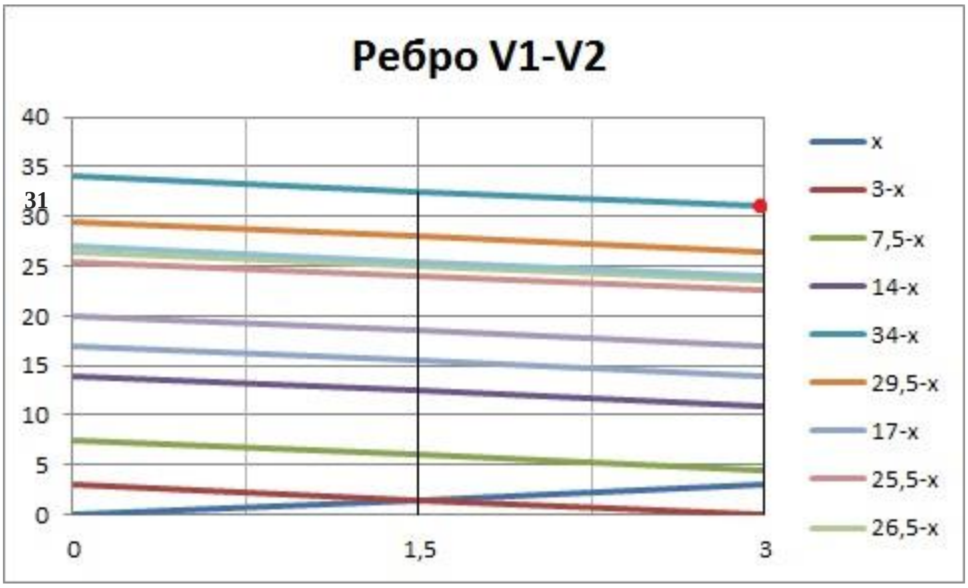


Рис. 8

На рис. 8 верхней границей является прямая y=34–x, а наименьшим значением 31 при x=3.

Используя данный алгоритм для каждого ребра графа V_1 - V_{11}, составим матрицу длин кратчайших расстояний.

Ребро	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**	**V8**	**V9**	**V10**	**V11**
1-2	x	3-x	7,5-x	14-x	34-x	29,5-x	17-x	25,5-x	26,5-x	20-x	27-x
2-3	3+x	x	4,5-x	11-x	21-x	26,5-x	14-x	32,5-x	33,5-x	17-x	24-x
3-4	7,5+x	4,5+x	x	6,5-x	26,5-x	22,5-x	9,5-x	28,5-x	29,5-x	12,5-x	19,5-x
4-5	34-x	31-x	26,5-x	20-x	x	35,5-x	23-x	41,5-x	42,5-x	26-x	33-x
4-6	29,5-x	26,5-x	22-x	15,5-x	35,5-x	x	18,5-x	6+x	7+x	21,5-x	28,5-x
4-7	17-x	14-x	9,5-x	3-x	23-x	18,5-x	x	24,5-x	25,5-x	3+x	10+x
6-8	35,5-x	32.5-x	28-x	21,5-x	41,5-x	6-x	24,5-x	x	1+x	27,5-x	34,5-x
8-9	36,5-x	33,5-x	29-x	22,5-	42,5-x	7-x	25,5-x	1-x	x	35,5-x	42,5-x
7-10	20-x	17-x	12,5-x	6-x	26-x	21-x	3-x	27,5-x	35,5-x	x	10+x
10-11	27-x	24-x	19,5-x	13-x	33-x	28.5-x	10-x	34,5-	42,5-x	7-x	x

Табл.3

Строим все графики в одной системе координат для каждого ребра. Получаем следующие графики функций:

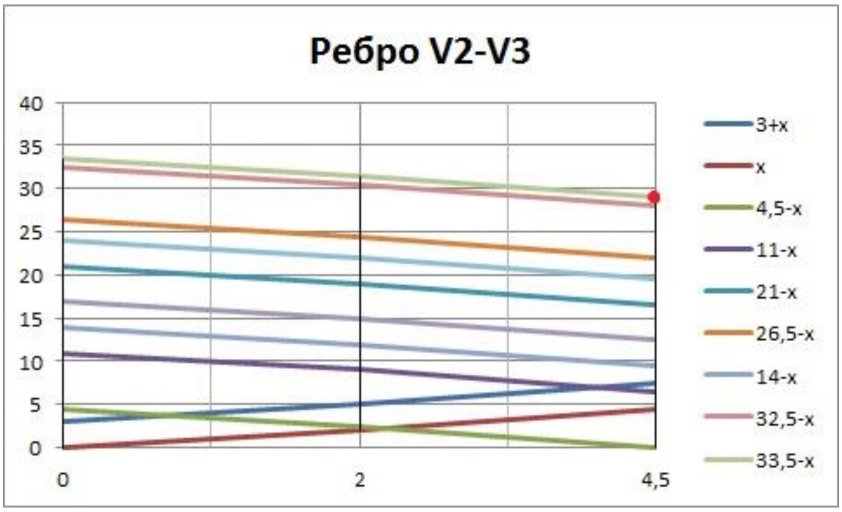


Рис. 9

$У_{наим.}$=29.

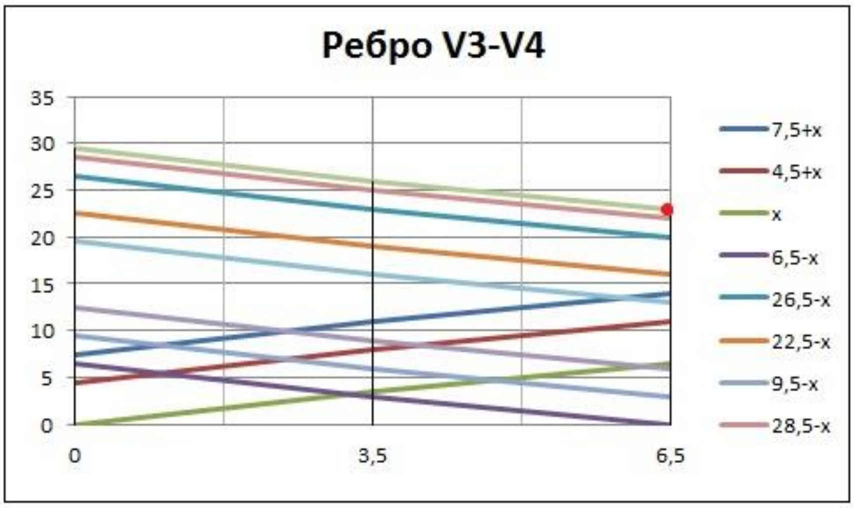


Рис. 10

У$_{наим.}$=23.

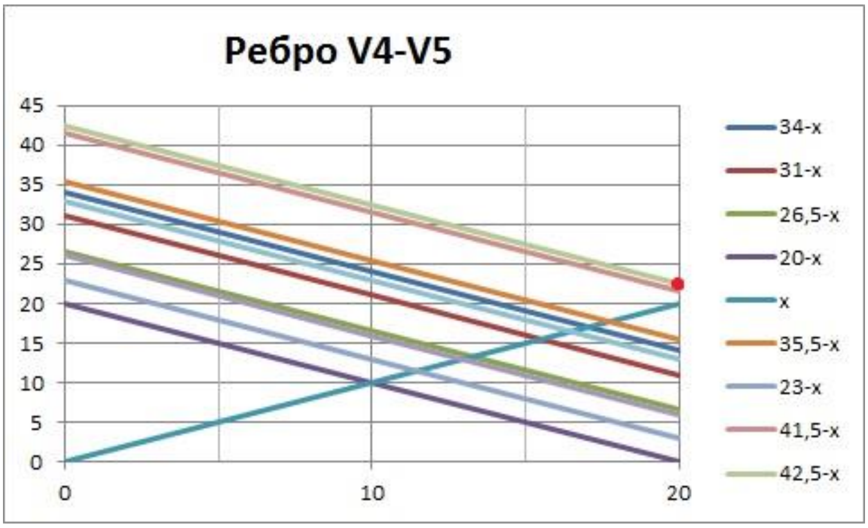


Рис. 11

У$_{наим.}$=22,5.

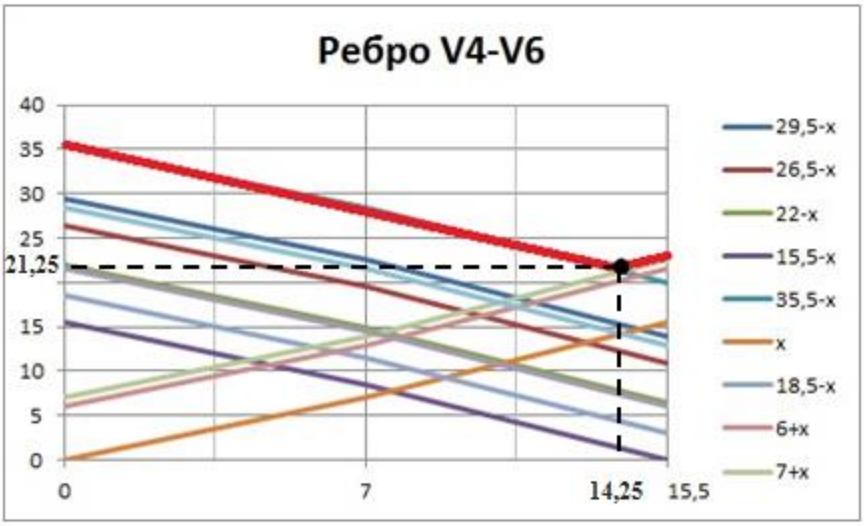


Рис. 12

На данном рисунке наименьшее значение достигается в точке пересечения двух функций $y = 35{,}5 - x$ и $y = 7 + x$. Для того чтобы найти точку их пересечения, необходимо приравнять данные функции, получим

$$35{,}5 - x = 7 + x$$

$$-2x = -28{,}5$$

$$x = 14{,}25$$

Соответственно, наименьшее значение будет достигаться в точке $y_{наим.}$=21,25.

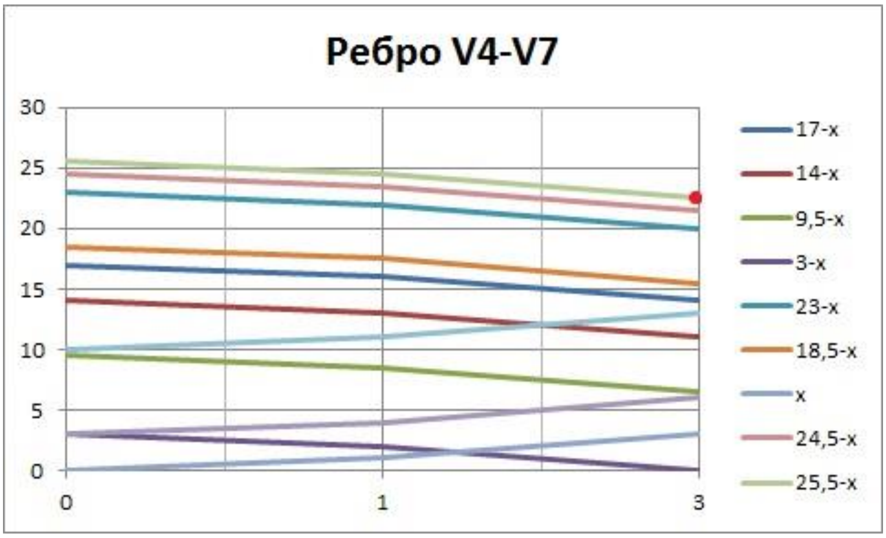


Рис. 13

$У_{наим.}$=22,5.

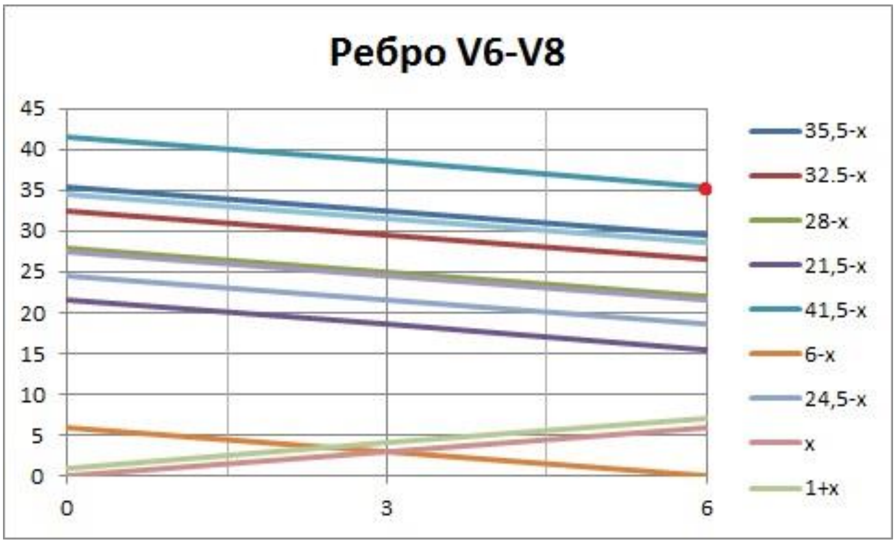


Рис. 14

$У_{наим.}$=35,5.

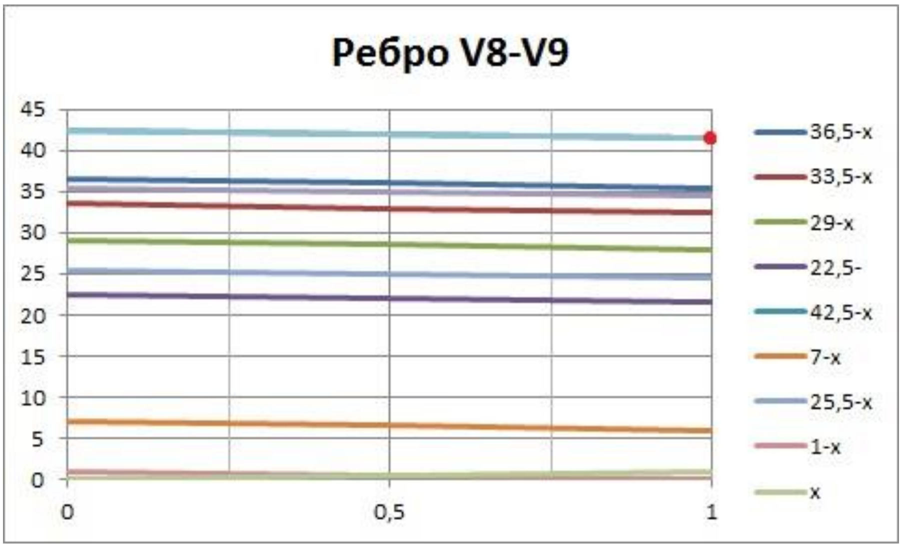


Рис. 15

$У_{наим.}$=41,5.

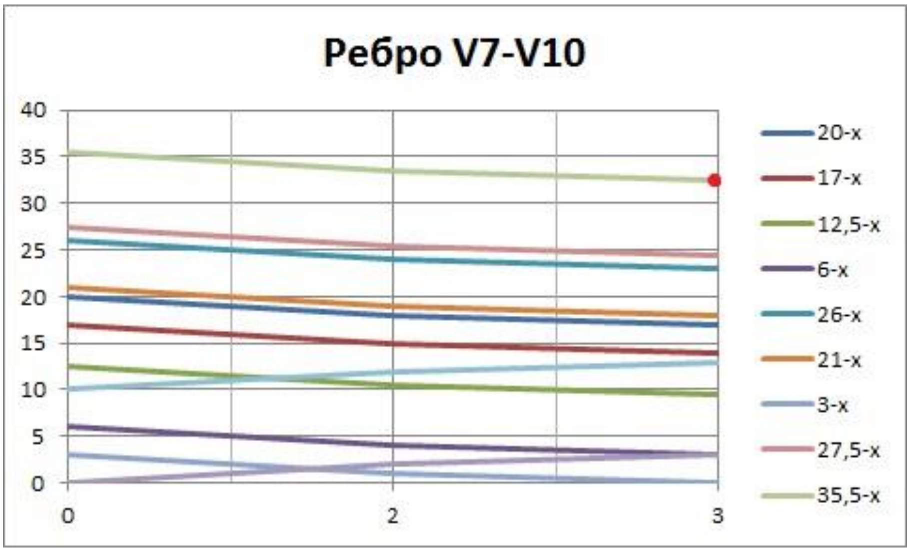


Рис. 16

$У_{наим.}$=32,5.

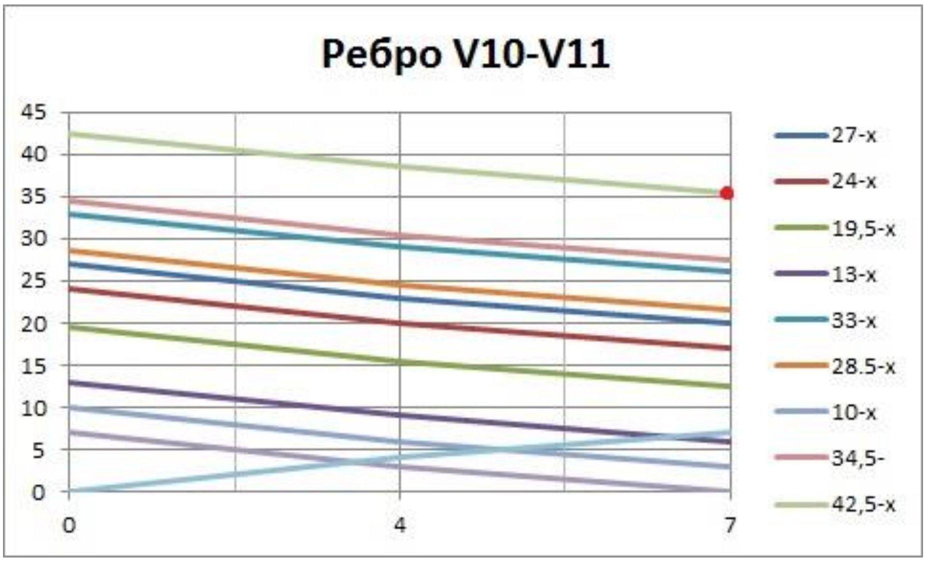
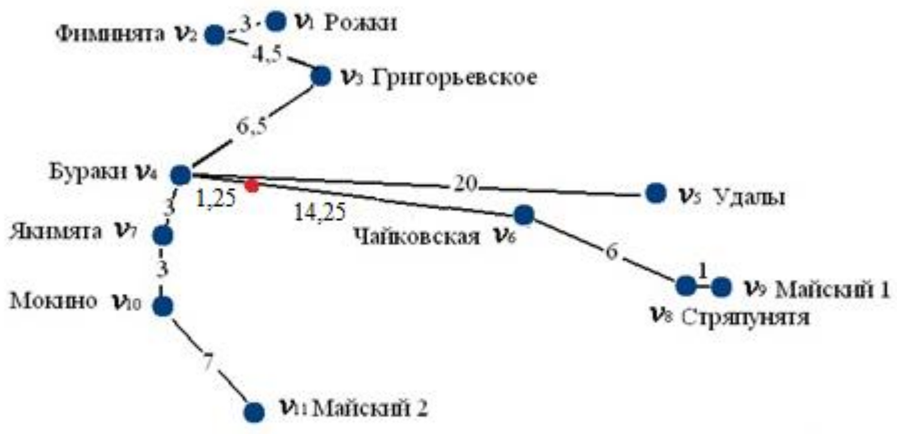


Рис. 17

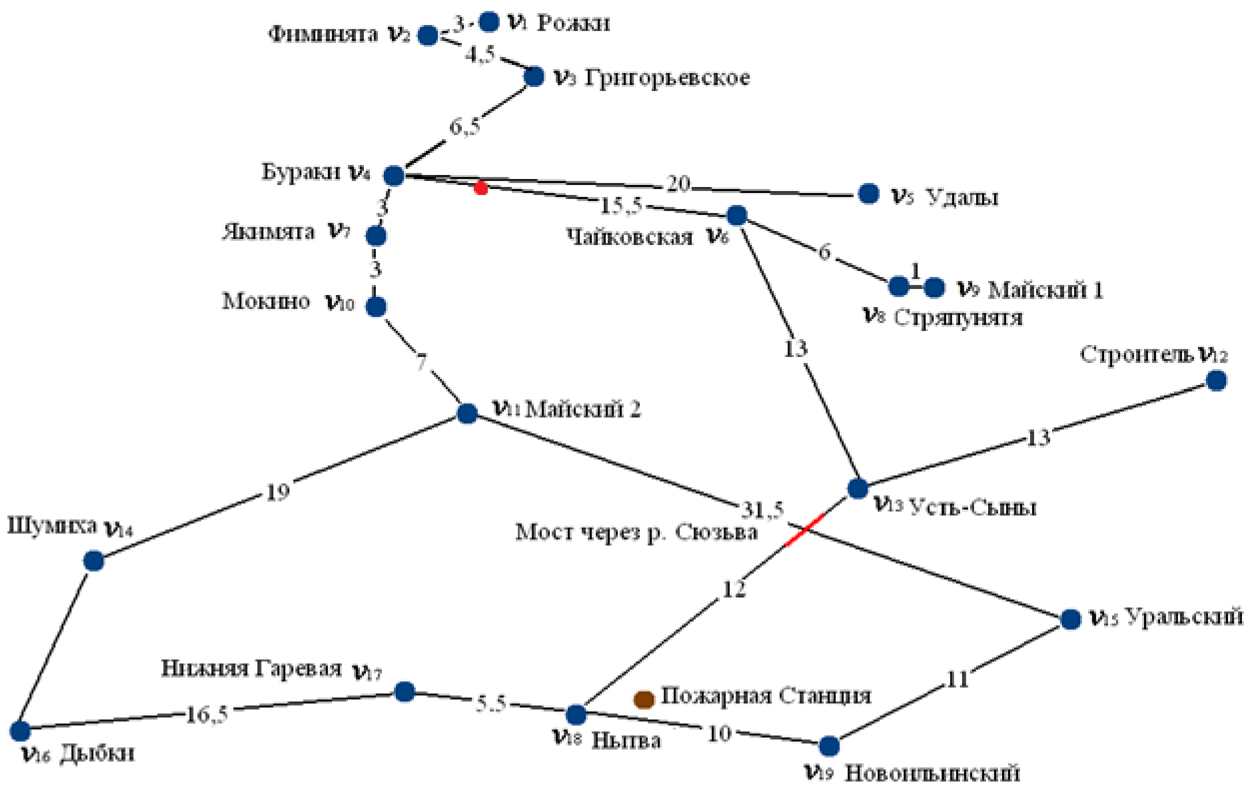
$У_{наим.}$=35,5.

Из полученных вариантов среди вершин графа и его внутренних точек выбираем наименьшее значение расстояния до наиболее удаленной вершины графа. Это расстояние 21,25 при x=14,25, следовательно, абсолютный центр будет находиться на ребре v_4 - v_6



Фиминята v_2
3
v_1 Рожки
4,5
v_3 Григорьевское
6,5
Бураки v_4
20
v_5 Удалы
1,25
14,25
3
Якимята v_7
Чайковская v_6
6
3
1
v_9 Майский 1
Мокино v_{10}
v_8 Стряпунята
7
v_{11} Майский 2

Рис. 18



Фиминята v_2
3
v_1 Рожки
4,5
v_3 Григорьевское
6,5
Бураки v_4
20
v_5 Удалы
15,5
3
Якимята v_7
Чайковская v_6
6
1
v_9 Майский 1
3
Мокино v_{10}
v_8 Стряпунята
13
Строитель v_{12}
7
v_{11} Майский 2
13
19
31,5
v_{13} Усть-Сыны
Шумиха v_{14}
Мост через р. Сюзьва
12
v_{15} Уральский
Нижняя Гаревая v_{17}
11
Пожарная Станция
16,5
5,5
v_{16} Дыбки
v_{18} Нытва
10
v_{19} Новоильинский

Рис. 19

Вывод

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) Если считать, что центром графа может являться только его вершина, то пожарную станцию необходимо разместить в вершине v_4, которая соответствует населенному пункту Бураки.

2) Если же мы учтем тот факт, что пожарное депо может быть расположено между населенными пунктами, то результат размещения пожарной станции измениться, в данном случае рациональнее её расположить на ребре v_4 - v_6, на расстоянии 1 км 250 м от пункта Бураки.

Я считаю, что поставленные задачи в работе были выполнены. Цель работы достигнута.

Список литературы

1. Н. Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход /М.: Мир, 1978г.
2. О. И. Мельников. Незнайка в стране графов /М.: КомКнига, 2007г.
3. Л. Ю. Березина. Графы и их применение. Популярная книга для школьников и преподавателей /М.: Либроком, 2009 г.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Нытвенский_район