Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

Методические аспекты изучения математики и физики

Методы решения алгебраических уравнений

Ходова Олеся Витальевна,

9 кл., МАОУ «Лицей №1» г. Кунгур

Горбунова Надежда Сергеевна,

учитель математики высшей категории

Пермь. 2017

Содержание.

I. Введение

Изучение методов решения уравнений традиционно является важнейшей составной частью школьного курса математики. К решению уравнений сводятся многие математические задачи. Уравнения постоянно предлагаются на экзаменах по математике.

В школе изучая математику, мы всё время решаем уравнения. Для каждого типа уравнений нам предлагают различные способы решения, и, наверное, у некоторых создаётся впечатление о наличии огромного числа всевозможных приёмов, которые надо специально запомнить. На самом деле это не так, есть несколько общих идей, общих методов – вот их-то и надо знать достаточно глубоко. В этом реферате мною рассмотрены методы решения алгебраических уравнений. Кроме того, имеются замечания, связанные с потерей корней и приобретением посторонних корней при решении уравнений, способы проверки корней.

Цель реферата – научиться основным приёмам решения алгебраических уравнений. Для этого в реферате приводятся необходимые теоретические сведения, и каждый приём демонстрируется на примере решения одно или нескольких уравнений.

В реферат включены как узловые теоремы и понятия из школьной математики, так и выходящие за её рамки сведения, привлекательные простотой формулировки и красотой результатов.

Общих методов решения уравнений три: метод разложения на множители, метод введения новых переменных, функционально – графический метод; каждому из них посвящён отдельный раздел реферата. По каждому методу продемонстрирована его суть, его значение, его универсальность.

II. Решение уравнений в элементарной математике

2.1. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: пусть нужно решить уравнение f(x)=0 и пусть $f(x)=f_1(x)*f_2(x)*\ldots f_n(x)$. Тогда уравнение f(x)=0 можно заменить совокупностью более простых уравнений: $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0,\ldots$, $f_n(x)=0$. Найдя корень уравнений этой совокупности и отобрав из них те, что принадлежат области определения уравнения f(x)=0, мы получим корни уравнения f(x)=0.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение: $(x^2-4)*\sqrt{x+1}=0$

Решение. Задача сводится к решению совокупности трёх уравнений:

(x-2)=0; (x+2); $\sqrt{x+1}=0$. Из первого уравнения находим: $x_1=2$;

из второго: $x_2=-2$; из третьего: $x_3=-1$.

Область определения исходного уравнения задаётся условиями $x+1\geq 0$,

$x-2 \geq -0$, откуда находим $x\geq -1$.

Значит, из найденных трёх корней отбираем два: 2 и -1. Это и будут корни исходного уравнения.

Ответ: 2, -1.

Замечание 1. Очевидно, что пример 1 был искусственным. На практике метод разложения на множители при решении уравнений встречается в других ситуациях: дано уравнение f(x)=0 и нужно преобразовать выражение f(x) к виду, $f_1(x)*f_2(x)*\ldots* f_n(x)$, с тем, чтобы превратить заданное уравнение в совокупность более простых уравнений. Но тогда полезно поговорить о приёмах такого преобразования, т.е. о приёмах разложения на множители.

В школе приёмы разложения выражения f(x) на множители изучаются некомпактно: в разных классах – разные методы. В итоге получаются следующие способы: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, использование формул сокращённого умножения (типа $a^2 - b^2= (a-b)(a+b)$). Иногда добавляется искусственный приём: представление одного из слагаемых в виде некоторой суммы и, в частности, прибавление и вычитание одного и того же выражения с целью последующей перегруппировке слагаемых.

Пример 2. Решить уравнение: x^3 -7x+6=0.

Решение. Представим слагаемое 7x в виде x+6x, получим последовательно:

x^3-x-6x+6=0,

x(x^2-1)-6(x-1)=0,

x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0,

(x-1)(x(x+1)-6)=0,

(x-1)(x^2+x-6)=0.

Из уравнения x-1=0 находим, x_1=1. Из уравнения x^2+x-6=0 находим

x_2=2, x_3= -3.

Ответ: 1; 2; -3.

Пример 3. Решить уравнение x^4-8x+63=0.

Решение. Прибавим и отнимем слагаемое 16x^2, кроме того, представим слагаемое 63 в виде разности 64-1. Получим последовательно:

x^4+16x^2-16x^2-8x+64-1 =0,

(x^4+1 6x^2+64)-(16x^2+8x+1)=0,

(x^2+8)^2-(4x+ 1)^2=0,

(x^2-4x+7)(x^2+4x+9)=0.

Теперь задача свелась к решению совокупности двух квадратных уравнений x^2-4x+7=0;

x^2+4x+9=0, ни одно из которых не имеет действительных корней.

Ответ: нет действительных корней.

Замечание 2. Преобразования, подобные тому, что сделаны в примере 2, можно научиться выполнять после нескольких тренировок. Сложнее выглядят преобразования в примере 3. Возникает вопрос: чтобы разложить многочлен p(x) на множители, всегда надо что-то угадать, действовать вслепую, надеяться на озарение или есть какие-то разумные рецепты? Оказывается, выход, пусть не на все случаи жизни, есть.

Теорема 1. Если $x=x_1$ - корень многочлена $p(x)$, то многочлен $p(x)$ можно разложить на множители, одним из которых будет $x-x_1$.

Доказательство. Пусть $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$.

Если x_1 - корень многочлена, то $p(x_1)=0$, т. е. $ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1+m=0$.

А теперь поступим так: напишем $p(x)$ и $p(x_1)$ друг под другом и составим разность $p(x) - p(x_1)$:

$p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$

-

$p(x_1)=ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + m$

$p(x)-p(x_1)-a(x^4-x_1^4)+b(x^3-x_1^3)+c(x^2-x_1^2)+d(x-x_1)+(m-m)$.

далее имеем (учитывая, что $p(x_1)=0$);

$p(x)=a(x-x_1)(x+x_1)(x^2+x_1^2)+b(x-x_1)(x^2+x_1x+x_1^2)+c(x-x_1)(x+x_1)+d(x-x_1)=(x-x_1)*q(x)$.

Здесь $q(x)$ тот многочлен, который останется после вынесения за скобки общего множителя $x-x_1$.

<u>Пример 4.</u> Решить уравнение $6x^3+13x^2-19x-12=0$.

Решение.

1. Выпишем все делители свободного члена, т. е. делители числа -12: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12.

2. Будем последовательно вычислять (a_k), подставляя вместо a_k, выписанные значения ($a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=2$, $a_4=-2$...):

$p(1)=6+13-19-12 \neq 0$;

$p(-1)=-6+13+19-12\neq0$;

$p(2)=48+52-38-12\neq0$;

$p(-2)=-48+52+38-12\neq0$;

$p(3)=162+117-57-12\neq0$;

$p(-3)=-162+117+57-12=0$.

Итак, число -3 обращает многочлен $p(x)$ в нуль, т. е. $x_1= -3$ — корень заданного уравнения.

3. Разложим $p(x)$ на множители, выделяя множитель $x+3$:

$p(x)-6x^3+13^2-19x-12=6x^3+18x^2-5x^2-15x-4x-12=6x^2(x+3)-5x(x+3)-4(x+3)=(x+3)(6x^2-5x-4)$

4. Заданное уравнение преобразуется к виду $(x+3)(6x^2-5x-4)=0$, и далее, $x+3=0$; $6x^2-5x-4=0$.

Из первого уравнения находим $x_1=-3$, из второго – $x_2= -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{4}{3}$.

Ответ: -3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$.

Замечание 3. Метод разложения на множители особенно активно используется для двух классов уравнений: рациональных и тригонометрических. Рациональные уравнения в большинстве случаев преобразуются к виду p(x)=0, где p(x) - многочлен, значит некоторые представления об их решении можно почерпнуть из приведённых выше примеров.

2.2 Симметрические и возвратные уравнения

Симметрические уравнения третьей степени

Уравнения вида $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0,$ (1)

называются *симметрическими уравнениями третьей степени.* Поскольку $ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a)$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$x + 1 = 0$ и $ax^2 + (b - a)x + a = 0$,

решить которую не представляет труда.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Уравнение (2) является симметрическим уравнением третьей степени. Поскольку $3x^3 + 4x^2 + + 4x + 3 = 3(x^3 + 1) + 4x(x + 1) = (x + 1)(3x^2 - 3x + 3 + 4x) = (x + 1)(3x^2 + + x + 3)$, то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$x + 1 = 0$ и $3x^2 + x + 3 = 0$.

Решение первого из этих уравнений есть $x = -1$, второе уравнение решений не имеет.

О т в е т: $x = -1$.

Симметрические уравнения четвертой степени

Уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0,$ (3)

называются *симметрическими уравнениями четвертой степени.*

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (3), то, разделив обе части уравнения (3) на x^2, получим уравнение, равносильное исходному (3):

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0. \qquad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

В этом уравнении сделаем замену $x + \frac{1}{x} = y$, тогда получим квадратное уравнение $ay^2 + by + c - 2a = 0$. (5)

Если уравнение (5) имеет два корня y_1 и y_2, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$x^2 - xy_1 + 1 = 0$ *и* $x^2 - xy_2 + 1 = 0$.

Если же уравнение (5) имеет один корень y_0, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - y_0x + 1 = 0$.

Наконец, если уравнение (5) не имеет корней, то и исходное уравнение также не имеет корней.

Возвратные уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \dots + a_nx^{n+1} + \lambda a_nx^n + \\ + \lambda^3a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\lambda^{2n+1} = 0, \quad (8)$$

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \\ + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2a_{n-2}x^{n-2} + \dots + \lambda^na_0 = 0, \quad (9)$$

где λ — фиксированное число и $a_0 \neq 0$ называются ***возвратными уравнениями.***

При $\lambda = 1$ уравнения (8) и (9) являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени (8) всегда имеет корень $x = -\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} + x^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + x^{2n-1}) + \dots + a_nx^n(x + \lambda) = 0$$

и при $x = -\lambda$ выражения в каждой скобке обращаются в нуль. Выделив множитель $x + \lambda$ из каждой скобки, можно доказать, что уравнение (8) равносильно совокупности уравнений: уравнения $x + \lambda = 0$ и некоторого возвратного уравнения четной степени.

Для решения возвратного уравнения четной степени поступают следующим образом.

Поскольку $\boldsymbol{x} = 0$ не есть корень уравнения (9), то, разделив уравнение (9) на $\boldsymbol{x^n}$ и сгруппировав члены, получим уравнение

$$a_0\left(x^n + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^n\right) + a_1\left(x^{n-1} + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(x+\frac{\lambda}{x}\right) + a_n = 0. \qquad (10)$$

Положим $\boldsymbol{x + \frac{\lambda}{x} = u}$, тогда имеем

$$x^2 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 = u^2 - 2\lambda,$$

$$x^3 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^3 - 3\lambda\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) = u^3 - 3\lambda u,$$

$$x^4 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^4 = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^4 - 4\lambda\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) - 6\lambda^2 = u^4 - 4\lambda u^2 + 2\lambda^2$$

и т. д., и уравнение (10) степени $2n$ относительно x запишем в виде алгебраического уравнения степени n относительно u. Таким образом, мы от уравнения степени $2\boldsymbol{n}$ перешли к уравнению степени $\boldsymbol{n}$. Если теперь удастся решить полученное уравнение степени $\boldsymbol{n}$, то найдутся все корни уравнения (9).

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0. \qquad (11)$$

Р е ш е н и е. Уравнение (11) является возвратным уравнением четвертой степени ($\lambda = -1$). Поскольку $\boldsymbol{x} = 0$ не является корнем этого уравнения, то оно равносильно уравнению

$$2x^2 + 3x - 3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

или в виде

$$2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0. \qquad (12)$$

Положим $x - \frac{1}{x} = y$, запишем уравнение (12) в виде $2y^2 + 3y + 1 = 0$. Корни этого уравнения есть $y_1 = -1$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, исходное уравнение (11) равносильно совокупности уравнений

$x - \frac{1}{x} = -1$ и $x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$.

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, а решения второго $x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ и $x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Следовательно, эти четыре корня являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

Уравнения четвертой степени с дополнительными условиями на коэффициенты

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0,$ (20)

где $a \neq 0,\ b \neq 0,\ d \neq 0$ и $f = \frac{ad^2}{b^2}$.

Так как x = 0 не есть корень этого уравнения, то, разделив его на x^2, получим уравнение

$ax^2 + \frac{f}{x^2} + bx + \frac{d}{x} + c = 0.$

Обозначив $bx + \frac{d}{x} = y$ и учитывая, что

$ax^2 + \frac{f}{x^2} = \frac{a}{b^2}(b^2x^2 + \frac{d^2}{x^2}) = \frac{a}{b^2}[(bx + \frac{d}{x})^2 - 2bd] = \frac{a}{b^2}(y^2 - 2bd),$ (21)

перепишем уравнение в виде

$\frac{a}{b^2}y^2 + y + c - 2a\frac{d}{b} = 0.$

После нахождения решений этого уравнения мы найдем решения исходного уравнения.

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение

$X^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$ (22)

Решение. В данном уравнении $a = 1,\ b = 2,\ d = 4,\ f = 4$. Поскольку $a \neq 0$, $b \neq 0,\ d \neq 0,\ f = \frac{ad^2}{b^2}$, то это уравнение рассматриваемого типа. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (21), то, разделив это уравнение на x^2 и сгруппировав его члены, получим уравнение $(x + \frac{2}{x})^2 + 2(x + \frac{2}{x}) - 15 = 0$, равносильное уравнению (21). Так как решения уравнения $y^2 + 2y - 15 = 0$ есть $y_1 = -5$ и $y_2 = 3$, то исходное уравнение (21) равносильно совокупности уравнений

$x + \frac{2}{x} = 3$ и $x + \frac{2}{x} = -5$

решения которой есть $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2},\ x_4 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2},\ x_4 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$.

2.3 Искусственные способы решения алгебраических уравнений

Здесь будут приведены некоторые нестандартные способы решения алгебраических уравнений.

Умножение уравнения на функцию

Иногда решение алгебраического уравнения существенно облегчается, если умножить обе его части на некоторую функцию — многочлен от неизвестной. При этом надо помнить, что возможно появление лишних корней — корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из таких корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число его корнем.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0. \quad (1)$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен $x^2 + 1$, не имеющий корней, получим уравнение

$$(x^2+1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0, \quad (2)$$

равносильное уравнению (1). Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^{10} + 1 = 0. \quad (3)$$

Ясно, что уравнение (3) не имеет действительных корней, поэтому и уравнение (1) их не имеет. Ответ: нет решений.

Пример 2. Решить уравнение

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0. \quad (4)$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен $x + \frac{1}{2}$, получим уравнение

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0, \quad (5)$$

являющееся следствием уравнения (4), так как уравнение (5) имеет корень $x = = -\frac{1}{2}$, не являющийся корнем уравнения (4).

Уравнение (5) есть симметрическое уравнение четвертой степени. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (5), то, разделив обе его части на $2x^2$ и перегруппировав его члены, получим уравнение

$$3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - \frac{41}{4} = 0, \qquad (6)$$

равносильное уравнению (5). Обозначив $y = x + \frac{1}{x}$, перепишем уравнение (6) в виде

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня: $y_1 = -\frac{5}{2}$ и $y_2 = \frac{13}{6}$. Поэтому уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$.

Решив каждое из этих уравнений, найдем четыре корня уравнения (6), а тем самым и уравнения (5):

$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Так как корень $x_4 = -\frac{1}{2}$ является посторонним для уравнения (4), то отсюда получаем, что уравнение (4) имеет три корня: x_1, x_2, x_3.

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -2$.

Замечание. Прием, рассмотренный в примере 2, можно применять к уравнениям, которые после умножения на некоторый многочлен превращаются в возвратные или симметрические уравнения.

Например, таким образом можно решать уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad (8)$$

где $a \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq a$, $a(c - a) = d(b - d)$. В самом деле, умножив это уравнение на многочлен $x + \frac{a}{d}$, получим симметрическое уравнение четвертой степени, среди корней которого содержится и корень $x = -\frac{a}{d}$. Отметим, что этот корень может быть посторонним корнем для уравнения (8).

Угадывание корня уравнения

Иногда внешний вид уравнения подсказывает, какое число является корнем уравнения.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$x^3 + 3x - 12^3 - 3 * 12 = 0.$

Р е ш е н и е. Из внешнего вида этого уравнения очевидно, что $x = 12$ есть его корень. Для нахождения остальных корней преобразуем многочлен

$x^3 + 3x - (12^3 + 3 * 12) = (x^3 - 12^3) + 3(x - 12) = (x - 12)(x^2 + 12x + 12^2 + +3) = (x - 12)(x^2 + 12x + 147).$

Так как многочлен $x^2 + 12x + 147$ не имеет корней, то исходное уравнение имеет единственный корень 12**.**

О т в е т: $x = 12$.

Использование симметричности уравнения

Иногда внешний вид уравнения — некоторая его симметричность — подсказывает способ решения уравнения.

П р и м е р 7. Решить уравнение

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{(5 - \sqrt{5} + 1)^3} = \frac{x^2(x-1)^2}{5(\sqrt{5} - 1)^2} \qquad (14)$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что внешний вид уравнения подсказывает, что один из корней уравнения (14) есть $x_1 = \sqrt{5}$. Однако для нахождения остальных корней этого уравнения прием, предложенный в предыдущем пункте (разложение многочлена на множители), здесь мало поможет. Перепишем уравнение (14) в несколько ином виде.

Поскольку справедливы тождественные равенства

$x^2 - 1 + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4},$

$x(x - 1) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$

то уравнение (14) можно переписать так:

$$\frac{[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^3}{(5 - \sqrt{5} + 1)^2}. \qquad (15)$$

Теперь очевидно, что если x_0 — корень уравнения (15), то $x_1 = 1 - x_0$ также корень уравнения (15), поскольку

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (x_1 - \frac{1}{2})^2.$$

Покажем, что если x_1 причем $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 1$, есть корень уравнения (14), то $x_2 = \frac{1}{x^1}$ также есть корень этого уравнения. Действительно, так как

$$\frac{(x_2^2 - x_2 + 1)^3}{x_2^2(x_2 - 1)^2} = \frac{(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1)^3}{\frac{1}{x_1^2}(\frac{1}{x_1} - 1)^2} = \frac{(1 - x_1 + x_1^2)^3}{x_1^6 \frac{1}{x_1^4}(1 - x_1)^2} = \frac{(x_1^2 - x_1 + 1)^3}{x_1^2(x_1 - 1)^2},$$

то отсюда и вытекает это утверждение.

Итак, если x_1 ($x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 1$) — корень уравнения (14), то оно имеет еще корни

$$\frac{1}{x_1},\ 1 - x_1,\ 1 - \frac{1}{x_1},\ \frac{1}{1 - \frac{1}{x_1}},$$

т. е. уравнение (14) имеет корни

$$x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3 = 1 - \sqrt{5},\ x_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{5}},\ x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_6 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Поскольку уравнение (14) есть алгебраическое уравнение шестой степени, то оно имеет не более шести корней. Таким образом, мы нашли все корни уравнения (14).

Ответ: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_3 = 1 - \sqrt{5}$, $x_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{5}}$, $x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_6 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}$.

Использование суперпозиции функций

Иногда можно найти корень уравнения, если заметить, что функция, находящаяся в одной из частей уравнения, является суперпозицией некоторых более простых функций.

Пример 8. Решить уравнение

$$(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x. \qquad (16)$$

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + 2x - 5$, тогда уравнение (16) можно переписать в виде $f(f(x)) = x$. Теперь очевидно, что если x_0 — корень уравнения $f(x) = x$, то x_0 и корень уравнения $f(f(x)) = x$. Корни уравнения x^A

$+ 2x - 5 = x$ есть $x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Следовательно, и уравнение (16) имеет эти корни. Переписав уравнение (16) в виде

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0 \qquad (17)$$

и разделив многочлен $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10$ на многочлен $(x+x_1)(x - x_2)$, получим, что уравнение (17) можно записать в виде $(x^2 + x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 0$. Следовательно, корнями уравнения (16) наряду с x_1 и x_2 являются также корни уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$, т.е. числа $x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Исследование уравнения на промежутках действительной оси

Иногда решения уравнения можно найти, исследуя его на разных числовых промежутках.

Пример 9. Решить уравнение

$$2x^9 - x^5 + x - 2 = 0. \qquad (18)$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $2(x^9 - 1) - x(x^4 - 1) = 0$ или, используя формулу разности

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

в виде

$$(x - 1)(2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) = 0.$$

Отсюда видно, что один из корней данного уравнения есть $x = 1$. Докажем, что уравнение

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0 \qquad (19)$$

решений не имеет.

Разобьем числовую ось на промежутки $(-\infty; -1]$, $(-1; 0]$, $(0; +\infty)$

Для любого x из промежутка $(0; +\infty)$ имеем, то левая часть уравнения (19) положительна, поэтому на этом промежутке уравнение решений не имеет. Поскольку

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 2x^8 + 2x^6(x + 1) + 2x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1) + (1 - x^4),$$

то для любого x из промежутка (-1; 0] этот многочлен положителен. Это означает, что на промежутке (-1; 0] уравнение (19) также не имеет решений. Поскольку

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 2x^7(x + 1) + 2x^5(x + 1) + x^3(x + 1) + x(x + 1) + 2,$$

то для любого x из промежутка $(+\infty; -1]$ этот многочлен положителен. Следовательно, и на промежутке $(-\infty; -1]$ уравнение (19) не имеет решений.

Итак, данное уравнение (19) имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: $x=1$.

III. Заключение

В своей работе я рассмотрела теоретический материал по решению уравнений, которые являются универсальными для различных типов уравнений. Он рассчитан на широкий круг читателей, так как будет понятен всем, кто достаточно хорошо знает школьную математику.

Мой реферат может помочь ученикам самостоятельно изучить способы решения уравнений, а также научиться самостоятельно решать уравнения с использованием полученных знаний. Весь теоретический материал сопровождается подробным доказательством и разбором типовых задач.

Данный реферат может быть полезен и учителям математики, которые решили обобщить способы решения уравнений на итоговых уроках.

Несомненно, реферат будет полезен ученикам, которые самостоятельно изучают математику и более углублённо, чем на уроках.

Работая над рефератом, я узнала много нового, то, что на уроках ещё не изучалось. Полученные знания я буду использовать на практике, решая уравнения различных типов.

IV. Список литературы

1. А. Г. Мордокович «Решаем уравнения». М.,1995.
2. А. Г. Курош «Алгебраические уравнения произвольных степеней». М., 1975.
3. В. Г. Чирский, Е.Т. Шавгулидзе «Уравнения элементарной математики». М., 1992.
4. С. Н. Олехин, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения». М., 1985.
5. А. О. Генфольд «Решения уравнений в целых числах». М., 1989.
6. В. В. Якубович, Р. С. Мельник, Е. Г. Цылова «Алгебраические уравнения». Пермский государственный технический университет, 1994

V. Приложение

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$a = 2$ $b = -5$ $c = 2$

$D = 25 - 4 * 2 * 2 = 9$

$\sqrt{D} = 3$

$x_1 = \frac{5+3}{2*2} = \frac{8}{4} = 2$

$x_2 = \frac{5-3}{2*2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

2) $x^2 + 9x + 14 = 0$

$a = 1$ $b = 9$ $c = 14$

$D = 81 - 4 * 1 * 14 = 81 - 56 = 25$

$\sqrt{D} = 5$

$x_1 = \frac{-9+5}{2*1} = \frac{-4}{2} = -\frac{2}{1} = -2$

$x_2 = \frac{-9-5}{2*1} = \frac{-14}{2} = -7$

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -7$

3) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a = 4$ $b = -4$ $c = -3$

$D = 16 - 4 * 4 * (-3) = 64$

$\sqrt{D} = 8$

$x_1 = \frac{4+8}{2*4} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5$

$x_2 = \frac{4-8}{2*4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} = -0,5$

Ответ: $x_1 = 1,5$, $x_2 = -0,5$

4) $(3x - 1) * (2x - 2) = (x - 4)^2$

$6x^2 - 6x - 2x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$5x^2 - 4 = 0$

$5x^2 = 14 \ |:5$

$x^2 = \frac{14}{5}$

$D = 4 – 4 * 5 * (-16) = 4 – 320 = -316$

$x_1 = \sqrt{\frac{14}{5}}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{14}{5}}$

Ответ: нет корней.

5) $2x – (x + 1)^2 = 3x^2 – 5$

$2x – (x^2 + 2x + 1) = 3x^2 – 5$

$2x – x^2 – 2x – 1 = 3x^2 – 5$

$-4x^2 + 4 = 0 \mid *(-1)$

$4x^2 – 4 = 0 \mid :4$

$x^2 – 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1)$

$x = 1$ $x = -1$

Ответ: $x = 1, x = -1$

6) $x^4 + x^2 + 6x – 8 = 0$

делители 8: $\pm1; \pm2; \pm 4; \pm8$

если $x = 1$, *то* $1^4 + 1^2 + 6*1 – 8 = 0$ *верно*

$x = 1$ *корень уравнения*

$P(x) \vdots x – 1$

получается $x^3 + x^2 + 2x + 8$

$P(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 8).$

$Q(x) = x^3 + x^2 + 2x + 8$

делители 8: $\pm1; \pm2; \pm 4; \pm8$

если $x = -1$, *то* $-1 + 1 - 2 + 8 = 6$ *неверно*

если $x = -2$, *то* $-8 + 4 - 4 + 8 = 0$ *верно*

$x = -2$ *корень уравнения*

$Q(x) \vdots x + 2$

Получается $x^2 - x + 4$

$Q(x) = (x +2)(x^2 – x +4)/$

$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 – x + 4)$

$(x - 1)(x + 2)(x^2 – x + 4) = 0$

$x = 1$ $x = -2$ $x^2 – x + 4 = 0$

$D = -15$

нет корней

Ответ: $x = 1, x = -2.$

7) $x^4 – 5x^2 + 6 = 0$

$x^2 = t$

$x^4 = t^2$

$t^2 – 5t + 6 = 0$

$t^2 = 2$ $\quad t = 3$

$x^2 = 2$ $\quad x^2 = 3$

$x_1 = \sqrt{2}$ $\quad x_1 = \sqrt{3}$

$x_2 = -\sqrt{2}$ $\quad x_2 = -\sqrt{3}$

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

8) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

$y = x^2$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = 1$ $\quad y_2 = -3$

$x^2 = 1$ $\quad x^2 = -3$

$x_1 = -1$ $\quad x_2 = 1$

Ответ: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

9) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

$(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2+x) -1 = 0$

$y = x^2 + x$

$(y + 1)^2 - 3y - 1 = 0,$

$y^2 - y = 0$

$y_1 = 0$ $\quad y_2 = 1$

$x^2 + x = 0$ $\quad x^2 + x = 1$

$x_1 = 0$, $x_2 = -1$

$x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

10) $(x^2 + 3x - 4)^2 - 2x(x^2 + 3x - 4) - 3x^2 = 0.$

$y = x^2 + 3x - 4$

$y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 12x^2}}{2} = \frac{2x \pm 4x}{2}$

$y_1 = 3x$, $y_2 = -x$

$x^2 + 3x - 4 = 3x$ и $x^2 + 3x - 4 = -x$.

$x_1 = -2$ $x_2 = 2$

$x_3 = -2-\sqrt{6}$ $x_4 = -2+\sqrt{6}$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2-\sqrt{6}$, $x_4 = -2+\sqrt{6}$.

11) $x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^2(x + 1) + 2(x+1) = 0$ или $(x + 1)(x^2 + 2) = 0$

$x + 1 = 0$, $x^2 + 2 = 0$

$x = -1$

Ответ: $x = -1$.

12) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

делители 2: ± 1 *и* ± 2

если $x = -1$, *то* $6 \cdot (-1)^3 - 13 \cdot (-1)^2 + (-1) + 2 \neq 0$ *неверно*

$x = 2$, *то* $6 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 0$ *верно*

$x = 2$ *корень уравнения*

$P(x) \vdots x - 2$

$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = (x - 2) \cdot Q(x)$,

получается $x^3 + x^2 + 2x + 8$

$P(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 8)$.

многочлен $Q(x)$ *можно найти, поделив на* $x-2$ *многочлен* $6x^3 - 13x^2 + x + 2$.

$(x-2)(6x^2 - x - 1) = 0$.

$(x-2)(6x^2 - x - 1)$

$x - 2 = 0,\ 6x^2 - x - 1 = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{2}$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{2}$.

13) $x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 18x + 8$

$P(x) \vdots x + 1$

Получается $x^3 + 6x^2 + 10x + 8$

$Q(x) \vdots x + 4$

Получается $x^2 + 2x + 2$

$x_1 = -1 \quad x_2 = -4$

Ответ: $x_1 = -1,\ x_2 = -4$.

14) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0| :x^2$

$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (5x + \frac{5}{x}) + 8 = 0$

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 8 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 * x * \frac{1}{x} - 2 * x * \frac{1}{x}$

$(x + \frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2$

$t^2 - 2 - 5t + 8 = 0$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$t = 2 \quad t = 3$

$x + \frac{1}{x} = 2| *x \qquad x + \frac{1}{x} = 3|*x$

$x^2 + 1 = 2x$ $\quad$ $x^2 + 1 = 3x$

$x^2 – 2x + 1 = 0$ $\quad$ $x^2 + 1 = 3x$

$(x - 1)^2 = 0$ $\quad$ $x^2 – 3x + 1 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $D = 9 – 4 = 5$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x = 1$,

$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

15) $x^3+2x^2-5x+2=0$

$p(x)=x^3 +2x^2 -5x+2$

$p(l) = l + 2 – 5 + 2$

$p(x)=(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)(x+1)-5(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+2x+2-5)=(x-1)(x^2+3x-2)$

$(x-1)(x^2 +3x-2)=0$

$x-1=0$

$x^2 +3x-2=0$

$x_1=l$, $x_2=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $1; \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

16) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0| :x^2$

$x^2 – 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 (x + \frac{1}{x}) + 8 = 0$

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = y$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$y_1 = 2$ $\quad$ $y_2 = 3$

$x + \frac{1}{x} = 2$ $\quad$ $x + \frac{1}{x} = 3$

$x_1=1,\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

17) $x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0.$

$(\lambda = -2)$

$x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2(-2) + 3x(-2)^3 + (-2)^5 = 0$

$x = 2$

$(x^5 - 32) + 3x(x^3 - 8) - x^2(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) +3x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x - 2) = 0$

$x - 2 = 0 \quad x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + 3x(x^2 + 2x + 4) - x^2 = 0$

$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x +16 = 0$

$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5 \bullet x \bullet 4 + 4^2 = 0| :x^2$

$(x^2 + \frac{4^2}{x^2}) + 5(x + \frac{4}{x}) + 9 = 0$

$x + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{x}} = y$

$y^2 - 8 + 5y + +9 = 0$

$y_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \quad y_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$

$x + \frac{4}{x} = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \quad x + \frac{4}{x} = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$

x_1 = *нет корней*, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}+\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4},\ x_3 = \frac{-5-\sqrt{21}-\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$.

18) $x^3- 3x = a^3+ \frac{1}{a^3}$,где a – отличное от нуля число.

$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 – 3a^2 * \frac{1}{a} - 3a * \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 – 3(a + \frac{1}{a})$

$x_1 = a + \frac{1}{a}$

$x^3 - 3x - a^3 - \frac{1}{a^3} : x - a - \frac{1}{a} = x_3 - 3x - (a_{3} + \frac{1}{a^3}) = (x^2 – a - \frac{1}{a})[x_2 + x(a + \frac{1}{a}) +$

$+(a- \frac{1}{a})^3 - 3]$

$x^2 + x(a + \frac{1}{a}) + (a + \frac{1}{a})^2 - 3 = 0$

$D = (a + \frac{1}{a})^2 - 4[(a + \frac{1}{a})^2 – 3] = 3[4 – (a + \frac{1}{a})^2] = -3(a - \frac{1}{a})^2$

а) $D > 0$ *быть не может.*

б) $D = 0$ *лишь при* $a = 1$ *и при* $a = -1$

$x = -1$ $x = 1$ $x = a + \frac{1}{a}$

Ответ: *при* $a = 1$ *два корня* $x_1 = 2$, $x_2 = -1$;

при $a = -1$ *два корня* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;

при $a^2 \neq 1$ *и* $a \neq 0$ *один корень* $x_l = a + \frac{1}{a}$.

19) $x(x^2 - a) = m(x^2 + 2mx + a)$, *где* a *и* m — *данные числа*

$x = -m$

$(x + m)(x^2 - 2mx - a) = 0$

$x + m = 0$ *и* $x^2 - 2mx - a = 0$

$x_1 = -m$

а) *если* $m^2 + a > 0$, *то будет два корня;*

б) *если* $m^2 + a = 0$, *то будет один корень;*

в) *если* $m^2 + a < 0$, *то корней нет.*

Ответ: *при* $m^2 + a < 0$ $x_x = -m$;

при $m^2 + a = 0$ $x_1 = -m$, $x_2 = m$;

при $m^2 + a > 0$ $x_1 = -m$, $x_2 = m - \sqrt{m^2 + a}$, $x_3 = m + \sqrt{m^2 + a}$.

20) $x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+(x+4)(x+5)+(x+5)(x+$
$+6)+(x+6)(x+7)+(x+7)(x+8)+(x+8)(x+9)+(x+9)(x+10)= -1*2+2*3+$
$+3*4+4*5+5*6+6*7+7*8+8*9+9*10$.

$x_1 = 0$ $x_2 = -10$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -10$.