Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

методические аспекты изучения математики и физики

Различные способы решения квадратных уравнений

Новикова Дарья Дмитриевна,

9 кл., МБОУ «Лицей № 1» г. Лысьва

Шуклина Л.Л., учитель математики

Пермь. 2017

Введение

В школьной программе восьмого класса присутствует важная тема - квадратные уравнения и способы их решения. На уроках нам демонстрируют обязательные для курса восьмого класса способы решения данных уравнений, однако этих способов существует гораздо больше. Одни из них помогут нам решать квадратные уравнения быстрее, другие, например, покажутся проще для понимания и освоения, но также их можно использовать для проверки нашего предыдущего, уже получившегося ответа. Также многообразие способов гарантируют нам улучшение вычислительного навыка, а также поможет нам анализировать квадратное уравнение и находить более рациональный способ его решения.

Актуальность: Все мы прекрасно осознаем, что на последней ступени получения среднего образования каждый из нас должен будет сдавать ОГЭ (обязательный государственный экзамен) , и, наверняка, каждый из нас хочет и стремиться сдать его отлично, ну или хотя бы хорошо. Математика является обязательным для сдачи предметом, а в ней присутствует задание на решение квадратных уравнений. Дополнительные способы, которых нет в школьной программе, безусловно, помогут нам с их решением. Поэтому данная тема является более актуальной для учащихся.

Проблема : Из - за отсутствия в школьных учебниках других способов решения квадратных уравнений мы, порой, тратим гораздо больше времени и усилий при нахождении корней квадратных уравнений. По этой причине дополнительные способы решения квадратных уравнений будут способствовать более успешному решению уравнения.

Гипотеза: при изучении различных способов решения квадратного уравнения смогу ли я найти такие, которые помогут не прибегать к традиционному решению по формулам, а найти корни рациональнее и быстрее.

Цель : овладеть дополнительными способами решения квадратных уравнений и научить других применять их на практике

Задачи :

1) Найти информацию о способах решения квадратных уравнений.

2) Разобрать и изучить каждый из этих способов.

3) Применить каждый способ на практике.

План работы :

1) Определение квадратного уравнения и виды квадратных уравнений.

2) Повторение уже изученных в курсе восьмого класса способов решения :

1. неполных квадратных уравнений

2. полных квадратных уравнений

3) Изучение и анализ новых способов решения квадратных уравнений

4) Применение новых способов на практике

1. Определение квадратного уравнения и виды квадратных уравнений

Квадратное уравнение – это уравнение вида $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем a отлично от нуля.

Числа a, b и c называют **коэффициентами квадратного уравнения** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, причем коэффициент a называют первым, или старшим, или коэффициентом при x^2, b – вторым коэффициентом, или коэффициентом при x, а c – свободным членом.

Квадратные уравнения				
Полные		Неполные		
Приведённые	Не приведённые	$c = 0$ $ax^2 + bx = 0$	$b = 0$ $ax^2 + c = 0$	$b = 0$ $c = 0$ $ax^2 = 0$

a = 1 $x^2 - 2x - 3 = 0$	a не равно 1 $-2x^2 + 5x - 4 = 0$	$4x^2 - 9x = 0$ $x(4x - 9) = 0$ $x = 0$ $4x - 9 = 0$ $x = 0$ $x = 9 : 4$ Ответ : 0; 0,25	$4x^2 - 9 = 0$ $4x^2 = 9]: 4$ $x^2 = 9 : 4$ $x = - 3 : 2$ $x = 3 : 2$	$x = 0$ $4x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$

2. **Повторение уже изученных в курсе восьмого класса способов решения :**

1. Решение неполных квадратных уравнений :

1) *вынесение общего множителя за скобки*

$6x^2 - x = 0$

$x(6x - 1)$

$x = 0$ или $6x - 1 = 0$

$x = 0$ или $6x = 1$

$x = 0$ или $x = \frac{1}{6}$

Ответ : 0; $\frac{1}{6}$

2) *перенесение свободного члена в правую часть*

$2x^2 - 288 = 0$

$2x^2 = 288$

$x^2 = 288 : 2$

$x^2 = 144$

$x = - 12$

$x = 12$

Ответ : -12; 12

2. Решение полных квадратных уравнений :

1) *применение 1 формулы корней квадратного уравнения;*

2) *применение 2 формулы корней квадратного уравнения;*

3) *применение теоремы Виета;*

4) *применение свойства суммы коэффициентов квадратного уравнения;*

5) *разложение левой части уравнения на множители;*

6) *метод выделения полного квадрата;*

7) *решение уравнений способом "переброски".*

Рассмотрим решение уравнений на примерах.

1) Применение 1 формулы корней квадратного уравнения.

Решим уравнение $-2x^2-5x+3=0$ с помощью первой формулы дискриминанта квадратного уравнения:

$D=b^2-4ac=(-5)^2-4*(-2)*3=25-(-24)=25+24=49$

Если $D>0$, то уравнение имеет 2 корня (они находятся по формуле $x_{1,2}=(-b+-\sqrt{D})/2a$),

если $D=0$, то уравнение имеет один корень ($x = \frac{b}{2a}$),

если $D<0$, то уравнение не имеет корней.

В нашем случае дискриминант больше нуля, значит, уравнение имеет два корня.

Теперь подставляем значения коэффициентов в формулу нахождения двух корней квадратного уравнения и получаем:

$x_1=5-\sqrt{49}/2*(-2)=5-7/-4=-2/-4=1/2=0,5$

$x_2=5+\sqrt{49}/2*(-2)=5+7/-4=12/-4=-3$

Итак, получаем корни квадратного уравнения 0,5;-3

Уравнение решено.

2) **Применение 2 формулы корней квадратного уравнения.**

Помимо формулы, приведенной выше, существует еще одна формула корней квадратного уравнения. Она применяется для четного коэффициента.

Выглядит она так: $\frac{D}{4}=(\frac{b}{2})^2-ac$. И так же, как и в первой формуле при D/4>0 - 2 корня($x_{1,2}$=(-b/2+-√D/4)/a),

при D/4=0 - 1 корень (x=-b/2/a)

при D/4<0 - уравнение не имеет корней.

Решим с помощью этого способа то же уравнение $-2x^2-5x+3=0$. Для начала определим значение D/4:

$D/4=((-5)/2)^2-(-2)*3=6,25+6=12,25>0$ - это значит, что уравнение имеет два корня:

x_1=2,5-√12,25/(-2)=2,5-3,5/(-2)=-1/(-2)=1/2=0,5

x_2=2,5+√12,25/(-2)=2,5+3,5/(-2)=6/(-2)=-3

В итоге получаем те же самые корни, что и в первом случае 0,5;-3

Уравнение решено.

3) **Применение теоремы Виета.**

Следующий способ, теорема Виета, поможет нам решить лишь приведённое квадратное уравнение (a=1).

Решим уравнение $-x^2-5x+6=0$.

Теорема Виета гласит, что сумма корней квадратного уравнения ($x_{1+}x$) равна -b, а их произведение (x_1*x_2) равно c. Однако невозможно сразу же подставить значения коэффициентов в формулу, так как наше уравнение не является приведённым. Чтобы сделать данное квадратное уравнение приведенным нужно сделать так, чтобы a=1, а именно разделить левую часть уравнения на -1. Получаем приведённое квадратное уравнение $x^2+5x-6=0$. Теперь мы можем подставить в формулы значения коэффициентов:

$x_1+x_2=-5$

$x_1*x_2=-6$

Отсюда находим значения корней квадратного уравнения методом подбора и получаем:

$x_1=-6$

$x_2=1$

Уравнение решено.

4) **Применение свойства суммы коэффициентов квадратного уравнения.**

В этом способе применяется свойство суммы коэффициентов квадратного уравнения:

если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю, то первый корень $x_1 = 1$, а второй равен отношению коэффициента с к коэффициенту а, то есть $x_2 = \frac{c}{a}$.

Решим этим способом предыдущее уравнение $-x^2-5x+6=0$. Так как сумма коэффициентов данного уравнения равна нулю ($-1+(-5)+6=0$), то первый корень $x_1 = 1$, а второй найдем по формуле:

$x_2=c/a=6/(-5)=-1,2$

Итак, мы нашли корни уравнения -1,2;1

Уравнение решено.

5) **Разложение левой части уравнения на множители.**

В данном варианте решения квадратных уравнений собрано сразу же несколько способов: вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращённого умножения, а также способ группировки.

Решим уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Разложим левую часть на множители:

$$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x + 2)(x - 4).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 2)(x - 4)=0.$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = -2$, а также при $x = 4$.

Это означает, что число -2 и 4 являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Итак, мы нашли корни уравнения -2 и 4.

Уравнение решено.

6) Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 – 2x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1.$$

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 1. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 1^2, так как

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$.

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$x^2 - 2x - 8 = 0$,

прибавляя к ней и вычитая 1^2. Имеем:

$x^2 - 2x - 8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8 = (x - 1)^2 - 1 - 8 = (x – 1)^2 - 9$.

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x - 1)^2 - 9=0$, $(x - 1)^2 = 9$.

Следовательно, $x - 1 = 3$, $x_1 = 4$, *или* $x - 1 = -3$, $x_2 = -2$.

Итак, мы нашли корни уравнения -2 и 4.

Уравнение решено.

7) Решение уравнений способом "переброски".

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.
Умножая обе его части на а, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.
Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильно данному.
Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.
Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.
Решим уравнение $2x^2 – 11x + 15 = 0$.
Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим

$$y^2 – 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета
$y_1 = 5$ $x_1 = 5/2$ $x_1 = 2,5$ $y_2 = 6$
$x_2 = 6/2$ $x_2 = 3$.
Итак, мы нашли корни уравнения $2,5; 3$.
Уравнение решено.

Заключение.

Квадратные уравнения находят широкое применение при решении задач по алгебре, геометрии, физике.

Хочется отметить и то, что излагаемая тема в этой работе еще мало изучена вообще, просто ею не занимаются, поэтому она таит в себе много скрытого и неизвестного, что дает прекрасную возможность для дальнейшей работы над ней.

Проводя исследования по данной теме, я получила следующие **выводы**:

1. Квадратные уравнения умели решать ещё более трех тысяч лет назад. Способы решения были сложными. Общее правило решения уравнений вида: $ax^2 + bx = c$, где $a > 0$, b и c – любые числа, которыми мы пользуемся, и сейчас сформулировал индийский ученый Брахмагупта (VII в. н. э.).
2. Квадратные уравнения играют огромную роль в развитии математики. Изученные методы решения квадратных уравнений просты в применении, они, безусловно, должно заинтересовать увлекающихся математикой учеников.
3. Изучая дополнительную литературу, я узнала, что можно решить квадратное уравнение еще геометрическим способом.
4. Способов решения квадратных уравнений очень много. Я нашла 12 способов решения квадратных уравнений, но в работе рассмотрела только 8. Изучив их, от всеми известного с помощью вычисления дискриминанта и корней по формулам до очень интересного с помощью «переброски», я пришла к выводу, что, приступая к решению любого квадратного уравнения, не следует спешить прибегать к традиционному способу решения. Используя теорему Виета и свойства коэффициентов,

можно гораздо быстрее найти корни уравнения и не тратить лишнее время.

Я очень рада, что изучила их и буду использовать. Гипотеза, поставленная в начале работы, подтвердилась.

Со всеми мною изученными способами я поделилась с восьмиклассниками. После этого я провела опрос среди них. В нём я задала им три вопроса:

1) Какой (ие) из способов показался (лись) вам интересным (ми)? (результаты см. в приложении 1).

2) Какой (ие) из способов вы бы применяли на практике? (результаты см. в приложении 2).

3) Какой (ие) из способов вы бы никогда не применили на практике? (результаты см. в приложении 3).

В результате опроса были получены следующие результаты. (результаты см. в приложении 1).

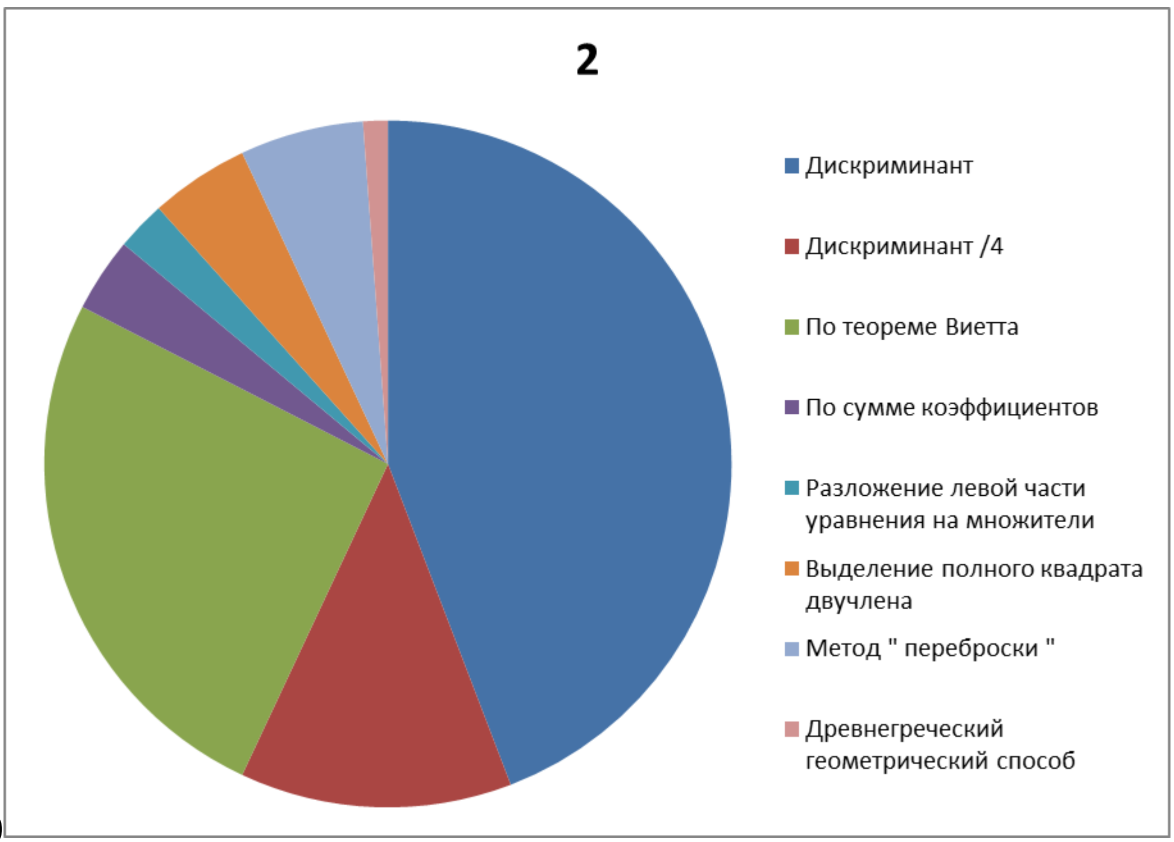
На этом моя работа не закончится, я продолжу искать другие способы решения квадратных уравнений. А далее меня ждут еще уравнения с модулем и уравнения с параметрами. Я думаю, погружаясь в различные способы решения этих уравнений, я найду для себя тоже много нового и познавательного. Но это уже темы других работ.

Список литературы:

1. http://www.cleverstudents.ru/equations/quadratic_equations.html(определение кв. ур.).
2. https://infourok.ru/prezentaciya-po-matematiki-na-temu-sposobov-resheniya-kvadratnih-uravneniy-769175.html
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988.
4. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. «Просвещение» 1990 .
5. М., Математика (приложение к газете «Первое сентября»), №№ 21/1996, 10/1997, 24/1997, 40/2000.
6. Иванов А.П., Кондаков В.М. Математика: пособие для учащихся и лицеев и слушателей подготовительных курсов. Издательство Пермского университета, Пермь, 1993

Приложения:


1
Дискриминант
Дискриминант / 4
По теореме Виетта
По сумме коэффициентов
Разложение левой части уравнения на множители
Выделение полного квадрата двучлена
Метод " переброски "
Древнегреческий геометрический способ
1)


2
Дискриминант
Дискриминант /4
По теореме Виетта
По сумме коэффициентов
Разложение левой части уравнения на множители
Выделение полного квадрата двучлена
Метод " переброски "
Древнегреческий геометрический способ
2)

3) 
3
Дискриминант
Дискриминант / 4
По теореме Виетта
По сумме коэффициентов
Разложение левой части уравнения на множители
Выделение полного квадрата двучлена
Метод " переброски "
Древнегреческий геометрический способ