Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

Методические аспекты изучения математики и физики

Различные способы решения квадратных уравнений

Овсянников Даниил Сергеевич,

9 кл., МАОУ «Лицей №1» г. Кунгур

Горбунова Надежда Сергеевна,

учитель математики высшей категории

Пермь 2017

Содержание.

1.Введение.

Мы живем в эпоху технического прогресса, который развивается семимильными шагами и практически любая работа требует от человека математических знаний. Цифры окружают нас повсюду, мы многократно сталкиваемся с ними каждый день, каждый час, практически каждую минуту, решая множество жизненных задач.

Математические известны с древних времен, в основном они были связаны с ведением хозяйства. Знания передавались из поколения в поколение и являлись средством обучения математике.

Так и в наше время – изучение математики немыслимо без решения и разбора уравнений. Решение уравнений – упражнения, развивающие мышление, они способствуют воспитанию терпения, настойчивости, воли, пробуждают интерес к процессу поиска решения.

Умение решать уравнения является одним из важных показателей уровня развития ученика, поэтому любая контрольная работа или экзамен обязательно содержит уравнения. Известный педагог – математик Д.Пойа (Рис.1)(Приложение №1) советовал: - «Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их».

(Рис.1)

Тема данной работы – «Различные способы решения квадратных уравнений», эти классические уравнения известны с древних времен. И по сей день уравнения актуальны и широко используются на итоговых аттестациях учащихся и олимпиадах по математике. Поэтому, умение решать уравнения такого типа имеет важное значение для учащихся.

Целью работы является: поиск различных способов решения уравнений в общедоступных источниках информации, их классификация, решение этих уравнений разными способами и методами.

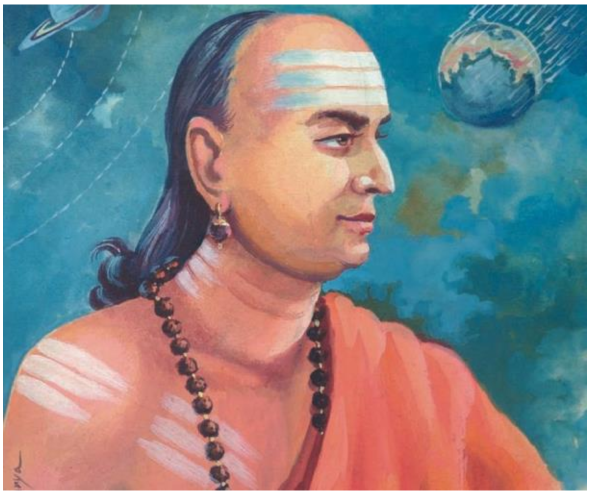
2.1.Исторические сведения о квадратных уравнениях

Уже во втором тысячелетии до нашей эры вавилоняне знали, как решать квадратные уравнения. Решение их в Древнем Вавилоне (Рис.2)(Приложение №2) было тесно связано с практическими задачами, в основном такими, как измерение площади земельных участков, земельные работы, связанные с военными нуждами; наличие этих познаний также обусловлено развитием математики и астрономии вообще. Были известны способы решения как полных, так и неполных квадратных уравнений.

(Рис.2)

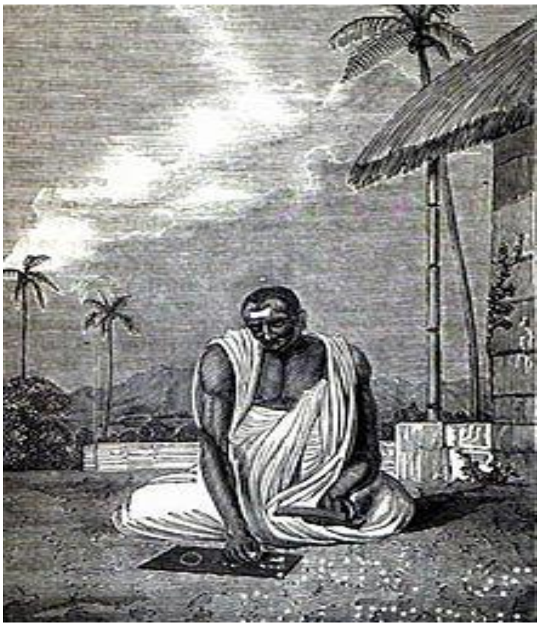
Правила решения квадратных уравнений во многом аналогичны современным, однако в вавилонских текстах не зафиксированы рассуждения, путём которых эти правила были получены.

Задачи, решаемые с помощью квадратных уравнений, встречаются в трактате по астрономии «Ариабхаттиам», написанным индийским астрономом и математиком Ариабхатой (Рис.3)(Приложение №3) в 499 году нашей эры.



(Рис.3)

Один из первых известных выводов формулы корней квадратного уравнения принадлежит индийскому учёному Брахмагупте (около 598 г.)(Рис.4)(Приложение №4); Брахмагупта изложил универсальное правило решения квадратного уравнения, приведённого к каноническому виду: $ax^2+bx=c$; притом предполагалось, что в нём все коэффициенты, кроме a могут быть отрицательными. Сформулированное учёным правило по своему существу совпадает с современным.



(Рис.4)

Некоторые виды квадратных уравнений, сводя их решение к геометрическим построениям, могли решать древнегреческие математики. Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский (III в.)(Рис.5)(Приложение №5);. В его книгах «Арифметика» нет систематического изложения алгебры, однако в них содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений различных степеней. При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные

(Рис.5)

Хорезмский математик Аль-Хорезми (Рис.6)(Приложение №6) в своем алгебраическом трактате дает классификацию линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом: ax 2 + c = bx, ax 2 = c, ax = c, ax 2 + c = bx, ax 2 + bx = c, bx + c = ax 2 . Аль-Хорезми избегает употреблений отрицательных чисел, поэтому члены каждого их этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений

(Рис.6)

2.2.Метод выделения полного квадрата

В данном методе будут активно использоваться следующие формулы сокращенного умножения:

(a+b) 2 = a 2 +2*a*b +b 2 ;

(a-b) 2= a 2 -2*a*b +b 2 ;

Рассмотрим данный метод при решении уравнения: 4x 2+7x+3=0
Преобразуем левую часть:

$$2x^2 + \frac{2 * 2\text{x} * 7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3$$

Где $(2\text{x})^2 + \frac{2*2\text{x}*7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$ формула $(2\text{x} + \frac{7}{4})^2$

Тогда получается следующее :

$$\left(2x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + 3 = \left(2x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = \left(2x + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(2x + \frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(2x + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(2x + \frac{6}{4}\right)\left(2x + \frac{8}{4}\right) = \left(2x + \frac{3}{2}\right)(2x + 2)$$

Теперь вернёмся к уравнению: $\left(2x + \frac{3}{2}\right)(2x + 2) = 0$

Значит $\left(2x + \frac{3}{2}\right) = 0$ или $(2x + 2) = 0$

$x = -\frac{3}{4}$ или $x = -1$

Ответ: x = - 1, x = - $\frac{3}{4}$

2.3.Алгоритм устного решения квадратных уравнений.

Приведенные квадратные уравнения.

Наиболее распространенно устное решение приведенных квадратных уравнений, но и они у многих учеников вызывает затруднение из – за отсутствия жесткого алгоритма действий, особенно в случаях, когда корни имеют разные знаки.

Приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x2 + px + q = 0$

его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$x1 \cdot x2 = q$,

$x1 + x2= - p$

Отсюда можно сделать следующий вывод:

Если в уравнении последним знаком является «минус», то корни имеют разные знаки, причем знак меньше корня совпадает со знаком второго коэффициента в уравнении (в дальнейшем будет называть его вторым знаком уравнения, а числа з и q будут называться коэффициентами).

Зная, что при сложении чисел с разными знаками их модули, вычитаются затем: для нахождения корней приведенного уравнения необходимо выполнить следующие действия:

найти такие множители числа q, чтобы их разность была равна числу p;

поставить пред меньшим из найденных чисел второй знак уравнения, другой корень будет иметь противоположный знак.

Например . Решите уравнение

$x2 – 2x – 15 = 0$

Решение. Из всех множителей числа 15 (1 и 15, 3 и 5) выбираем те, разность которых равны 2. Это числа 3 и 5. Перед меньшим числом ставим второй знак уравнения, т. е. «минус. Таким образом, x1 = - 3, x2 = 5 – корни уравнения.

Такой алгоритм помогает очень быстро решать уравнения тем учащимся, у которых имеются проблемы с подобным знаком в теореме Виета.

Рассмотрим еще несколько примеров с поэтапной записи рассуждений.

Например. Решите уравнение.

Умножим первое уравнение системы на a^2, а второе уравнение – на a; в результате получим :

(ax1) · (ax2) = ac,

(ax1) + (ax2) = - b

Если предложить ax1 = m, ax2 = n, то получим корни о которых говорится в формулировке алгоритма устного решения полного квадратного уравнения.

2.4.Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители

Если трёхчлен вида $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$

удастся каким-либо образом представить в качестве произведения линейных множителей $(kx + m)(lx + n) = 0$, то можно найти корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — ими будут - $\frac{m}{k}$ и - $\frac{m}{l}$, действительно, ведь $(kx + m)(lx + n) = 0 \Longleftrightarrow kx + m = 0 \cup lx + n = 0$, а решив указанные линейные уравнения, получим вышеописанное. Отметим, что квадратный трёхчлен не всегда раскладывается на линейные множители с действительными коэффициентами: это возможно, если соответствующее ему уравнение имеет действительные корни.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Использование формулы квадрата суммы (разности)

Если квадратный трёхчлен имеет вид $(ax)^2 + 2abx + b^2$, то применив к нему названную формулу, мы сможем разложить его на линейные множители и, значит, найти корни:

$$(ax)^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2;$$
$$(ax + b)^2 = 0;$$
$$x = -\frac{b}{a}.$$

б) Выделение полного квадрата суммы (разности)

Также названную формулу применяют, пользуясь методом, получившим названия «выделение полного квадрата суммы (разности)». Применительно к приведённому квадратному уравнению с введёнными ранее обозначениями, это означает следующее:
прибавляют и отнимают одно и то же число

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0;$$

применяют формулу к полученному выражению, переносят вычитаемое и свободный член в правую часть

$$(x^2 + 2\frac{p}{2}x + (\frac{p}{2})^2) + (-(\frac{p}{2})^2 + q) = 0;$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q;$$

извлекают из левой и правой частей уравнения квадратный корень и выражают переменную

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2.5.Решение квадратных уравнений по формуле

Согласно этому способу сначала находится величина, называемая дискриминантом:

$$D=b^2-4ac$$

После того, как дискриминант вычислен, возможны три варианта.

1) Если дискриминант D больше нуля, то уравнение имеет два разных корня - X_1 и X_2.

В этом случае корни вычисляются по формулам:

$$X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

2) Если дискриминант D равен нулю, уравнение имеет два равных корня X, которые вычисляются по формуле:

$$X=\frac{-b}{2a}$$

Уравнение с дискриминантом равным нулю, имеет два равных корня, но поскольку корни равны, то часто говорят и пишут, что корень один.

3) Если же дискриминант D меньше нуля, то уравнение не имеет вещественных корней.

Решение через дискриминант - универсальный способ. Им можно решить любое квадратное уравнение.

Решим уравнение $4x^2+7x+3=0$ данным способом:
$4x^2+7x+3=0$
a=4 b=7 c=3
$D=b^2 – 4ac$
$D=7^2 – 4×3×4=49 – 48=1$
D>0 следовательно, уравнение имеет два корня

$x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $\qquad$ $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

$x=-1;$ $\qquad$ $x=-\frac{3}{4}$

Ответ: $x=-1;\ x=-\frac{3}{4}$

2.6.Разложения левой части на множители

Рассмотрим данный способ при решении уравнения: $4x^2+7x+3=0$

Преобразуем левую часть:

$4x^2+7x+3= 4x^2+4x+3x+3= 4x(x+1)+3(x+1) =(x+1)(4x+3)$

Вернёмся к нашему уравнению:

$(x+1)(4x+3)=0$

Значит $x+1=0$ или $4x+3=0$

$x=-1$ $x=-\frac{3}{4}$

Ответ: $x=-1; x=-\frac{3}{4}$

2.7.Теорема Виета.

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна коэффициенту ***p*** со знаком «минус», а произведение корней равно свободному члену ***q***

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

В общем случае, то есть для не приведённого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = c/a.$$

Используя эту теорему Виета (Рис.7)(Приложение №7), можно решать некоторые квадратные уравнения устно.

(Рис.7)

2.8.Использование прямой и обратной теоремы Виета

Прямая теорема Виета и обратная ей теорема позволяют решать приведённые квадратные уравнения устно, не прибегая к достаточно громоздким вычислениям по формуле (1).

Согласно обратной теореме, всякая пара чисел (число) x_1 x_2, будучи решением нижеприведённой системы уравнений, являются корнями уравнения :

$x^2 + px + q = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q; \end{cases}$$

Подобрать устно числа, удовлетворяющие этим уравнениям, поможет прямая теорема. С её помощью можно определить знаки корней, не зная сами корни.

Для этого следует руководствоваться правилом:

1) если свободный член отрицателен, то корни имеют различный знак, и наибольший по модулю из корней — знак, противоположный знаку второго коэффициента уравнения;

2) если свободный член положителен, то оба корня обладают одинаковым знаком, и это — знак, противоположный знаку второго коэффициента.

2.9.Разложение квадратного трёхчлена на множители и теоремы, следующие из этого.

Если известны оба корня квадратного трёхчлена, его можно разложить по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (2)$$

Доказательство

Для доказательства этого утверждения воспользуемся теоремой Виета.

Согласно этой теореме, корни x_1 и x_2 квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

образуют соотношения с его коэффициентами:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Подставим эти соотношения в квадратный трёхчлен:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) =$$

$$= a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

В случае нулевого дискриминанта это соотношение становится одним из вариантов формулы квадрата суммы или разности.

Из формулы (2) имеются два важных следствия:

Следствие 1

Если квадратный трёхчлен раскладывается на линейные множители с вещественными коэффициентами, то он имеет корни, принадлежащие тому числовому множеству.

Доказательство :

Пусть $ax^2 + bx + c = (kx + m)(nx + l)$.

Тогда, переписав это разложение, получим:

$$(kx + m)(nx + l) = k(x + \frac{m}{k})n(x + \frac{l}{n}) = kn(x - (-\frac{m}{k}))(x - (-\frac{l}{n})).$$

Сопоставив полученное выражение с формулой (2), находим, что корнями такого трёхчлена являются $-\frac{m}{k}$ и $-\frac{l}{n}$. Так как коэффициенты вещественны, то и числа, противоположные их отношениям также являются элементами множества R .

Следствие 2

Если квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то он не раскладывается на линейные множители с вещественными коэффициентами.

Доказательство :

Действительно, если мы предположим противное (что такой трёхчлен раскладывается на линейные множители), то, согласно *следствию 1*, он имеет корни в множестве R , что противоречит условию, а потому наше предположение неверно, и такой трёхчлен не раскладывается на линейные множители.

2.10.Решение уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0,$ где $a \neq 0.$

Умножая обе его части на а, получаем уравнение
$a^2x^2 + abx + ac = 0.$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$,равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Рассмотрим данный способ при решении уравнения: $4x^2+7x+3=0$

$$4*4*x*x+7*4*x+3*4=0$$

Пусть $4x = y$, тогда $y^2 + 7y + 12 = 0$

По теореме Виета: $y_1 = -3$, $y_2 = -4$;

$4x = -3$,$4x = -4$, следовательно $x = -\frac{3}{4}$, x =-1

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$, x =-1

2.11.Применение свойств коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, а $\neq 0$.

1.Если *$a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.*

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а $\neq$ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Согласно теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

По условию $a + b + c = 0$, откуда $b = -a - c$. Значит,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-a-c}{a} = 1 + \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 = 1 \cdot \frac{c}{a} \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, ч.т.д.

Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Доказательство. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-a+b}{a} = -1 - \dfrac{c}{a} \\ x_1 x_2 = -1 \cdot \left(-\dfrac{a}{c}\right), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = \dfrac{c}{a}$, ч.т.д, [3, 29].

Пример: решить уравнение а) $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение:

т.к. $a + b + c = 0$ $(345 - 137 - 208 = 0)$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-208}{345}$.

Ответ: 1; $-\dfrac{208}{345}$.

б) $132x^2 + 247x + 115 = 0$

Решение:

т. к. $a - b + c = 0$ $(132 - 247 + 115 = 0)$, то

$= x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{115}{132}$

Ответ: - 1; $-\dfrac{115}{132}$

2. Если второй коэффициент b = 2k – четное число, то формулу корней

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, можно записать в виде $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Пример: решить уравнение $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение: имеем: $a = 3$, $b = -14$, $c = 16$, $k = -7$;

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$, $D>0$, два различных корня;

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2, x_2 = \frac{8}{3}.$$

Ответ: 2; $\dfrac{8}{3}$.

3.Приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, p и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

принимает вид: $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, или $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$. (3).

Формулу (3) особенно удобно использовать, когда p – четное число.

2.12.Корни приведённого квадратного уравнения.

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ в котором старший коэффициент ***a*** равен единице, называют *приведённым*. В этом случае формула для корней (1) упрощается до

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Мнемонические правила:

«Минус» напишем сначала,
Рядом с ним *p* пополам,
«Плюс-минус» знак радикала,
С детства знакомого нам.
Ну, а под корнем, приятель,
Сводится всё к пустяку:
p пополам и в квадрате
Минус прекрасное *q*.

p, со знаком взяв обратным,
На два мы его разделим,
И от корня аккуратно
Знаком «минус-плюс» отделим.
А под корнем очень кстати
Половина *p* в квадрате
Минус *q* — и вот решенья,
То есть корни уравненья.

2.13.Графический способ решения квадратного уравнения

Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$
перенести второй и третий члены в правую часть, то получим $x^2 = - px - q$.
Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$. График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.8).

Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках,
 абсциссы точек пересечения являются корнями квад- ратного уравнения;

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

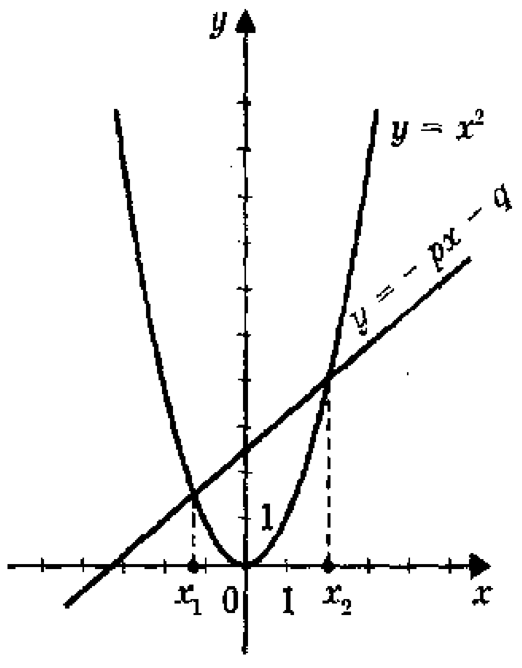


Рис.8

1) Решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 9).

Решение: запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$.
Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$. Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M (0; 4)$ и $N (3; 13)$. Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = - 1$ и $x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = - 1$; $x_2 = 4$.

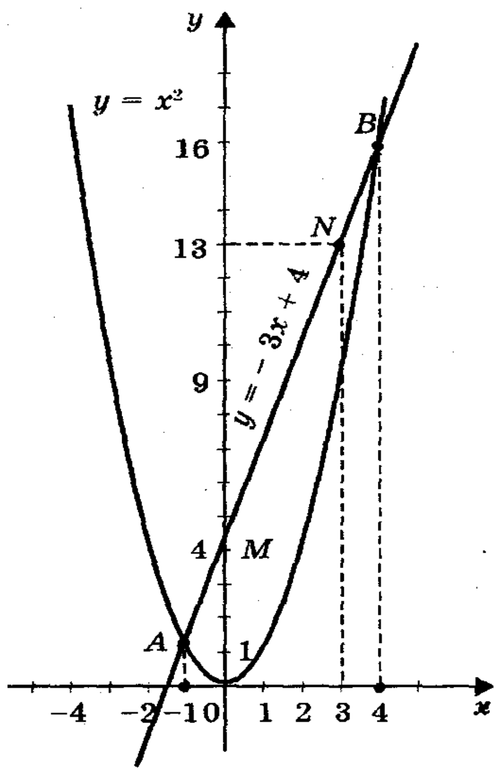


Рис.9

2) Решим графически уравнение (рис. 10) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение: запишем уравнение в виде $x^2 = 2x - 1$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x - 1$.
Прямую $y = 2x - 1$ построим по двум точкам $M\ (0;\ -1)$ и $N(1/2;\ 0)$. Прямая и парабола пересекаются в точке A с абсциссой $x = 1$.

Ответ: x = 1.

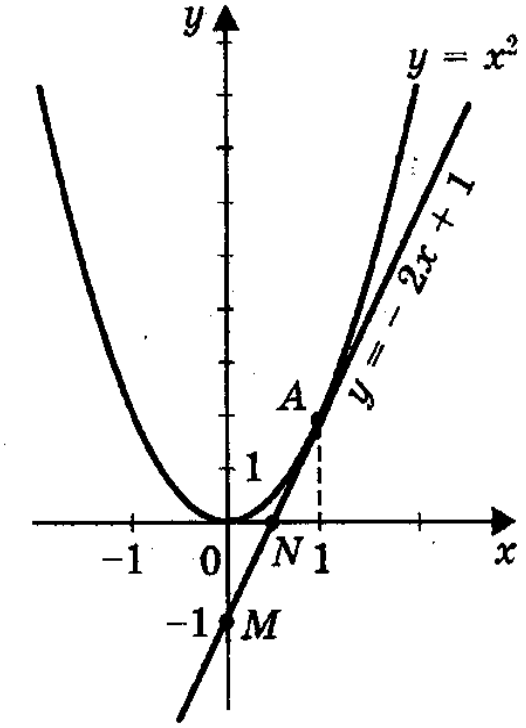


Рис.10

3) Решим графически уравнение x^2 - $2x + 5 = 0$ (рис. 11).

Решение: запишем уравнение в виде $x^2 = 5x$ - 5. Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x$ - 5. Прямую $y = 2x$ - 5 построим по двум точкам M(0; - 5) и N(2,5; 0). Прямая и парабола не имеют точек пересечения, т.е. данное уравнение корней не имеет.

Ответ: уравнение x^2 - $2x + 5 = 0$ корней не имеет.

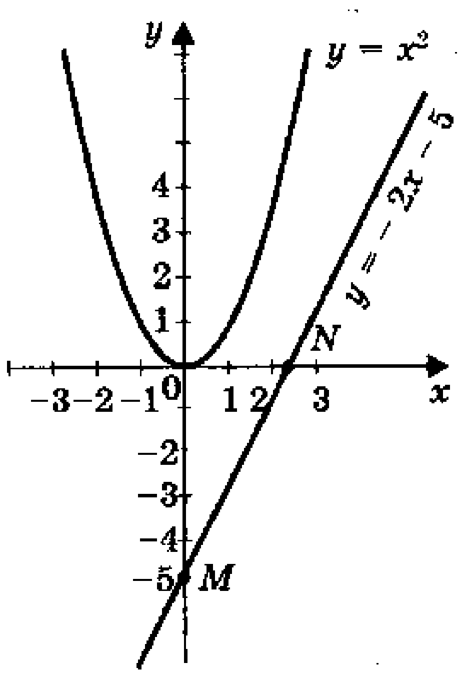


Рис.11

2.14.Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений.

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$.

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

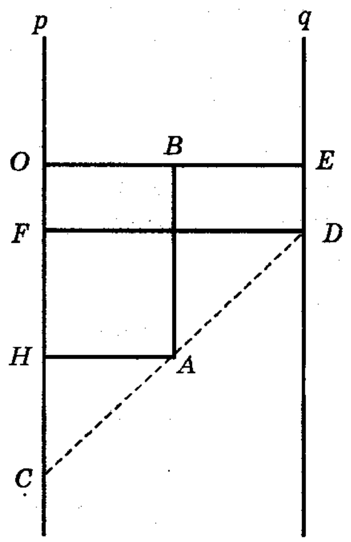


Рис.12

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.12):

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

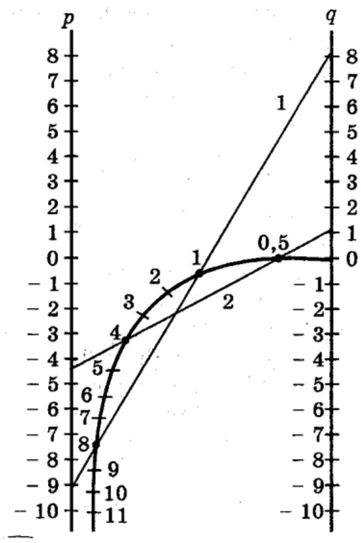
Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAHи CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$,причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма (Рис.13) дает корни $z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$



(Рис.13)

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение $z^2 - 4{,}5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5.$

3) Для уравнения $z^2 - 25z + 66 = 0$

коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение $t^2 - 5t + 2{,}64 = 0,$ которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 4{,}4,$ откуда

$z_1 = 5t_1 = 3{,}0$ и $z_2 = 5t_2 = 22{,}0$

2.15.Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведем ставший знаменитым пример из «Алгебры» Аль – Хорезми (Приложение №6)

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39».

Решение: рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$,

следовательно, площадь каждого равна $2\frac{1}{2}x$.

Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата *ABCD*, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2\frac{1}{2}$,

а площадь $6\frac{1}{4}$.

D *x* *C*

$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.
$2\frac{1}{2}x$	x^2	$2\frac{1}{2}x$
$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.

A x *B*

Площадь *S* квадрата *ABCD* можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников

($4 \cdot 2\frac{1}{2}x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов($6\frac{1}{4}\cdot 4 = 25$), т.е.

$S = x^2 + 10x = 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата *ABCD*, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

Ответ: x=3.

3.Заключение.

Изучая дополнительную литературу, я узнал, что можно решить квадратное уравнение еще и с помощью линейки, графическим и геометрическим способом. Значение квадратных уравнений заключается не только в изяществе и краткости решения задач, хотя и это весьма существенно.
Я изучил различные способы решения квадратных уравнений: от всеми известного с помощью вычисления дискриминанта и корней по формулам до очень интересного с помощью номограммы. Я пришёл к выводу, что приступая к решению любого квадратного уравнения, не следует спешить прибегать к традиционному способу решения. Используя теорему Виета и свойства коэффициентов, можно гораздо быстрее найти корни уравнения и не тратить лишнее время. Я очень рад, что их изучил и буду использовать.

Подводя итоги можно сказать, что каждый из изученных способов имеет как положительные стороны, так и недостатки. Но выполненная работа показывает, что использование различных способов при решении квадратных уравнений является важным звеном в изучении математики, развивает сообразительность и внимание. Так же не менее важно правильно выбирать рациональный способ решения конкретно для каждого уравнения.

На этом моя работа не закончится, я продолжу искать другие способы решения квадратных уравнений. А далее меня ждут еще уравнения с модулем и уравнения с параметрами. Я думаю, погружаясь в различные способы решения этих уравнений, я найду для себя тоже много нового и познавательного. Но это уже темы других работ.

Приложение № 1

Дьёрдь По́йа — Джордж По́лиа; 13 декабря 1887, Будапешт, Австро-Венгрия (ныне Венгрия) — 7 сентября 1985, Пало-Алто, Калифорния, США) — венгерский, швейцарский и американский математик, популяризатор науки. Основные труды — по теории чисел, функциональному анализу, математической статистике (распределение Пойа) и комбинаторике (теорема Редфилда — Пойа). Окончил Будапештский университет (1912), в 1914—1940 годах работал в Высшей технической школе в Цюрихе (с 1928 года — профессор). В 1940 году вместе со своей супругой переехал в США и устроился на работу в Стэнфордский университет, где и прошла вся его дальнейшая научная карьера.

Живя в США, Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки. Он написал несколько книг о том, как решают задачи и как надо учить решать задачи.

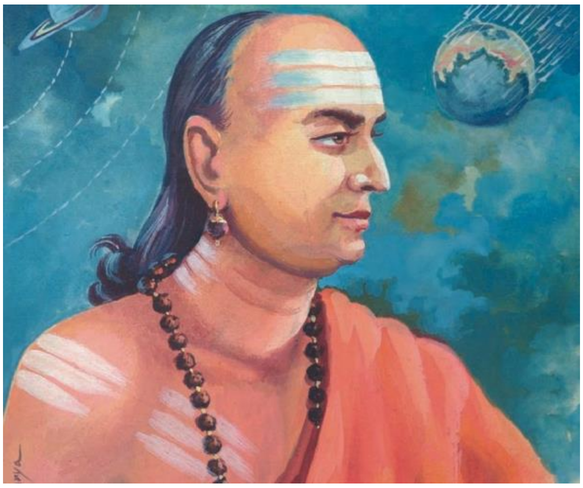
Пойа об аналогии: «Возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны… без аналогии».

Приложение № 2

Вавило́н — один из городов Древней Месопотамии, располагавшийся в исторической области Аккад. Важный политический, экономический и культурный центр Древнего мира, один из крупнейших городов в истории человечества, «первый мегаполис», известный символ христианской эсхатологии и современной культуры. Руины Вавилона расположены у окраины современного города Эль-Хилла (мухафаза Бабиль, Ирак).

Основан не позднее III тысячелетия до н. э.; в шумерских источниках известен под именем **Кадингирра**. В раннединастический период — незначительный город, центр небольшой области или нома в рамках системы шумерских городов-государств. В XXIV—XXI вв. до н. э. — провинциальный центр в составе Аккадского царства и Державы III династии Ура. В II—I тыс. до н. э. — столица Вавилонского царства, одной из великих держав древности и важнейший город одноимённой области (Вавилонии). Наивысший подъём экономической и культурной жизни Вавилона в литературной традиции связывается с эпохой правления Навуходоносора II (VI век до н. э.).В 539 году до н. э. занят войсками Кира II и вошёл в состав державы Ахеменидов, став одной из её столиц; во второй половине IV в. до н. э. — столица державы Александра Македонского, впоследствии — в составе государства Селевкидов, Парфии, Рима; начиная с III в. до н. э. постепенно пришёл в упадок.

Приложение №3

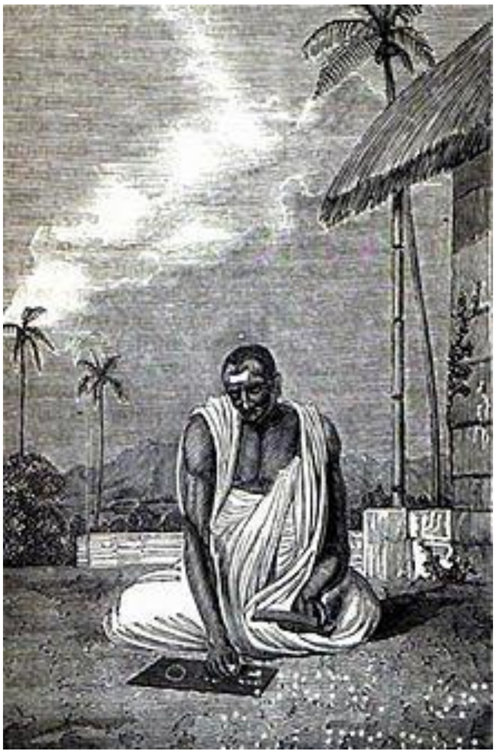


Ариабха́та — индийский астроном и математик. Его деятельность открывает «золотой век» индийской математики и астрономии. Долгое время его путали с учёным того же имени, жившим на четыре века позднее; сейчас последнего называют Ариабхата II. Достоверных сведений об Ариабхате практически не сохранилось. Надёжно установленным можно считать только год рождения учёного, поскольку на него довольно ясно указал сам Ариабхата в десятой строфе своего трактата «Ариабхатия»: «Когда шестьдесят раз по шестьдесят лет текущей юги истекло [499 г. н. э.], минуло двадцать три года с моего рождения».

Наиболее вероятно, Ариабхата происходил из северо-западной Индии, из царства Ашмака, располагавшегося на границе современных индийских штатов Гуджарат и Махараштра. Для продолжения образования он переехал в царство Магадха, в столице которой находился крупнейший «университет» того времени — буддистский монастырь Наланда. Здесь он провёл долгие годы, написал свои основные труды, и не исключено, что некоторое время возглавлял учебную часть монастыря. Из сочинений, написанных Ариабхатой, известны названия двух — «Ариабхатия» (499) и «Ариабхата-сиддханта», но сохранился текст лишь одного — «Ариабхатии». Оно состоит из четырёх частей, изложенных в стихотворной форме в 123 *шлоках* (стихах): *дашагитика* (система чисел, астрономические константы и таблица синусов), *ганитапада* (математика), *калакрийа* (календарь, расчёты соединений планет и обращений по эпициклам), *голапада* (основы сферической астрономии и расчёты затмений).

В первой части трактата воспроизводится таблица разностей синусов через 3°45′ = 225′, приведённая ранее в «Сурье-сиддханте».

Приложение № 4



Брахмагупта, **Брамагупта** — индийский математик и астроном. Руководил обсерваторией в Удджайне. Оказал существенное влияние на развитие астрономии в Византии и исламских странах, стал использовать алгебраические методы для астрономических вычислений, ввёл правила операций с нулём, положительными и отрицательными величинами. До нашего времени сохранилось его основное сочинение «Брахма-спхута-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы», или «Пересмотр системы Брахмы»). Большая часть сочинения посвящена астрономии, две главы (12-я и 18-я) математике. Брахмагупта родился приблизительно в 598 году. Это следует из книги «Брахма-спхута-сиддханта», в которой он сообщает, что написал этот текст в возрасте 30 лет в 628 году (Śaka 550). Брахмагупта родился в Бхилламале, который в то время был столицей земель династии Gurjara. Его отцом был Джиснугупта. Вероятно, он прожил большую часть жизни в Бхинмале во время правления (и, возможно, под покровительством) правителя Вьяграмукхи, поэтому его нередко именуют Бхилламакарья (учитель из Бхиллама). Брахмагупта был руководителем астрономической обсерватории в Удджайне. Обсерватория, в которой также работал Варахамихира, была лучшей в древней Индии. В своей работе Брахма-спхута-сиддханта Брахмагупта дал определение нуля как результат вычитания из числа самого числа. Он одним из первых установил правила арифметических операций над положительными и отрицательными числами и нулём, рассматривая при этом положительные числа как имущество, а отрицательные числа как долг. Далее Брахмагупта пытался расширить арифметику дав определение деления на ноль. Брахмагупта также предложил метод приближённого вычисления квадратного корня, эквивалентный итерационной формуле Ньютона (Newton-Raphson), метод решения некоторых неопределённых квадратных уравнений вида $ax^2+c=y^2$, метод решения неопределённых линейных уравнений вида $ax+c=by$, используя метод последовательных дробей.

Приложение № 5

Диофа́нт Александри́йский — древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э. Нередко упоминается как «отец алгебры». Автор «Арифметики» — книги, посвящённой нахождению положительных рациональных решений неопределённых уравнений. В наше время под «диофантовыми уравнениями» обычно понимают уравнения с целыми коэффициентами, решения которых требуется найти среди целых чисел.

Диофант был первым греческим математиком, который рассматривал дроби наравне с другими числами. Диофант также первым среди античных учёных предложил развитую математическую символику, которая позволяла формулировать полученные им результаты в достаточно компактном виде.

В честь Диофанта назван кратер на видимой стороне Луны. О подробностях его жизни практически ничего не известно. С одной стороны, Диофант цитирует Гипсикла (II век до н. э.); с другой стороны, о Диофанте пишет Теон Александрийский (около 350 года н. э.), — откуда можно сделать вывод, что его жизнь протекала в границах этого периода. Возможное уточнение времени жизни Диофанта основано на том, что его *Арифметика* посвящена «достопочтеннейшему Дионисию». Полагают, что этот Дионисий — не кто иной, как епископ Дионисий Александрийский, живший в середине III в. н. э.

Основное произведение Диофанта — *Арифметика* в 13 книгах. К сожалению, сохранились только 6 первых книг из 13. Бо́льшая часть труда — это сборник задач с решениями (в сохранившихся шести книгах их всего 189), умело подобранных для иллюстрации общих методов. Главная проблематика *Арифметики* — нахождение положительных рациональных решений неопределённых уравнений. Рациональные числа трактуются Диофантом так же, как и натуральные, что не типично для античных математиков.

Приложение № 6

Абу́ Абдулла́х Муха́ммад ибн Муса́ аль-Хорезми́ — один из крупнейших средневековых персидских учёных IX века, математик, астроном, географ и историк. Сведений о жизни учёного сохранилось крайне мало. Родился предположительно в Хиве в 783 году. В некоторых источниках аль-Хорезми называют «аль-маджуси», то есть маг, из этого делается вывод, что он происходил из рода зороастрийских жрецов, позже принявших ислам. Родина аль-Хорезми — Хорезм, включавший в себя территорию современного Узбекистана и часть Туркмении.

Последнее упоминание об аль-Хорезми относится 847 году, когда умер халиф аль-Васик. Аль-Хорезми упоминается среди лиц, присутствовавших при его кончине. Принято считать, что он умер в 850 году. Аль-Хорезми родился в эпоху великого культурного и научного подъёма. Начальное образование он получил у выдающихся учёных Мавераннахра и Хорезма. На родине он познакомился с индийской и греческой наукой, а в Багдад он попал уже вполне сложившимся учёным. «Дом мудрости» был своего рода Академией наук, где работали учёные из Сирии, Египта, Персии, Хорасана и Мавераннахра. В ней находилась библиотека с большим количеством старинных рукописей и астрономическая обсерватория. Здесь на арабский язык были переведены многие греческие философские и научные труды. В это же время там работали Хаббаш аль-Хасиб, ал-Фаргани, Ибн Турк, аль-Кинди и другие выдающиеся учёные.Примерно в 830 году Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми создал первый известный арабский трактат по алгебре. Аль-Хорезми посвятил два своих произведения халифу аль-Мамуну, который оказывал покровительство учёным Багдада.

Аль-Хорезми разработал подробные тригонометрические таблицы, содержащие функции синуса. В XII и XIII веках на основании книг аль-Хорезми на латыни были написаны работы Carmen de Algorismo и Algorismus vulgaris, сохранявшие актуальность ещё много столетий. До XVI века переводы его книг по арифметике использовались в европейских университетах как основные учебники по математике. В 1857 году князь Бальдассаре Бонкомпанья включил перевод «книги об индийском счёте» в качестве первой части книги под названием «Трактаты по арифметике»

Приложение № 7

Франсуа́ Вие́т, сеньор де ля Биготье — французский математик, основоположник символической алгебры. Свои труды подписывал латинизированным именем «Франциск Виета» поэтому иногда его называют «Виета». По образованию и основной профессии — юрист. Родился в 1540 году в Фонтене-ле-Конт французской провинции Пуату — Шарант. Отец Франсуа — прокурор. Учился сначала в местном францисканском монастыре, а затем — в университете Пуатье, где получил степень бакалавра (1560). С 19 лет занимался адвокатской практикой в родном городе. В 1567 году перешёл на государственную службу.

Около 1570 года подготовил «Математический Канон» — капитальный труд по тригонометрии, который издал в Париже в 1579 году. В 1571 году переехал в Париж, увлечение его математикой и известность Виета среди учёных Европы продолжали расти.

Благодаря связям матери и браку своей ученицы с принцем де Роганом, Виет сделал блестящую карьеру и стал советником сначала короля Генриха III, а после его убийства — Генриха IV. По поручению Генриха IV Виет сумел расшифровать переписку испанских агентов во Франции, за что был даже обвинён испанским королём Филиппом II в использовании чёрной магии.

Когда в результате придворных интриг Виет был на несколько лет отстранён от дел (1584—1588), он полностью посвятил себя математике. Итогом его размышлений стали несколько трудов, в которых Виет предложил новый язык «*общей арифметики*» — символический язык алгебры.

Виет свободно применяет разнообразные алгебраические преобразования — например, замену переменных или смену знака выражения при переносе его в другую часть уравнения. Это стоит отметить, принимая во внимание тогдашнее подозрительное отношение к отрицательным числам. Из знаков операций Виет использовал три: плюс, минус и черту дроби для деления; умножение обозначалось предлогом *in*. Вместо скобок он, как и другие математики XVI века, надчёркивал сверху выделяемое выражение. Показатели степени у Виета ещё записываются словесно.

4.Список литературы.

1. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. Изд. 57-е. - М., Просвещение, 1990.

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988.

3. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: просвещение, 1982.

4. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. «Просвещение» 1990 .

5. М., Математика (приложение к газете «Первое сентября»), №№ 21/1996, 10/1997, 24/1997, 40/2000.

6. Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М., Просвещение, 1972.

7. Соломник В.С., Милов П.И. Сборник вопросов и задач по математике. Изд. - 4-е, дополн. - М., Высшая школа, 1973.

8. Квадратное уравнение; Квадратный трёхчлен // Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1985. — С. 133-136. — 352 с.

9. https://ru.wikipedia.org/wiki