Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

Прикладные вопросы математики

Логические задачи

Скорюпин Даниил Александрович,
7 кл., МАОУ «Лицей №1» г. Кунгур
Пластинина Мария Игнатьевна,
учитель математики высшей категории

Пермь 2017

Содержание

Введение

Решение нестандартных задач способствует развитию творческой активности, инициативы, любознательности, смекалки. В школьном курсе математики рассматривается достаточно большое количество интересных задач. К этим задачам можно отнести логические задачи: задачи занимательного характера, головоломки, анаграммы, ребусы и т.п. Чтобы успешно решать задачи такого вида, надо уметь выделять их общие признаки, подмечать закономерности, выдвигать гипотезы, проверять их, строить цепочки рассуждений, делать выводы. Логические задачи от обычных отличаются тем, что не требуют вычислений, а решаются с помощью рассуждений. В тоже время решение задач способствует развитию логического мышления. Можно сказать, что логическая задача – это особая информация, которую не только нужно обработать в соответствии с заданным условием, но и хочется это сделать. Эти задачи носят занимательный характер и не требуют большого запаса математических знаний, поэтому они привлекают даже тех учащихся, которые не очень любят математику. Только решение трудной, нестандартной задачи приносит радость победы. При решении логических задач предоставляется возможность подумать над необычным условием, рассуждать. Это у меня вызывает и сохраняет интерес к математике. Логически обоснованное решение – лучший способ раскрытия творческих способностей.

Задачи на разрезание

Задачи на разрезание, как один из видов головоломок, привлекали к себе внимание с древнейших времен. Первый трактат, в котором рассматриваются задачи на разрезание, написал знаменитый арабский астроном и математик из Хорасана Абу аль – Вефа(940 – 998 н.э.). В начале XX века благодаря бурному росту периодических изданий решение задач на разрезание фигур на то или иное число частей и последующее составление из них новой фигуры привлекает внимание как средство развлечения широких слоев общества. Теперь и геометры всерьёз занялись этими задачами, тем более, что в их основе лежит старинная задача о равновеликих и равносоставленных фигурах, которая исходит еще от античных геометрах. Известными специалистами в этом разделе геометрии были знаменитые классики занимательной геометрии и составители головоломок Генри Э. Дьюдени и Гарри Линдгрен.

Историческая справка

Задачи на разрезание и перекраивание возникли в глубокой древности: в VII – V вв. до н. э. в Индии в книге "Правила веревки" II века до н. э. в "Началах" Евклида 1832 – 1833 теорема Больяи – Гервина (равновеликие многоугольники являются равносоставленными) XX в. Генри Э. Дьюдени и Гарри Линдгрен – классики интересной геометрией.

Задачи

1.Разрежьте два квадрата 1x1 и 3x3 на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий им квадрат.

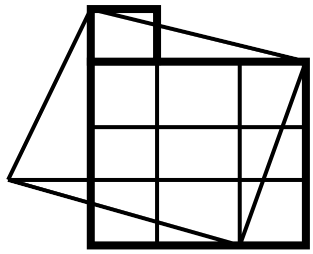


Рис. 1

Ответ: эта задача – на перекраивание фигуры, состоящий из двух квадратов, в равновеликий ей квадрат. Площадь нового квадрата равна 3^2+1^2, значит, сторона квадрата, равновеликого сумме данных квадратов равна 10 т. е. является гипотенузой прямоугольника с катетами 3 и 1. Построение такого квадрата понятно из рисунка 1

2.Крест составлен из пяти квадратов: один квадрат в центре, а остальные четыре прилежат к его сторонам. Разрежьте его на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий ему квадрат.

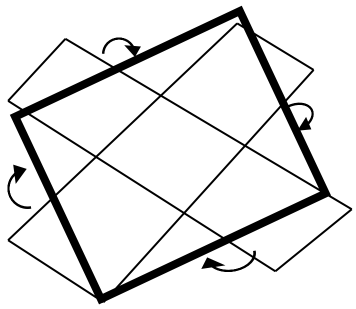
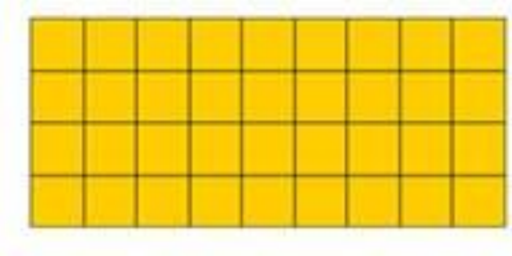


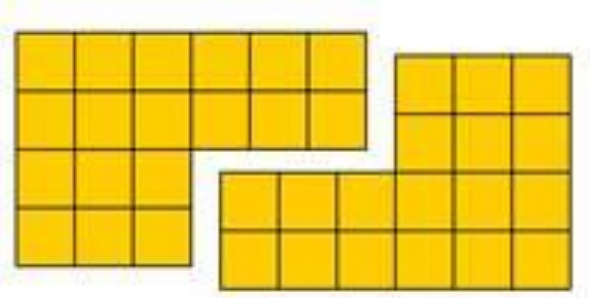
Рис 2

Ответ:решение задачи понятно из рисунка 2.

3. Разрежьте прямоугольник, длина которого равна 9 клеток, а ширина 4, на две равные части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

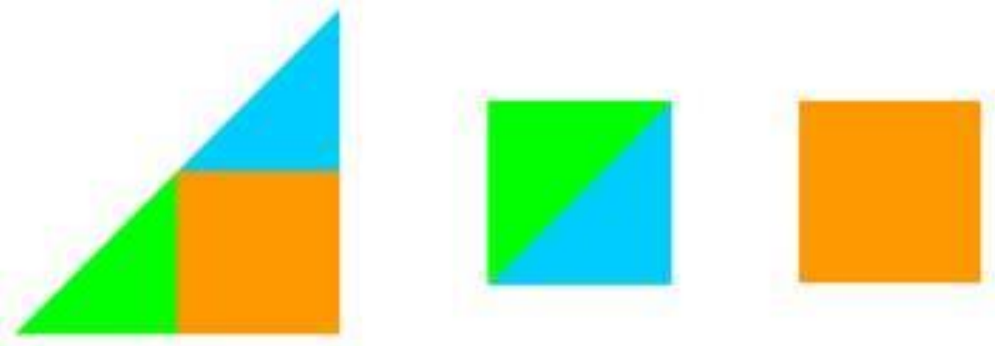


Ответ:

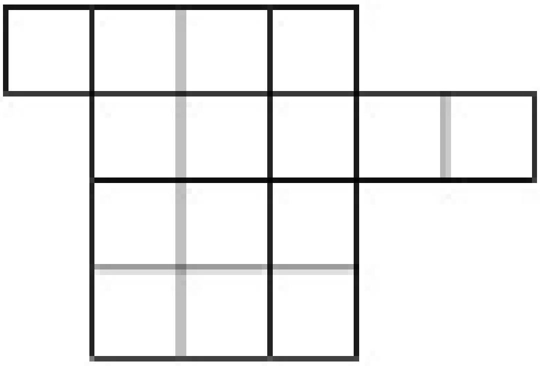


4. Постройте прямоугольный треугольник, у которого две стороны равны. Разрежьте его на три неравные части, из которых можно было бы составить два равных квадрата.

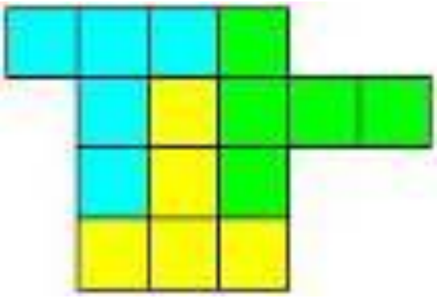
Ответ:



5. Попробуйте разрезать изображенную на рисунке фигуру на 3 равные по форме части:



Ответ:



Задачи на время

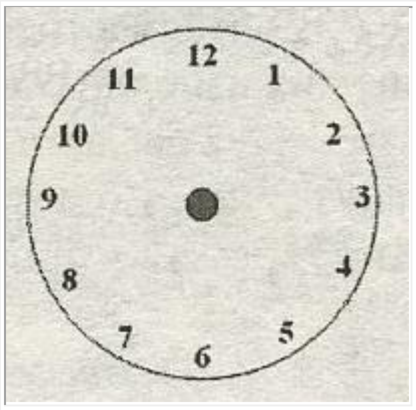
Рассматривая какие-то величины, мы привязываем их к конкретным объектам: не просто длина, а длина чего-то, не просто объём, а объём какого-то тела. То же самое относится к массе и температуре. Аналогично мы говорим о длительности некоторого события. И всё-таки время – совсем особая величина. Время идёт и идёт само, независимо от того, хотим мы этого или не хотим.

Историческая справка

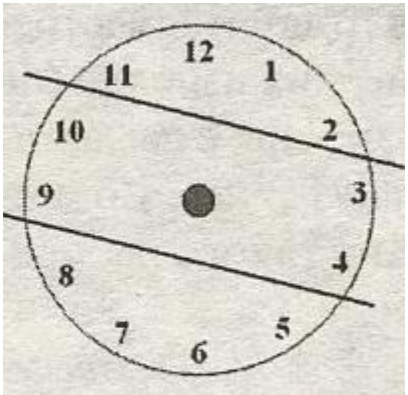
Первые часы появились более двух с половиной тысяч лет назад в Китае. Это были - солнечные часы. Следующий этап в истории изобретения часов принадлежит Египту. Именно там появились вторые, известные человечеству солнечные часы. В Египте часы представляли из себя огромный вертикальный обелиск, имеющий гномон и наземную шкалу.

Задачи

1.На рисунке изображен циферблат. Как его поделить двумя прямыми линиями на 3 части, чтобы сумма чисел в каждой части была одинаковой?



Ответ:



2. Представьте, что у Вас есть электронные цифровые часы, которые показывают время в 12 часовом режиме (т.е. не в 24 часовом). Эти часы сломались и показывают время только в том случае, если количество часов и минут совпадает, например, 1:01, 2:02, 3:03 и т.д. Какой самый минимальный промежуток времени между показаниями данных часов? Варианты:

А) 11 минут.

Б) 21 минута.

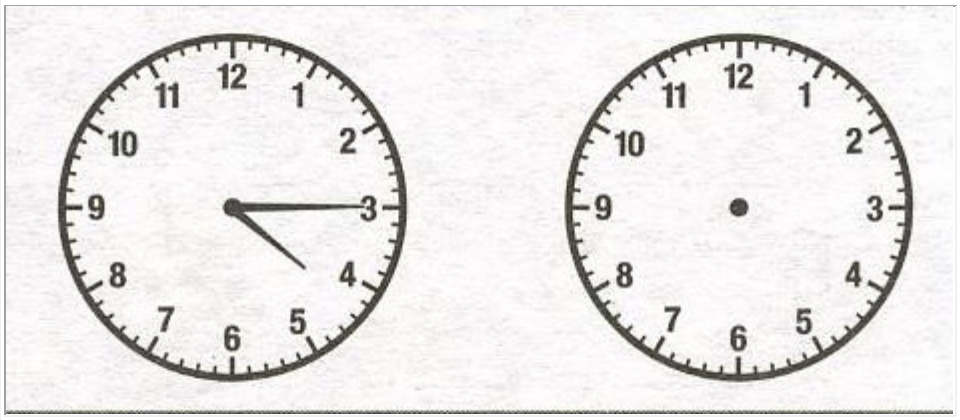
В) 49 минут.

Г) 61 минута.

Д) 101 минута.

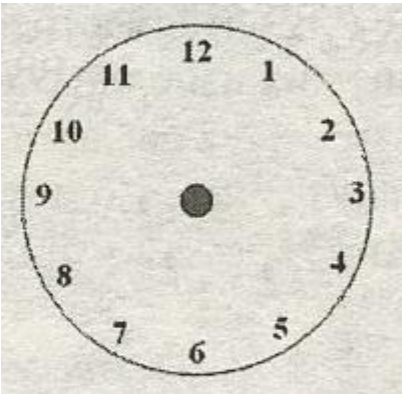
Ответ: В) 49 минут. Решение: самые близкие показания между 12:12 и 1:01.

3. Часы каждый час убегают вперед на 4 минуты. В последний раз часы подводили (устанавливали точно) сегодня в одиннадцать утра. Сейчас точное время 16:15. Какое сейчас время показывают убегающие часы ?

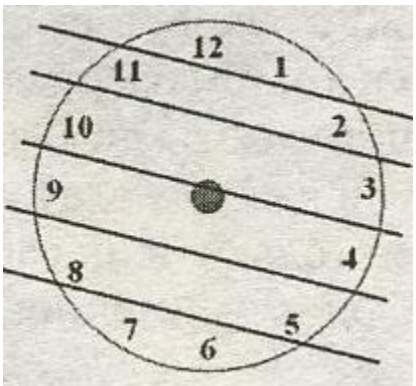


Ответ: 16 часов 36 минут. Разница во времени между 11 утра и 16:15 составляет пять с четвертью. За это время часы убегут на 21 минуту.

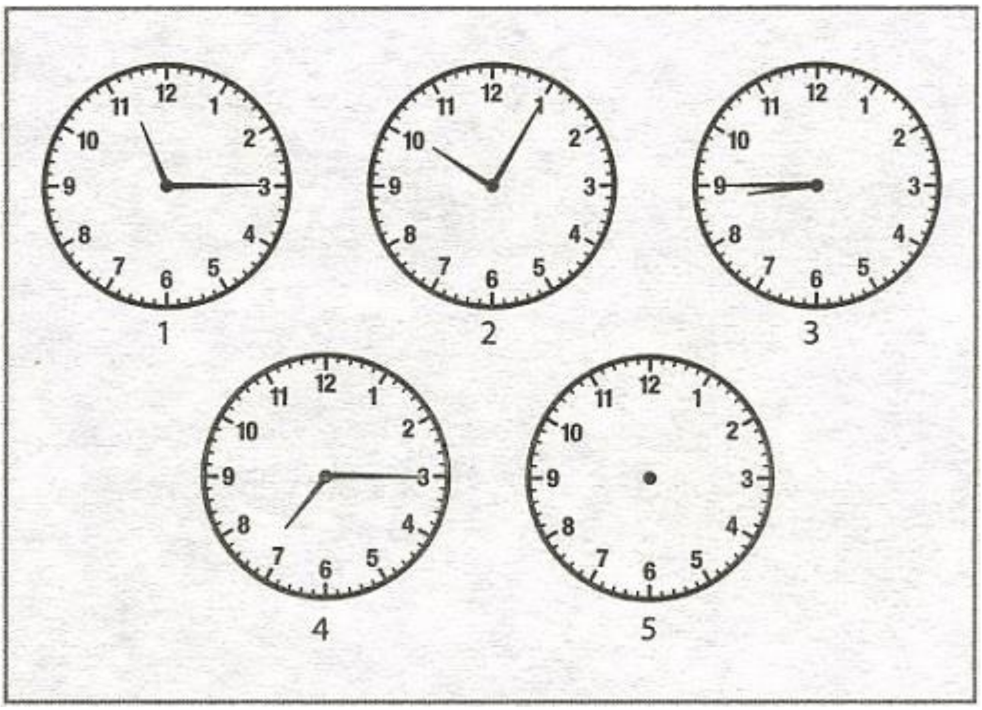
3. На рисунке изображен циферблат. Как его поделить прямыми линиями на 6 частей, чтобы сумма чисел в каждой части была одинаковой?



Ответ:



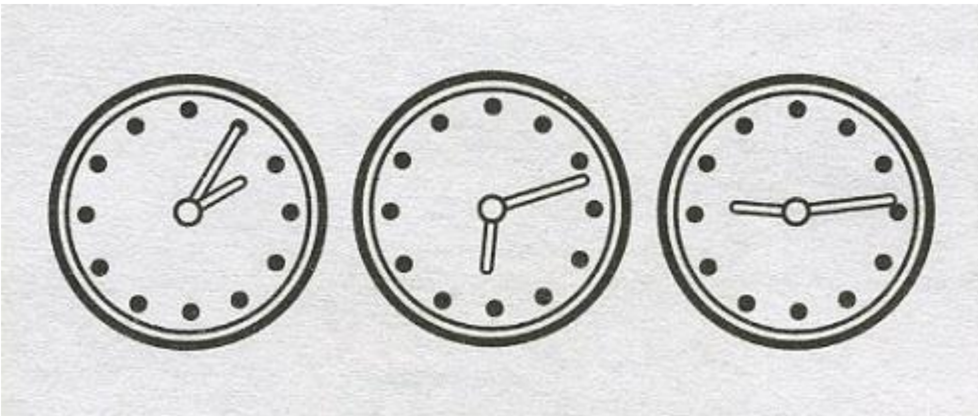
4. Какое время должны показывать часы под номером 5, чтобы продолжить определенную последовательность.



Ответ:

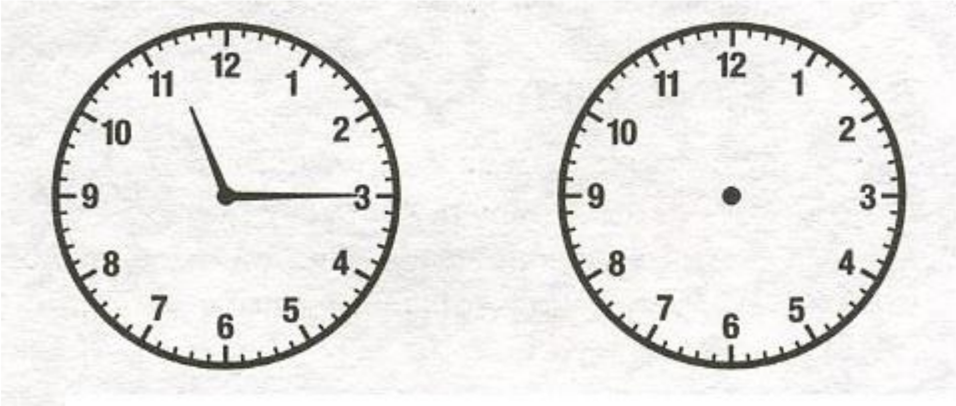
Время 5:35. Часы последовательно показывают к предыдущим часам: минус 1 час 10 минут, минус 1 час 20 минут, минус 1 час 30 минут. Следовательно, последние часы должны показывать минус 1 час 40 минут к четвертым.

5. Определите название города, зашифрованного на рисунке ниже.



Ответ: Berlin. Решение: на первых часах показано время 02:05, на вторых 18:12, на третьих 09:14. Буквы, занимающие в английском алфавите соответствующие позиции с номерами 2, 5, 18, 12, 9, 14, образуют слово Berlin.

6. Человек работает в таком режиме: десять минут работа, потом пять минут перерыв, десять минут работа, потом снова пять минут отдыха. Сегодня он работал в течении двух часов (общее время перерывов не включено). Начал в 11:15 , а когда он закончил ?



Ответ: 14:10. Пояснения: в два часа работы входит двенадцать десятиминутных сессий работы и одиннадцать пятиминутных перерывов между ними. В результате все это займет 2 часа 55 минут.

Задачи на перестановки

Пусть множество X состоит из n элементов.

Определение. Размещение без повторений из n элементов множества Xпо n называется перестановкой из n элементов.

Заметим, что в любую перестановку входят все элементы множества X, причём ровно по одному разу. То есть перестановки одна от другой отличаются только порядком следования элементов и могут получиться одна из другой перестановкой элементов (отсюда и название).

Число всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n .

Так как перестановки – это частный случай размещений без повторений при $k = n$, то формулу для нахождения числа P_n получим из формулы , подставляя в неё $k = n$:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n!$$

Таким образом, $P_n = n!$

Историческая справка

Комбинаторика – это наука о расположении элементов в определенном порядке и о подсчете числа способов такого расположения. Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Задачи

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу: 1) 3 человека; 2) 5 человек?

Решение.

Различные варианты расположения n человек в очереди отличаются один от другого только порядком расположения людей, т. е. являются различными перестановками из n элементов.

Три человека могут встать в очередь $P_3 = 3! = 6$ различными способами.

Ответ: 1) 6 способов; 2) 120 способов.

2. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

Решение.

Количество человек равно количеству мест на скамейке, поэтому количество способов размещения равно числу перестановок из 4 элементов: $P_4 = 4! = 24$.

Ответ: 24 способами.

3. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?

Решение.

Под маршрутом следует понимать порядок посещения курьером учреждений. Пронумеруем учреждения номерами от 1 до 7, тогда маршрут будет представляться последовательностью из 7 Цифр, порядок которых может меняться. Количество маршрутов равно числу перестановок из 7 элементов: $P_7 = 7! = 5\ 040$.

Ответ: 5 040 маршрутов.

4.В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует?

Решение:Число перестановок из 5 определяем по формуле
$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ:120

5.Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

Решение: Число перестановок из 6 определяем по формуле
$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ:720

6. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4,5, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

Найдем количество всех перестановок из этих цифр: $P_6 = 6! = 720$. 0 не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором 0 стоит впереди. А это $P_5 = 5! = 120$.

$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$

Ответ: 600

7.

Квартет

Проказница Мартышка

Осел,

Козел,

Да косолапый Мишка

Затеяли играть квартет

…

Стой, братцы стой! –

Кричит Мартышка, - погодите!

Как музыке идти?

Ведь вы не так сидите…

И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.

Тут пуще прежнего пошли у низ раздоры

И споры,

Кому и как сидеть…

Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько?

Решение: Здесь идет перестановка из четырех, значит, возможно

$P_4 = 4! = 24$ варианта перестановок.

Ответ: 24

8. Сколькими способами можно переставить фрукты: яблоко, банан и грушу?

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко
яблоко/груша/банан $P_3=3!=6$

Ответ: 6 способов

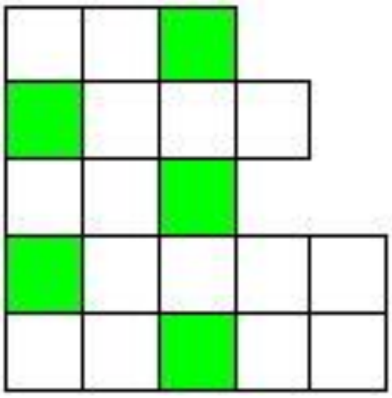
Заключение

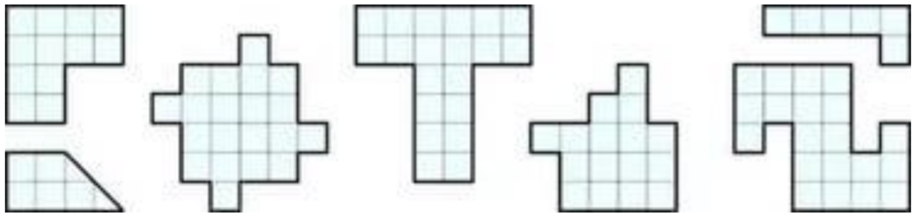
Логические задачи помогают развивать логическое и образное мышление. У любого нормального ребенка есть стремление к познанию, желание проверить себя. Чаще всего способности школьников так и остаются не раскрыты для них самих, они не уверены в своих силах, равнодушны к математике. Для таких школьников я и предлагаю применять логические задачи. Эти задачи могут быть рассмотрены на кружковых и факультативных занятиях. Они должны быть доступны, будить сообразительность, овладевать их вниманием, удивлять, пробуждать их к активной фантазии и самостоятельному решению. Также я считаю, что логика помогает нам в нашей жизни справиться с любыми трудностями, и все что мы делаем, должно быть логически осмысленно и построено. С логикой и логическими задачами мы сталкиваемся не только в школе на уроках математики, но и на других предметах.

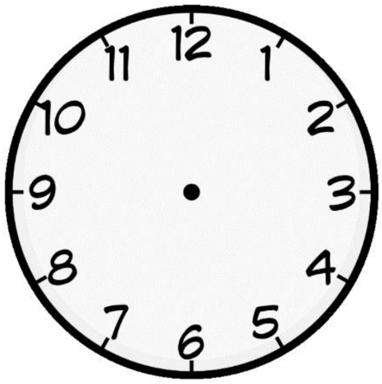
Литература

1. http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html
2. http://www.treningmozga.com/tasks/taskstime.html
3. http://www.potehechas.ru/golovolomki/golovolomki_razrezaniye.shtml
4. http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html
5. http://www.studfiles.ru/preview/3562659/page:2/
6. http://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_komb
7. Занимательные дидактические материалы по математике. Сборник заданий. Выпуск 2 / Авт.-сост. В.В Трошин – М.: Глобус, 2008. – 282с. – (Учение с увлечением).
8. С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов - «Старинные, занимательные задачи»
9. «Московский лицей» - «Задачи по математике. Серьёзные, занимательные и просто сказочные»
10. Г.А. Сахабиева, В.А. Сахабиев - «Учебное пособие по математике»

Приложение







\