Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

методические аспекты изучения математики и физики

Число π

Телегин Демид,

11 кл., МАОУ «Гимназия 8», г. Перми

Захарова Л.И.,

учитель математики

Пермь, 2017

Содержание

Введение

При выполнении заданий Международной олимпиады в 7 классе, я впервые узнал, что существует «Число π» с помощью которого можно найти длину экватора нашей земли. На уроке математики я узнал, что это число может служить постоянной во многих науках: математике, физике, астрономии, технике и многих практических расчетах. Без знаний о числе π нельзя вычислить длину окружности, площадь круга, выполнить многие расчеты в радиотехнике, электротехнике и космонавтике. Меня заинтересовало происхождение числа π и я решил узнать все про это число, и раскрыть все его тайны. Мне очень интересно узнать, как вычисляли число π в древние времена и как вычисляют его сейчас, сравнить эти методы. Я хочу узнать какие ученые, и в какие века начали заниматься проблемой числа π, попытаться вычислить приближенное значение числа π.

Цель исследования: нахождение числа π

Объект исследования: число π

Задачи:

1.Познакомиться с историей возникновения числа π;

2.Изучить методы вычисления числа π;

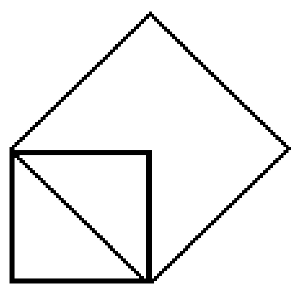
3. Нахождение числа π с помощью простейшего измерения, взвешивания и методом Монте- Карло.

1. История числа π.

Число π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83297 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679…, равное отношению длины окружности к ее диаметру, привлекало к себе внимание математиков на протяжении сотен, если не тысяч лет. Дело в том, что долгое время люди оперировали лишь целыми и дробными числами – числами, представленными в виде отношения двух целых чисел; они называются рациональными. Попытки представить число π в таком виде все время оканчивались неудачей. Число π входит в формулу площади круга, и масса математиков как профессиональных, так и любителей, ломала голову над задачей: как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу. Эта задача была настолько популярна, что всякая трудно решаемая задача сравнивалась с задачей квадратуры круга. Термин «квадратура круга» стал синонимом неразрешимой проблемы.

Обозначение числа π возникло от греческого слова «периметр».

Древнегреческие математики умели строить квадрат, площадь которого вдвое больше площади заданного квадрата, - достаточно было построить квадрат со стороной, равной диагонали данного квадрата.



Однако попытки выразить сторону этого квадрата через сторону исходного с помощью рациональных чисел оказались обреченными на провал. И это поняли уже ученики Пифагора. Этот факт подорвал уверенность математиков в том, что число π можно выразить в виде отношения целых чисел, и с того момента началась гонка за достижение все более высокой точности вычисления числа π.

Число **π** выражает отношение длины окружности к своему диаметру. В Древнем Египте площадь круга диаметром d определяли как $\left(d-\frac{d}{9}\right)^2$ — эта запись дана здесь в современных символах. Из приведенного выражения можно заключить, что в то время число π считали равным дроби $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ или $\frac{256}{81}$, т. е. $\pi \approx 3{,}160$

В священной книге джайнизма (одной из древнейших религий, существовавших в Индии и возникшей в VI в. до н. э.) имеется указание, из которого следует, что число π в то время принимали равным $\sqrt{10}$ что дает дробь 3,162… .

В истории математики считается, что первое вычисление на основе строгих теоретических рассуждений было выполнено выдающимся математиком древности Архимедом (287-212 гг. до н. э., подробней о нем в приложении). В своем труде «Об измерении круга» он доказал, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Использование найденного Архимедом значения π = 3,14 многие годы вполне удовлетворяло практические расчеты.

Примерно такое же представление о числе характерно для математиков древней Азии. В индийских «сутрах» (VII-V вв. до н. э.) принимается значение числа π, равное 3,008. Значительно позже Арибахта (V в.) и Бхаскара (XII в.) в качестве π брали значение $\frac{62832}{20000}$, т. е. 3,1416..., Брахмагупта (VI-VII в.), Магавира (IX в.) и Срид-дхара (XI в.) - значение $\sqrt{10}$, т. е. 3,162...; астроном Ван Фань (229-267 гг.) считал, что $\pi = \frac{142}{45}$, т. е. 3,155... . Цзу Чун-чжи (428-499 гг.) считал "точным" значением π: = $\frac{355}{113}$.

Такой точности в вычислении числа π математики добивались только в средние века, применяя метод Архимеда, т. е. вычисляя длину окружности с помощью периметров вписанных в нее или описанных около нее многоугольников. Так, Ал-Каши в 1424 году в книге *“Об измерении окружности”* нашел 16 верных знаков числа π, бельгиец А. Ван Ромен в XVI веке нашел 17 верных десятичных знаков π, голландец Лудольф ван Цейлен - 35 верных десятичных знаков для π. В течение XVIII-XX веков А. Эйлер, У. Джоне, В. Шенкс, Ферпоссом, Ренг постепенно увеличивали точность значений числа π и нашли его значение с огромной точностью (808 знаков!). Но они уже пользовались методами высшей математики. В настоящее время с помощью компьютера можно найти значение сколь угодно "далекого" десятичного знака числа π за сравнительно небольшой промежуток времени.

И все же на фоне этих достижений нас не может не поражать та высокая точность (5 верных знаков!) значения числа π, которым, вероятно, владели строители Первого Храма времен царя Соломона! Неведом нам пока метод, с помощью которого могла быть достигнута подробная точность. Мне представляется, что мы до сих пор очень плохо и поверхностно знаем Древний мир. Вполне возможно, что методом вписанных многоугольников при вычислении длины окружности владели за много веков до Архимеда и не только в Иудейско-Израильском царстве.

Древние греки Евдокс, Гиппократ и др. измерение окружности сводили к построению соответствующего отрезка, а измерение круга — к построению равновеликого квадрата. Следует заметить, что на протяжении многих столетий математики разных стран и народов пытались выразить отношение длины окружности к диаметру рациональным числом.

Архимед в III в. до н. э. обосновал в своей небольшой работе «Измерение круга» три положения: 1) всякий круг равновелик прямоугольному треугольнику, катеты которого соответственно равны длине окружности и ее радиусу; 2) площади круга относятся к квадрату, построенному на диаметре, как 11 к 14; 3) отношение любой окружности к ее диаметру меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$. Последнее предложение Архимед обосновал последовательным вычислением периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при удвоении числа их сторон. Сначала он удвоил число сторон правильных описанного и вписанного шестиугольников, затем двенадцатиугольников и т. д., доведя до вычисления периметров правильного вписанного и описанного многоугольников с 96 сторонами. По точным расчетам Архимеда отношение окружности к диаметру заключено между числами $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$, а это означает, что $\pi \approx 3{,}1419\ldots$. Истинное значение этого отношения 3,1415922653... .

В V в. н. э. китайским математиком Цзу Чунчжи было найдено более точное значение этого числа: $\pi \approx 3{,}1415927\ \ldots$.

В первой половине XV в. в обсерватории Улугбека, возле Самарканда, астроном и математик Ал-Каши вычислил π с 16 десятичными знаками. Он сделал 27 удвоений числа сторон многоугольников и дошел до многоугольника, имеющего $3 \cdot 2^{28}$ углов. Ал-Каши произвел уникальные расчеты, которые были нужны для составления таблиц синусов с шагом в $1'$. Эти таблицы сыграли важную роль в астрономии.

Спустя полтора столетия в Европе Ф. Виет нашел число $\boldsymbol{\pi}$ только с 9 правильными десятичными знаками, сделав 16 удвоений числа сторон многоугольников. Но при этом Ф. Виет первым заметил, что число $\boldsymbol{\pi}$ можно отыскать, используя пределы некоторых рядов. Это открытие имело большое значение, так как позволило вычислять π с какой угодно точностью. Только через 250 лет после Ал-Каши его результат был превзойден.

Первым ввел обозначение отношения длины окружности к диаметру современным символом π английский математик У. Джонсон в 1706 г. В качестве символа он взял первую букву греческого слова «периметр». Введенное У. Джонсоном обозначение стало общеупотребительным после опубликования работ Л.Эйлера, который воспользовался введенным символом впервые в 1736 г.

В конце XVIII в. А. М. Лежандр на основе работ И. Г. Ламберта доказал, что число π иррационально. Затем немецкий математик Ф. Линдеман, опираясь на исследования Ш. Эрмита, нашел строгое доказательство того, что это число не только иррационально, но и трансцендентно, т. е. не может быть корнем алгебраического уравнения. Из последнего следует, что с помощью только циркуля и линейки построить отрезок, равный по длине окружности, невозможно, а, следовательно, не существует решения задачи о квадратуре круга.

Поиски точного выражения числа π продолжались и после работ Ф. Виета. В начале XVII в. голландский математик из Кёльна Лудольф Ван Цейлен (1540—1610) — некоторые историки его называют Л. Ван Кейлен — нашел 32 правильных знака. С тех пор (год публикации 1615) значение числа **π** с 32 десятичными знаками получило название числа Лудольфа.

К концу XIX века, после 20 лет упорного труда, англичанин Вильям Шенкс нашел 707 знаков числа π. Однако в 1945 г. обнаружено с помощью ЭВМ, что Шенкс в своих вычислениях допустил ошибку в 520-м знаке и дальнейшие его вычисления оказались неверными число трансцендентное, следовательно, эти числа равными быть не могут.

В наше время труд вычислителей заменили ЭВМ. С их помощью число π вычислено с точностью более миллиона знаков, причем эти вычисления продолжались только несколько часов.

В современной математике число π — это не только отношение длин окружности к диаметру, оно входит в большое число различных формул, в том числе и в формулы неевклидовой геометрии, и определяется чисто аналитически. Входит оно и в замечательную формулу Л. Эйлера, которая устанавливает связь числа π и числа «е» следующим образом: $e^{2\pi i} = 1$, где $i=\sqrt{-1}$ Эта и другие взаимозависимости позволили математикам еще глубже выяснить природу числа π.

2. Методы нахождения числа π.

2.1 Простейшее измерение

Начертим на плотном картоне окружность радиуса R, вырежем получившийся круг и обмотаем вокруг него тонкую нить. Измерив длину l одного полного оборота нити, разделим l на длину диаметра окружности. Получившееся частное будет приближенным значением числа π, т. е. $\pi = \frac{l}{2R}$. Данный довольно грубый способ дает в обычных условиях приближенное значение числа π с точностью до 1 знака после запятой.

2.2 Измерение с помощью взвешивания

На листе картона начертим квадрат. Впишем в него круг. Вырежем квадрат. Определим массу картонного квадрата с помощью школьных весов. Вырежем из квадрата круг. Взвесим и его. Зная массы квадрата ($m_{кв}$) и вписанного в него круга ($m_{кр}$), воспользуемся формулами $m=QV$, $V=Sh_y$ где Q и h — соответственно плотность и толщина картона, S — площадь фигуры. Рассмотрим равенства: $m_{кв} = q \cdot S_{кв} \cdot h = q \cdot 4R^2 \cdot h$, $m_{кр} = q \cdot S_{кр} \cdot h = q \cdot \pi R^2 \cdot h$. Отсюда $\frac{m_{кр}}{m_{кв}} = \frac{\pi}{4}$, т. е. $\pi = \frac{4m_{кр}}{m_{кв}}$

Естественно, что в данном случае приближенное значение π зависит от точности взвешивания. Если взвешиваемые картонные фигуры будут довольно большими, то возможно даже на обычных весах получить такие значения масс, которые обеспечат приближение числа π с точностью до 0,1.

2.3 Суммирование площадей прямоугольников вписанных в полукруг.

Пусть A (a;0), B (b;0). Опишем на AB полуокружность как на диаметре. Разделим отрезок AB на n равных частей точками x_1, x_2, …, x_{n-1} и восставим из них перпендикуляры до пересечения с полуокружностью. Длина каждого такого перпендикуляра — это значение функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Из рис. 1 ясно, что площадь S полукруга можно вычислить по формуле:

$$S=\frac{b-a}{n}\cdot((f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))$$

В нашем случае b=1, a= -1. Тогда π ≈2S.

Значения π будут тем точнее, чем больше точек деления будет на отрезке *AB*.

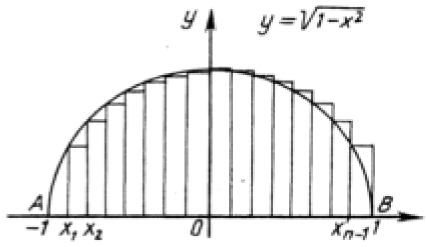


Рис. 1

2.4Метод Монте-Карло

Это фактически метод статистических испытаний. Свое экзотическое название он получил от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что метод требует применения случайных чисел, а одним из простейших приборов, генерирующих случайные числа, может служить рулетка. Впрочем, можно получить случайные числа и при помощи ... дождя.

Для опыта приготовим кусок картона, нарисуем на нем квадрат и впишем в квадрат четверть круга. Если такой чертеж некоторое время подержать под дождем, то на его поверхности останутся следы капель. Подсчитаем число следов внутри квадрата и внутри четверти круга. Очевидно, что их отношение будет приближенно равно отношению площадей этих фигур, так как попадание капель в различные места чертежа равновероятно. Пусть $N_{кр}$ — число капель в кругу, $N_{кв}$ — число капель в квадрате, тогда π = $\frac{4N_{кр}}{N_{кв}}$ (1)

Дождь можно заменить таблицей случайных чисел, которая составляется с помощью компьютера по специальной программе. Каждому следу капли поставим в соответствие два случайных числа, характеризующих его положение вдоль осей *Ox* и *Oy*. (см. рис. 2) Случайные числа можно выбрать из таблицы в любом порядке, например подряд. Пусть первое четырехзначное число в таблице 3265. Из него можно «приготовить» пару чисел, каждое из которых больше нуля и меньше единицы: x=0,32, y=0,65. Эти числа будем считать координатами капли, т. е. капля как будто попала в точку (0,32; 0,65). Аналогично поступаем и со всеми выбранными случайными числами. Если окажется, что для точки (X_i, Y_i) выполняется неравенство $X_i^2+Y_i^2>1$, то, значит, она лежит вне круга. Если $X_i^2+Y_i^2 \le 1$, то точка лежит внутри круга.

Для подсчета значения π снова воспользуемся формулой (1). Ошибка вычислений по этому методу, как правило, пропорциональна - $\sqrt{\frac{D}{N}}$, где D — некоторая постоянная, а N— число испытаний. В нашем случае $N = N_{кв}$. Из этой формулы видно: для того чтобы уменьшить ошибку в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N, т. е. объем работы, в 100 раз. Ясно, что применение метода Монте-Карло стало возможным только благодаря компьютерам.

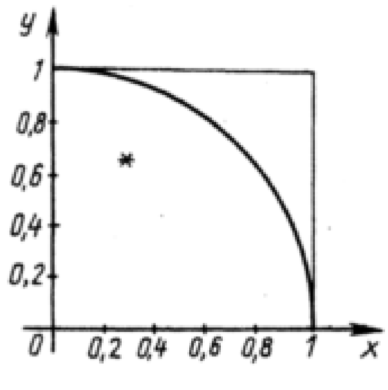


Рис. 2

2.5Метод «падающей иголки»

Возьмем обыкновенную швейную иголку и лист бумаги. На листе проведем несколько параллельных прямых так, чтобы расстояния между ними были равны и превышали длину иголки. Чертеж должен быть достаточно большим, чтобы случайно брошенная игла не упала за его пределами. Введем обозначения: a — расстояние между прямыми, l — длина иглы.

Положение случайным образом брошенной на чертеж иглы (см. рис. 3) определяется расстоянием x от ее середины до ближайшей прямой и углом φ, который игла образует с перпендикуляром, опущенным из середины иглы на ближайшую прямую (см. рис. 4). Ясно, что $0 \le x \le \frac{a}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

На рис. 5 изобразим графически функцию $y = 0.5l\cos\varphi$. Всевозможные расположения иглы характеризуются точками с координатами $(\varphi;\ y)$, расположенными на участке *ABCD*. Заштрихованный участок *AED* — это точки, которые соответствуют случаю пересечения иглы с прямой. Вероятность события *A* — «игла пересекла прямую» — вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{S_{AED}}{S_{ABCD}}, \text{ где } S_{AED} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5l\cos\varphi d\varphi = l,$$

$$S_{ABCD} = \frac{a\pi}{2}, \text{ т. е. } P(A) = \frac{2l}{a\pi}$$

Вероятность $P(A)$ можно приблизительно определить многократным бросанием иглы. Пусть иглу бросали на чертеж S раз и k раз она упала, пересекая одну из прямых, тогда при достаточно большом S имеем $P(A) = \frac{k}{S}$. Отсюда $\pi \approx \frac{2lS}{ak}$

Замечание. Изложенный метод представляет собой вариацию метода статистических испытаний. Он интересен с дидактической точки зрения, так как помогает совместить простой опыт с составлением довольно сложной математической модели.

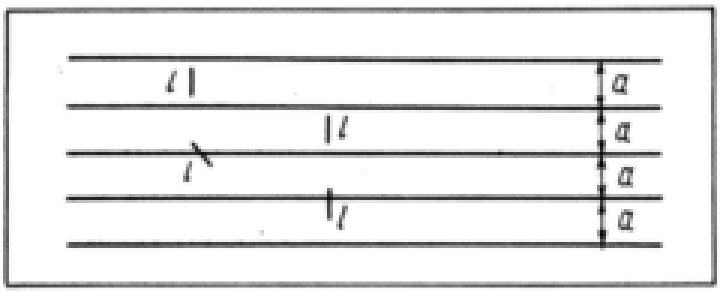


Рис 3

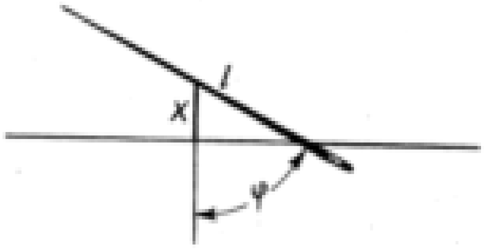


Рис. 4

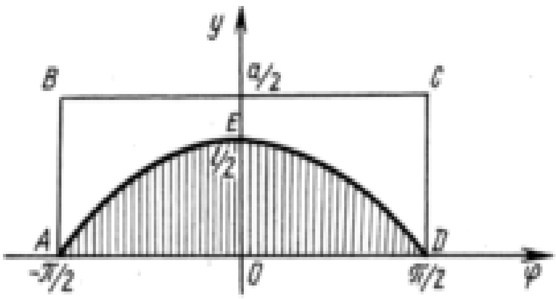


Рис. 5

2.6 Вычисление π с помощью ряда Тейлора

Обратимся к рассмотрению произвольной функции *f(x).* Предположим, что для нее в точке x_0 существуют производные всех порядков до n-го включительно. Тогда для функции *f(x)* можно записать ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

Пусть теперь *f(x)=arctg x* при $-1\le x\le 1$ и $x_0=0$.

Тогда *arctg x=* $x-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+...$

Если *x=1, arctg 1=*$\frac{\pi}{4}$, значит, $\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+...\right)$

Вычисления с помощью этого ряда будет тем точнее, чем больше членов ряда будет задействовано.

3.Практическая часть

3.1 Нахождение числа π с помощью простого измерения

На листе картона я нарисовал и вырезал окружности радиусом R. Потом я обмотал получившиеся окружности крепкой нитью. Измерив длину одного полного оборота нити для каждой окружности, я нашел их длины. Далее остается только обработать полученные данные. По формуле $\pi = \frac{l}{2R}$ я посчитал π с данными, представленными в таблицы. У меня получились следующие значения (см. таблицу). Эти значения π отличаются от реального на 0,05. Я доволен этим результатом т. к. выше сказано, что такой способ дает в обычных условиях приближенное значение числа π с точностью до 1 знака после запятой.

№ опыта	R, см	L, см	π
1	9	57,8	3,21
2	8	52	3,25
3	7	42,8	3,129
4	6,5	41,4	3,18
5	6	38,6	3,21
6	5	32,5	3,25
7	4	26	3,25
8	3,5	22,3	3,18
9	3	19,2	3,2
10	2,5	15,5	3,1
11	2	12,6	3,15
12	1	6,4	3,2

3.2. Нахождение числа π с помощью взвешивания

Я начертил на плотном листе картона квадраты, затем вписал в них круги. Вырезал квадраты, взвесил их на аптечных весах и получил массы квадратов ($m_{кв}$). Далее я вырезал из квадратов круги и взвесил их, получил массы кругов ($m_{кр}$), представленные в таблице. Из вышеприведенных преобразований следует, что $\pi = \frac{4m_{кр}}{m_{кв}}$. Подставляем наши данные в эту формулу, полученные результаты запишем в таблицу. Эти результаты получились точнее чем результаты в первом опыте.

№ опыта	Масса круга, гр.	Масса квадрата, гр.	число π
1	6,1	7,8	3,13
2	4,8	6	3,2
3	3,6	4,6	3,13
4	3,1	4	3,1
5	2,6	3,3	3,15
6	1,8	2,3	3,13
7	1,2	1,5	3,2
8	0,95	1,2	3,16
9	0,65	0,82	3,17
10	0,47	0,6	3,13
11	0,31	0,4	3,1
12	0,1	0,13	3,07
	Среднее π: 3,139		

3.3.Метод Монте-Карло

Для опыта я приготовил кусок картона, нарисовал на нем квадрат и вписал в квадрат четверть круга. Если такой чертеж некоторое время подержать под дождем, то на его поверхности останутся следы капель. Подсчитаем число следов внутри квадрата и внутри четверти круга.

Пусть $N_{кр}$ — число капель в кругу, $N_{кв}$— число капель в квадрате, тогда

$\pi = \dfrac{4N_{кр}}{N_{кв}}$. Получилось, что Nкр. = 18, Nкв.=24, тогда π = 3. Очевидно, что их отношение будет приближенно равно отношению площадей этих фигур, так как попадание капель в различные места чертежа равновероятно.

Дождь можно заменить таблицей случайных чисел, которая составляется с помощью компьютера по специальной программе. Каждому следу капли поставим в соответствие два случайных числа, характеризующих его положение вдоль осей *Ox* и *Oy*. Случайные числа можно выбрать в любом порядке. Применение метода Монте-Карло стало возможным только благодаря компьютерам.

3.3 Суммирование площадей прямоугольников вписанных в полукруг.

Пусть *A* (-1;0), *B* (1;0). Я описал на *AB* полуокружность как на диаметре. Разделил отрезок *AB* на 20 равных частей точками x_1, x_2, …, x_{n-1} и провели из них перпендикуляры до пересечения с полуокружностью. Длина каждого такого перпендикуляра — это значение функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Площадь *S* полукруга мы вычисляли по формуле:

$$S = \frac{b-a}{n} \cdot ((f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))$$

В нашем случае *b*=1, *a*= -1. Тогда π ≈2*S*.

№ опыта	Формула	$f(x)$
1	$f(x_1) = \sqrt{1-0{,}81} = \sqrt{0{,}19}$	0,44
2	$f(x_2) = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}6}$	0,6
3	$f(x_3) = \sqrt{1-0{,}49} = \sqrt{0{,}71}$	0,71
4	$f(x_4) = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}8}$	0,8
5	$f(x_5) = \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}87}$	0,87
6	$f(x_6) = \sqrt{1-0{,}16} = \sqrt{0{,}92}$	0,92
7	$f(x_7) = \sqrt{1-0{,}09} = \sqrt{0{,}96}$	0,96
8	$f(x_8) = \sqrt{1-0{,}04} = \sqrt{0{,}98}$	0,98
9	$f(x_9) = \sqrt{1-0{,}01} = \sqrt{0{,}99}$	0,99
10	$f(x_{10}) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1}$	1

С помощью вышеизложенной формулы я нашел значение S, равное 1,554. Следовательно, значение числа π равно 3,108, что является достаточно точным результатом.

Заключение

Проделав работу, я узнал много нового о числе π. Удивление у меня вызвало то, что значение числа π было зашифровано в Библии, это значит, что о числе π знали ещё задолго до нашей эры. я узнал, что существует множество способов вычисления числа π. В практической части работы я с помощью методов…. определил число π приблизительно равное верному значению числа. Выяснил, что число π берет свое название от греческого слова «периметр». Множество ученых бились над определением точного значения числа π. Архимед в III веке до нашей эры обосновал три положения в своей работе «Измерение круга». Начиная, примерно с 1600 года появляется множество способов нахождения числа π. Сейчас число π имеет высочайшую точность – более миллиона знаков после запятой

Список литературы

1.Жуков А.В. О числе π.-М.: МЦМНО, 2002.

2. Жуков А.В. Вездесущее число «пи». — М.: Издательство ЛКИ, 2007.

3.Перельман Я.И. Квадратура круга.-Л.: Дом занимательной науки, 1961.

4.Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности.-М.:Просвещение, 1963.

5.Интернет портал Referat.ru - http://www.referat.ru/

6.Электронная энциклопедия wikipedia