Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики и физики»

Прикладные вопросы математики

Геометрическая идея симплекс метода в задачах

Завалина Дарья Павловна,

11 кл., МАОУ СОШ №1, г. Пермь

Кошина Елена Николаевна,

учитель математики высшей категории

Пермь 2017

- **Актуальность:**

В задачах ЕГЭ в задании 17 появляются задачи на нахождение наибольшего значения n или наименьшего значения n .

Цитата из методических рекомендаций по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом «…Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).»

Что такое симплекс метод?

Новое, для меня, понятие вызвало интерес, и я решила изучить данный вопрос математики.

Я задалась вопросом: « Можно ли решать такие задачи способом не входящие в школьную программу?» Некоторые задачи задания 17 ЕГЭ это задачи линейного программирования, решаемые симплекс методом.

Цель моей работы рассмотреть 2 задачи линейного программирования, решаемые геометрическим симплекс методом и составить алгоритм решения таких задач.

Задачи:

1. Изучить литературу о линейном программировании и симплекс метод.
2. Исследовать 2 задачи.
3. Составить алгоритм решения задач.

Объект исследования: Симплекс метод задач линейного программирования.

Предмет исследования: Геометрическая идея симплексного метода в решении задач ЛП (линейного программирования).

Практическая значимость:

1. Использование приобретённых знаний по данной теме и применение их к задачам.
2. Использование навыков исследовательской работы в учебной деятельности.

Гипотеза: Применение разработанного алгоритма решения задач ЛП геометрическим симплекс методом позволит мне, основываясь на знаниях школьной программы, решать стандартные задачи ЛП с 2-мя переменными.

Методы исследования, используемые в работе:

1. Анализ литературы и ресурсов сети Интернет по данной теме.
2. Воспроизведение основных понятий и фактов изученного материала.
3. Познавательно-поисковая деятельность.
4. Сравнение и обобщение математических фактов.
5. Анализ полученных результатов.

- **Теоретическая часть**

Симплекс метод – это общий метод решения задач линейного программирования.
Линейное программирование – это раздел математического программирования. В нем изучается теория и методы решения об экстремумах линейных функций на множествах, которые задаются линейными уравнениями и неравенствами. Задачи линейного программирования являются оптимизационными, т.е. состоят в выборе среди некоторого множества допустимых решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные.
Задачами линейного программирования занимался Канторович Леонид Витальевич (1912-1986) – советский математик и экономист. Он является создателем линейного программирования. За это в 1975г. ему была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
Использование графического метода (геометрическая идея нахождения вершины многогранника, как оптимального решения многогранного множества) возможна только при решении задач линейного программирования с двумя переменными.
Для решения задач с большим количеством переменных применяют алгебраический метод.
Общий метод решения задач линейного программирования называется симплексным.
Переходы от одной угловой точки к другой необходимо осуществлять до тех пор, пока не будет найдена точка, соответствующая оптимальному решению.
Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решать и вручную.

- Рассмотрим 2 стандартные задачи:

1.Транспортная задача

Пусть в пунктах A_1, A_2, …, A_m производится некоторый однородный продукт. Этот продукт нужно доставить в пункты потребления B_1, B_2, …, B_n. Задача состоит в том, чтобы так организовать перевозки, чтобы их стоимость была наименьшей, если известно, что объем производства продукта в пункте A_i составляет a_i единиц i = 1; 2; …; m, объем потребления в пункте B_j составляет J единиц продукта, J = 1; 2; …; n. Транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, составляет C_{ij} денежных единиц. Математически это выглядит так:

Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Требуется определить совокупность из т. п. Величина x_{ij}, удовлетворяющих условиями:

$$\sum_{J=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ где } i = 1; 2; \ldots; m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_j \leq b_j, \text{ где } J = 1; 2; \ldots; n.$$

Эти условия обращаются в минимум линейную функцию

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

2. Задача о диете.

Для нормальной жизнедеятельности человеку ежесуточно требуется питание, содержащее не менее b_1 калорий, b_2 единиц белков одной структуры, b_3 единиц белков другой структуры, b_4 единиц витаминов и т. д. Эту потребность в пище можно покрыть (или даже перекрыть), употребляя ежедневно x_1 хлеба, x_2 мяса, x_3 молока, x_4 капусты и т. д. Пусть единица i – го продукта питания стоит C_1 денежных единиц и содержит a_{ij} единиц питательного ингредиента J. Задача состоит в составлении наиболее дешевого суточного рациона питания. Математически эти условия выглядят так:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\ b_1$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n\ b_1$$

минимизировать функцию $y = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n$.

- **Практическая часть:**

1. Задача о перевозке грузов.

Эта задача такой организации перевозки грузов, чтобы стоимость ее была минимальной.

Рассмотрим на примере:

На три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ нужно завезти сырье одинакового вида, которое хранится в двух складах C_1 и C_2.

Наличие сырья:

на C_1 – 20 тонн,
на C_2 – 25 тонн.

Потребность в сырье:

для $З_1$ – 10 тонн;
для $З_2$ – 15 тонн;
для $З_3$ – 20 тонн.

Расстояние между объектами:

	$З_1$	$З_2$	$З_3$
C_1	5 км	7 км	10 км
C_2	3 км	4 км	6 км

Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. вариант, для которого общее количество тонно-километров будет наименьшим.

Решение:

Обозначим за x и y – количество сырья, которое нужно вывезти со склада C_1 соответственно на заводы $З_1$ и $З_2$. Тогда со второго склада нужно довезти на эти заводы (10 – x) и (15 – y) тонн сырья. Так как общее количество имеющегося на складах сырья совпадает с потребностью заводов, т. е. все сырье должно быть вывезено со складов на заводы, то после обеспечения $З_1$ и $З_2$ оставшееся на складах сырье полностью вывозится на завод $З_3$, т. е. со склада C_1 на завод $З_3$ вывозится (20 – x – y) тонн, а со склада C_2 25 – (10 – x) – (15 – y) = x + y тонн. Учитывая расстояния между складами и заводами, находим общее число тонно-километров:

$$F = 5x + 7y + 10*(20 - x - y) + 3*(10 - x) + 4*(15 - y) + 6*(x + y)$$

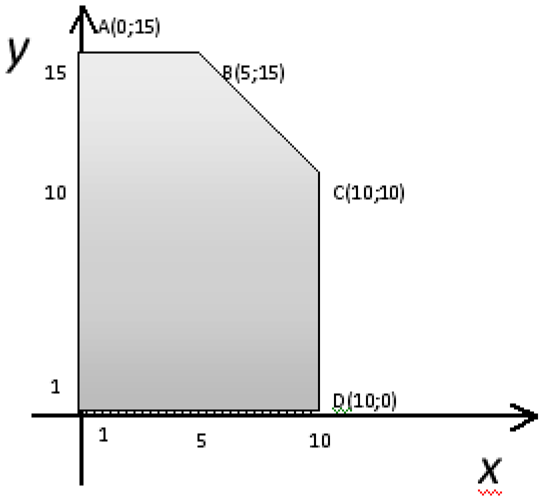
Упростив, получим:

$$F = 290 - 2x - y.$$

Заметим, что все величины, выражающие количество перевозимого по разным дорогам груза, неотрицательны:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20 - x - y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 15 - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

Каждое из этих неравенств определяет в системе координат x, y плоскость, а система всех этих неравенств определяет выпуклый многоугольник.



Таким образом, задача о нахождении наиболее выгодного варианта перевозок сводится математически к нахождению M(x, y) многоугольника, в которой функция $F = 290 – 2x – y$ достигает наименьшего значения. Наименьшее значение функция будет достигать в одной из вершин.

O(0;0): $F(0;0) = 290 – 2 \cdot 0 – 0 = 290$

A(0;15): $F(0;15) = 290 – 2 \cdot 0 – 15 = 275$

B(5;15): $F(5;15) = 290 – 2 \cdot 5 – 15 = 265$

C(10;10): $F(10;10) = 290 – 2 \cdot 10 – 10 = 260$

D(10;0): $F(10;0) = 290 – 2 \cdot 10 – 0 = 270$

Наименьшего значения функция достигает в точке C(10;10). Иначе говоря, наиболее выгодный вариант перевозок соответствует точке C, т. е. $x = 10$; $y = 10$.

Ответ: со склада $С_1$ на завод $З_1$ должно поступить 10 т, на завод $З_2$ – 10 т, на завод $З_3$ – 0 т;

со склада $С_2$ на завод $З_1$ – 0 т, на завод $З_2$ – 5 т, на завод $З_3$ – 20 т.

2. Задача о диете

Эта задача состоит в том, чтобы составить рацион питания так, чтобы была обеспечена потребность во всех ингредиентах питания, корм имелся в наличии и при этом стоимость питания была минимальной.

Рассмотрим на примере:

На животноводческой ферме производится откорм скота. Каждому животному надо ежедневно выдать не меньше 6 единиц вещества A, 8 единиц вещества B, 6 единиц вещества C. Для откорма животных можно закупить 2 вида кормов. Единица веса первого корма содержит 3 единицы вещества A, 2 единицы вещества B, единицу вещества C. Единица веса второго корма содержит 1 единицу вещества A, 2 единицы вещества B, 3 единицы вещества C. Стоимость единицы веса первого корма – 30 руб., второго корма – 20 руб.

Составить рацион питания, при котором была бы обеспечена суточная потребность в веществах А, В, С и стоимость питания была бы наименьшей.

Решение:
Составим таблицу:

Вещества	Норма	Количество единиц	
		1	2
А	6	3	1
В	8	2	2
С	6	1	3
Стоимость единицы веса		30 руб.	20 руб.

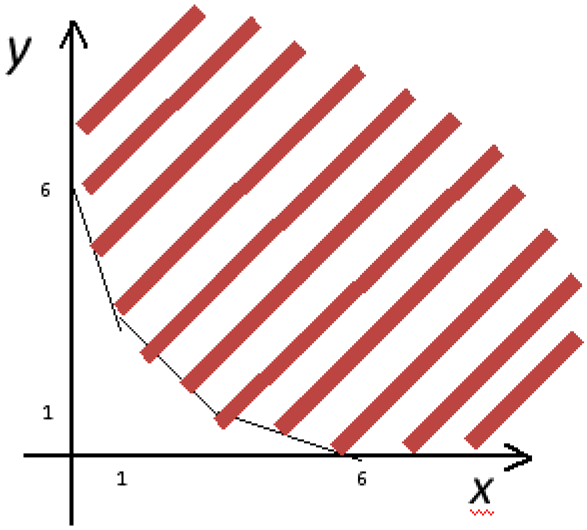
Составим математическую модель задачи.
Пусть первого корма будет взято х единиц, а второго – у единиц.
Тогда вещества А в них содержится (3х + у), вещества В – (2х + 2 у), а вещества С – (х + 3у).
Составим допустимое множество. Оно удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ 2x + 2y \geq 8 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \geq 6 - 3x \\ y \geq 4 - x \\ y \geq 2 - \dfrac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Функция стоимости питания имеет вид:

$$S(x;y) = 30x + 20y.$$

В прямоугольной системе координат ХОУ проведём граничные прямые, уравнения которых получаются при замене в ограничениях знаков неравенств на равенства. Подставляя координаты точки (0;0) в неравенства видим, что начало координат им не удовлетворяет и, следовательно, не входит в допустимое множество. Поэтому штриховки направлены выше и правее граничных прямых.



Вычислим значение функции S(x;y) в вершинах многоугольной области:

A(0:6): S(0;6) = 30 · 0 + 20 ·6 = 120

B(1;3): S(1;3) = 30 · 1 + 20 · 3 = 90

C(3;1): S(3;1) = 30 · 3 + 20 · 1 = 110

D(6;0): S(6;0) = 30 · 6 + 20 ·0 = 180

Наименьшее значение функции S(x;y) достигается в вершине B(1;3).

Ответ: первого корма нужно брать по 1 единицы, а второго корма по 3 единицы.

- Составим алгоритм геометрического способа решения стандартных задач ЛП с 2-мя переменными:

1. Изображается многоугольник (допустимые множества) как пересечение полуплоскостей, являющихся решениями соответствующих неравенств в прямоугольной системе координат.
2. Находим координаты вершин построенного многоугольника.
3. Вычисляем значение составленной функции для нахождения наибольшего или наименьшего значений.
4. Сравниваем значения функции и записываем ответ.

- Другие случаи:

<u>Бесконечное множество допустимых значений.</u>

На рис.1 целевая функция принимает одно и то же максимальное значение в любой точке отрезка AB.

<u>Отсутствие ограниченного решения.</u>

На рис.2 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве планов и решение задачи на максимум не существует. При этом решение задачи на минимум может существовать, (как в задаче о кормах).

Отсутствие допустимых значений.

На рис.3 области, допустимые по каждому из ограничений, не имеют общих точек. В этом случае говорят, что ограничения несовместны, множество допустимых значений пусто и задача ЛП решения не имеет.

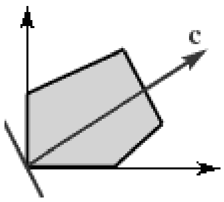


Рис.1

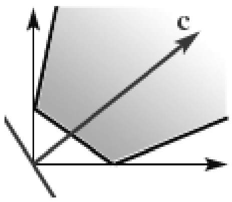


Рис.2

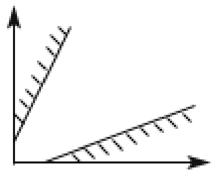


Рис.3

- **Заключение:**

Мною был изучен геометрический симплекс метод решения задач ЛП.
В работе не рассмотрен способ с помощью линии уровня (график целевой функции). Для этого строится целевой вектор и перпендикулярно к нему проводятся несколько прямых на множестве допустимых значений. Линию уровня перемещают перпендикулярно вектору в направлении возрастания целевой функции, если надо найти наибольшее значение и в противоположном направлении, если надо найти наименьшее значение. (Этот способ удобен для многоугольников с большим количеством вершин, чтобы «не перебирать» все вершины).
Были исследованы 2 задачи ЛП с 2-мя переменными.
Разработан алгоритм решения задач ЛП геометрическим способом.
Выдвинутая гипотеза подтвердилась. Знания школьной программы позволяют мне решать задачи ЛП с 2-мя переменными изученным методом.
Алгебраический способ симплекс метода решения задач ЛП с переменными более двух предстоит мне изучить в вузе.

- **Список используемой литературы:**

1. Методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2016 года. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом. Москва. 2016
2. «Приложения элементарной математики». Программа факультативного курса для X-XI классов. Мартюшева Н.Н., 1998г.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
4. www.kazedu.kz
5. https://superbotanik.net/referati/referaty-po-ekonomiko-matematicheskomu-modelirovaniyu/referat-graficheskij-metod-i-simpleks-metod-resheniya-zadach-linejnogo-programmirovaniya