

Департамент образования администрации г. Перми

МБОУ «Лицей №1» г. Перми

Математическое моделирование полета с помощью *Jetwing*

Выполнили:

Есина Екатерина Андреевна, 201 кл.

Чечеткин Макар Владимирович, 202 кл.

Руководитель учебно-исследовательской работы:

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП ПНИПУ

Волегов Павел Сергеевич

Пермь, 2018

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи.....	6
Глава 2. Математическая постановка задачи.....	9
Глава 3. Результаты моделирования	13
Заключение	17
Список литературы	18

Введение

Испокон веков люди мечтали научиться летать подобно птицам в небе, но попытки подражания часто оборачивались трагедией. Греческая мифология оплакивает растаявшие мечты Икара [1]. Арабская поэзия повествует о крушении изобретателя Аббаса ибн Фирнаса, жившего в IX веке [2]. В средние века английский монах Эйлмер остался калекой, прыгнув со стены аббатства на самодельных крыльях [3]. Но с развитием технологий мечта об управляемом полете стала, кажется, почти реальностью.

В современном мире существуют разнообразные модели самолетов, благодаря которым людям удается достаточно быстро преодолевать большие расстояния и исследовать воздушное пространство. Но человек не останавливается на достигнутом и продолжает изобретать и совершенствовать воздушные средства передвижения.

Ив Росси, швейцарский летчик и изобретатель, в 2004 году предложил совершенно новый тип летательного аппарата – *Jetwing*, основными компонентами которого являются крылья из углеродного волокна и четыре небольших турбореактивных двигателя, разработанные и произведенные всемирно известной германской компанией *Jet-Cat*. Двигатели созданы из алюминия и инконеля, что позволило повысить прочность при высоких температурах. Защита двигателя создана из пуленепробиваемого кевлара, а пилоны выполнены из алюминия для облегчения конструкции [4]. В качестве топлива на этапе испытаний применялись различные смеси, однако, в настоящее время используется керосин с турбинным маслом. Такая смесь позволила увеличить время полета с 6 до 10 минут [5]. Также для полета используются инструменты для измерения времени и высоты, посадочный, запасной парашюты и специальный парашют для крыльев, который обеспечивает мягкое приземление в случае их сбрасывания [6].

Одной из особенностей проекта является полное отсутствие механизации крыла. Управление летательным аппаратом осуществляется за

счет смещения центра масс пилота относительно оси симметрии конструкции, однако в отличие от дельтаплана, где пилот может перемещаться под плоскостью крыла, в реактивном *Jetwing* Росси крыло жестко закреплено на спине, и пилот управляет полетом, лишь двигая разными частями тела (руками, ногами, спиной, плечами и головой). При этом достигается маневренность достаточная для выполнения фигур пилотажа различной сложности [7]. В дальнейшем под термином «*Jetman*» будем понимать описанную выше конструкцию и пилота, управляющего ее движением.

Существенный недостаток летательного аппарата заключается в том, что конструкция не предусматривает взлет с земли – на нужную для старта высоту *Jetman* поднимается на самолете, вертолете или воздушном шаре.

Из-за того, что натурные эксперименты по изучению возможностей *Jetwing* являются дорогостоящими и опасными для жизни, необходимо использовать иные методы изучения поведения *Jetman* в реальных условиях; в качестве такой методологии удобно выбрать математическое и/или компьютерное моделирование. Методы математического моделирования позволяют исследовать ситуации или сценарии, которые не могут быть изучены другими методами. Под моделью, следуя общепринятому определению, будем понимать материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты [8].

Таким образом, **целью работы** является разработка, численная реализация, исследование математической модели движения *Jetman*, которая позволяла бы определять положение тела в любой момент времени, а также была пригодна для исследования характера движения в зависимости от параметров полета.

В результате работы (исследования) **модель должна позволять:**

- описывать направление смещения центра масс, необходимое для достижения заданной траектории;
- оценивать устойчивость полета в зависимости от параметров модели;
- делать выводы о способности *Jetman* выполнять фигуры высшего пилотажа;
- описывать полет при экстремальных условиях.

Для достижения цели, необходимо решить следующие **задачи** работы:

- 1) рассмотреть основную задачу механики для *Jetman* в трехмерной постановке;
- 2) определить перечень и направление сил, действующих на *Jetman* в процессе полета;
- 3) получить уравнения движения *Jetman*, и исследовать их решения при изменении различных параметров;
- 4) определить значения параметров модели, соответствующих реальному объекту;
- 5) проверить адекватность модели при принятых гипотезах;
- 6) исследовать поведение модели при различных ситуациях: полете в зоне турбулентности, отказе одного или нескольких двигателей, выполнении фигур высшего пилотажа и т.д.

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Сформулируем основные гипотезы исследования. **Объектом моделирования** является совокупность *Jetwing* и человека, называемая *Jetman*; основные параметры *Jetman* перечислены в табл. 1.

Таблица 1. Технические характеристики *Jetman*

Параметр, единица измерения		Значение
Общая масса (кг)		150
Масса крыльев (кг)		55
Размах крыла (м)		2
Количество двигателей		4
Тяга двигателя (Н)	вхолостую	14
	в режиме форсажа	397
Максимальная скорость (км/ч)		300
Объем топлива (л)		30
Максимальная высота (м)		10 000
Продолжительность полета с полной заправкой (мин)		10

Для построения модели выделим наиболее существенные факторы и сформулируем совокупность гипотез об объекте моделирования и внешних условиях:

- 1) *Jetman* представляет собой совокупность крыльев и человека, причем крыло будет считаться абсолютно твердым телом;
- 2) человека будем считать материальной точкой постоянной массой M , положение которой совпадает с центром масс человека и может смещаться относительно плоскости крыльев только в двух направлениях: перпендикулярно оси OX и OY (рис. 1);
- 3) масса крыльев считается переменной из-за расхода топлива;
- 4) поскольку скорость *Jetman* много меньше скорости света, его движение описывается законами классической механики Ньютона;
- 5) движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g , т.к. высота полета много меньше радиуса Земли;

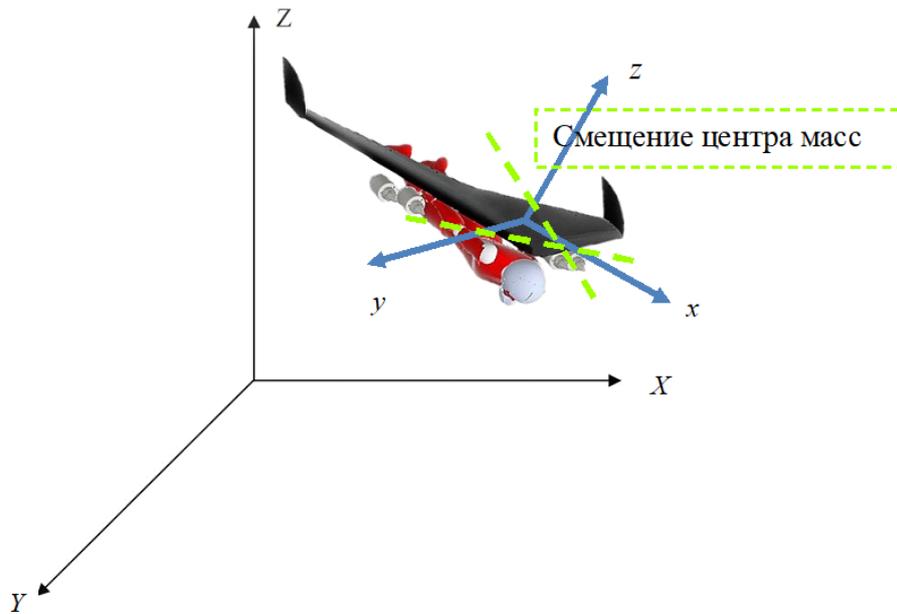


Рис 1. Положение *Jetman* в произвольный момент времени

- б) система отсчета, относительно которой рассматривается движение, инерциальная и связана с поверхностью Земли;
- 7) в процессе движения на *Jetman* действуют следующие силы (рис. 2, а):
- а) две силы тяжести $m\vec{g}$, которые приложены к крыльям и не меняют точку приложения, но меняются по модулю;
 - б) сила тяжести $M\vec{g}$ не изменяется по модулю, точка ее приложения совпадает с центром масс человека и может меняться относительно крыльев;
 - в) силы сопротивления $\vec{F}_{сопр}$ равномерно распределены по длине крыла (рис. 2, б) и в модели приведены к двум результирующим точечным силам, приложенным к середине каждого крыла и направленным вдоль оси симметрии *Jetman* (рис. 2, в);
 - г) Сила сопротивления на человека $\vec{F}_{сопр2}$ направлена вдоль оси симметрии *Jetman*, противоположно вектору скорости;
 - д) подъемные силы $\vec{F}_{под}$ приложены к середине каждого крыла и направлены вверх перпендикулярно плоскости крыла;

f) силы тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$ действуют со стороны двигателя, направлены вдоль оси симметрии крыла;

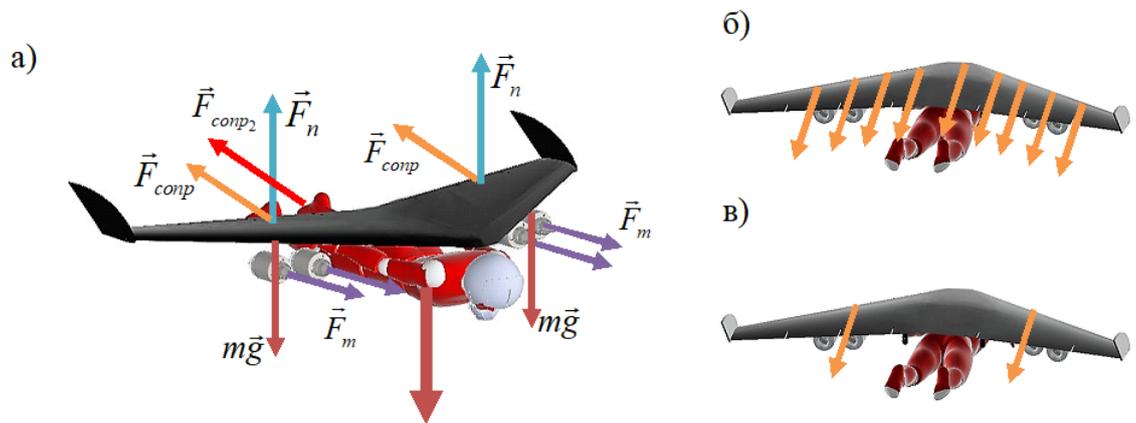


Рис.2. Силы, действующие на *Jetman*

8) положение *Jetman* описывается пятью внешними степенями свободы: тремя поступательными относительно осей OX , OY , OZ внешней системы координат (рис. 1), двумя вращательными вокруг осей OX и OY внешней системы координат (рис. 3), а также двумя внутренними: смещениями центра масс пилота в направлениях «вправо – влево» и «вперед – назад».

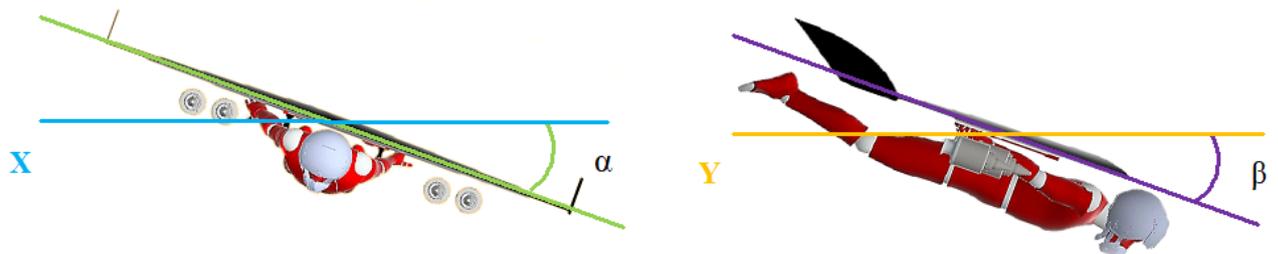


Рис. 3. Вращательные степени свободы *Jetman*

Глава 2. Математическая постановка задачи

Сформулируем уравнения, описывающие движение *Jetman* в любой момент времени. Для этого запишем второй закон Ньютона для объекта исследования в векторном виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{равн}}. \quad (1)$$

Преобразуем левую часть соотношения (1):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \mu\vec{v} + m\vec{a}, \quad (2)$$

где μ , кг/с – скорость расхода топлива.

Подставим в (1) внешние силы, действующие на *Jetman*:

$$(M + m_0 - \mu t)\vec{a} = (m_0 - \mu t)\vec{g} + M\vec{g} + 2\vec{F}_{\text{сопр}_1} + \vec{F}_{\text{сопр}_2} + 4\vec{F}_{\text{тяги}} + 2\vec{F}_{\text{под}} - \mu\vec{v}, \quad (3)$$

где M – масса человека, m_0 – начальная масса конструкции (с учетом топлива), $F_{\text{сопр}_1}$ – сила лобового сопротивления, действующая на крыло, $F_{\text{сопр}_2}$ – сила лобового сопротивления, действующая на человека, $F_{\text{тяги}}$ – сила тяги двигателя, $F_{\text{под}}$ – подъемная сила.

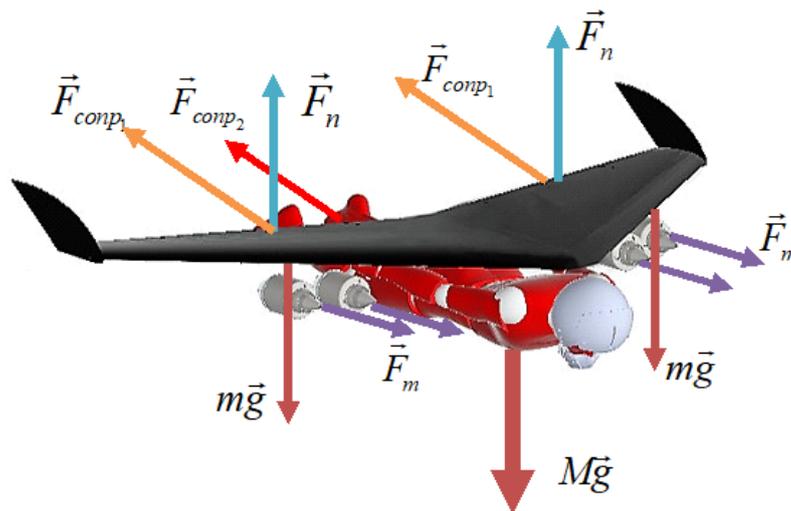


Рис. 4. Силы, действующие на *Jetman*

В дифференциальном виде в проекциях на оси координат уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
x''(t)(M + m_0 - \mu t) &= 4F_{\text{мяз}} \cos[\alpha(t)] + 2F_{\text{нод}} \sin[\alpha(t)] - \\
&- (2F_{\text{соп}_1} + F_{\text{соп}_2}) \cos[\alpha(t)] - x'(t)\mu, \\
y''(t)(M + m_0 - \mu t) &= 2F_{\text{нод}} \sin[\beta(t)] - y'(t)\mu, \\
z''(t)(M + m_0 - \mu t) &= -(m_0 - \mu t)g - Mg + 2F_{\text{нод}} \cos[\alpha(t)] \cos[\beta(t)] + \\
&+ (2F_{\text{соп}_1} + F_{\text{соп}_2}) \sin[\alpha(t)] - 4F_{\text{мяз}} \sin[\alpha(t)] - z'(t)\mu,
\end{aligned} \tag{4}$$

где α и β – углы отклонения *Jetman* относительно осей OX и OY соответственно; эти углы также являются функциями времени (рис. 5).

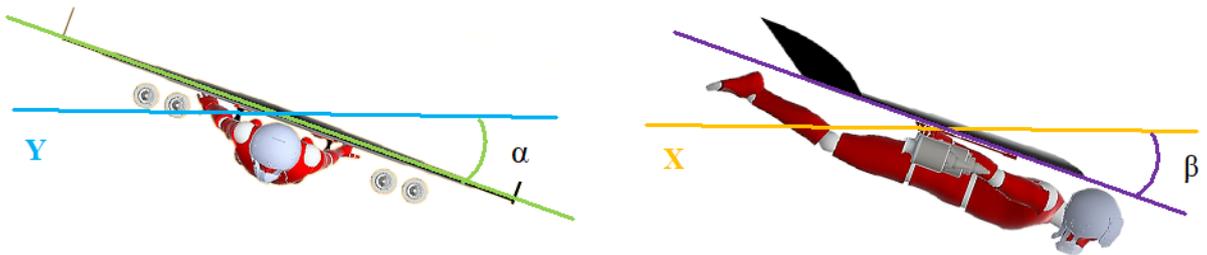


Рис. 5. Углы отклонения *Jetman* относительно осей координат

В литературе можно встретить следующее выражение для подъёмной силы [9]:

$$F_{\text{нод}} = C_y \rho V_x^2 S, \tag{5}$$

где V_x^2 – проекция скорости на ось OX, C_y – коэффициент подъёмной силы (некоторая константа), S – площадь поверхности крыла, ρ – плотность воздуха.

Силу лобового сопротивления будем определять следующим образом [10]:

$$F_{\text{соп}} = \frac{1}{2} S \rho C u^2, \tag{6}$$

где S – площадь сечения тела, перпендикулярного направлению потока, ρ – плотность газа, u – скорость движения тела относительно потока газа (по закону сложения скоростей: $\vec{u} = \vec{V} - \vec{V}_{\text{ветра}}$), C – безразмерный коэффициент

лобового сопротивления, зависящий только от формы тела (для эллипсоида принимает значения от 0,05 до 0,1).

Поскольку движение *Jetman* рассматривается как движение твердого тела в пространстве, то для полного описания полета также необходимо рассмотреть возможные вращения относительно двух взаимно перпендикулярных осей (рис. 6).

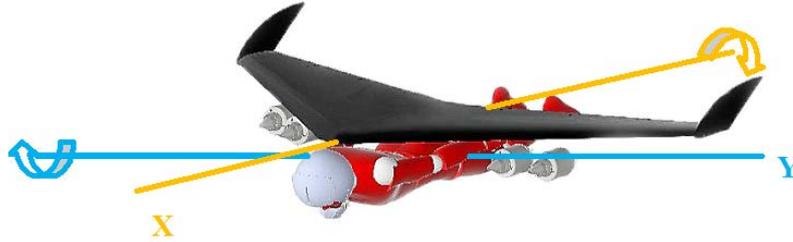


Рис 6. Вращения *Jetman* относительно осей координат

Запишем уравнения моментов для *Jetman* в дифференциальном виде:

$$\begin{aligned} \alpha''(t)I_x &= -Mgd_1 \cos[\beta(t)], \\ \beta''(t)I_y &= Mgd_2 \cos[\alpha(t)], \end{aligned} \quad (7)$$

где d_1 и d_2 – смещения центра масс вдоль плоскости крыла (в направлениях «вперед» и «вбок» соответственно), I_x и I_y – моменты инерции относительно ОХ и ОУ:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{M}{5} 2R_{чел}^2 + \frac{m_0 - \mu t}{5} (b^2 + c^2), \\ I_y &= \frac{M}{5} (L_{чел}^2 + R_{чел}^2) + \frac{m_0 - \mu t}{5} (a^2 + c^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $R_{чел}$ – радиус поперечного сечения человека, $L_{чел}$ – его длина, a – средняя ширина крыла, b – размах крыльев, c – толщина крыльев (рис. 7).

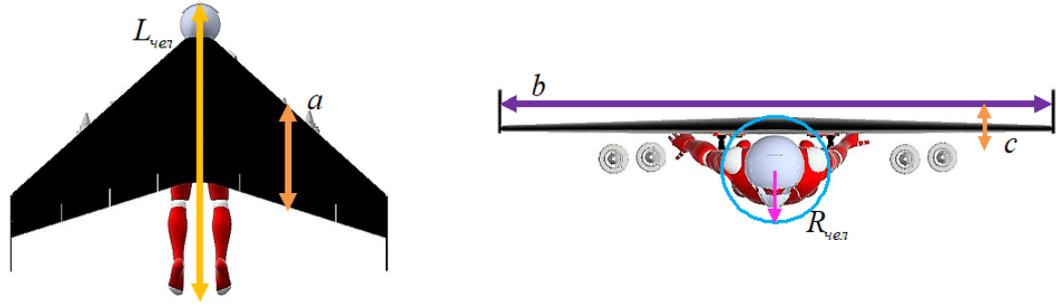


Рис. 7. Геометрия *Jetman*

Для однозначного решения дифференциальных уравнений второго порядка относительно зависимостей $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ систему уравнений необходимо снабдить начальными условиями: $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$, $\alpha(0)$, $\beta(0)$, $x'(0)$, $y'(0)$, $z'(0)$, $\alpha'(0)$, $\beta'(0)$.

Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t)(M + m_0 - \mu t) = 4F_{\text{мяс}} \cos[\alpha(t)] + 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \sin[\alpha(t)] - \\ - \frac{1}{2}(S_{\text{кр}2} \rho C V_x^2 + S_{\text{чел}} \rho C V_x^2) \cos[\alpha(t)] - x'(t)\mu, \\ y''(t)(M + m_0 - \mu t) = 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \sin[\beta(t)] - y'(t)\mu, \\ z''(t)(M + m_0 - \mu t) = -(m_0 - \mu t)g + 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \cos[\alpha(t)] \cos[\beta(t)] + \\ + \frac{1}{2}(S_{\text{кр}3} \rho C V_x^2 + S_{\text{чел}} \rho C V_x^2) \sin[\alpha(t)] - 4F_{\text{мяс}} \sin[\alpha(t)] - z'(t)\mu, \\ \alpha''(t)\left(\frac{M}{5} 2R_{\text{чел}}^2 + \frac{m_0 - \mu t}{5}\right)(b^2 + c^2) = -Mgd_1 \cos[\alpha(t)], \\ \beta''(t)\left(\frac{M}{5} (L_{\text{чел}}^2 + R_{\text{чел}}^2) + \frac{m_0 - \mu t}{5}\right)(a^2 + c^2) = Mgd_2 \cos[\beta(t)]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Глава 3. Результаты моделирования

При решении системы уравнений (9) были получены зависимости координат, скорости, ускорений от времени и траектории полета *Jetman* при различных начальных условиях.

Для проверки адекватности модели был проведен численный эксперимент, в котором имитированы условия равномерного полета на постоянной высоте. Для этого в качестве начальных условий использовались значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2. Начальные условия

$x(0),$ <i>м</i>	$y(0),$ <i>м</i>	$z(0),$ <i>м</i>	$\alpha(0)$	$\beta(0)$	$x'(0),$ <i>м/с</i>	$y'(0),$ <i>м/с</i>	$z'(0),$ <i>м/с</i>	$\alpha'(0)$	$\beta'(0)$
0	0	10 000	0	0	200	0	0	0	0

На рис. 8 приведена зависимость скорости от времени, по которой можно сделать вывод, что движение является равномерным.

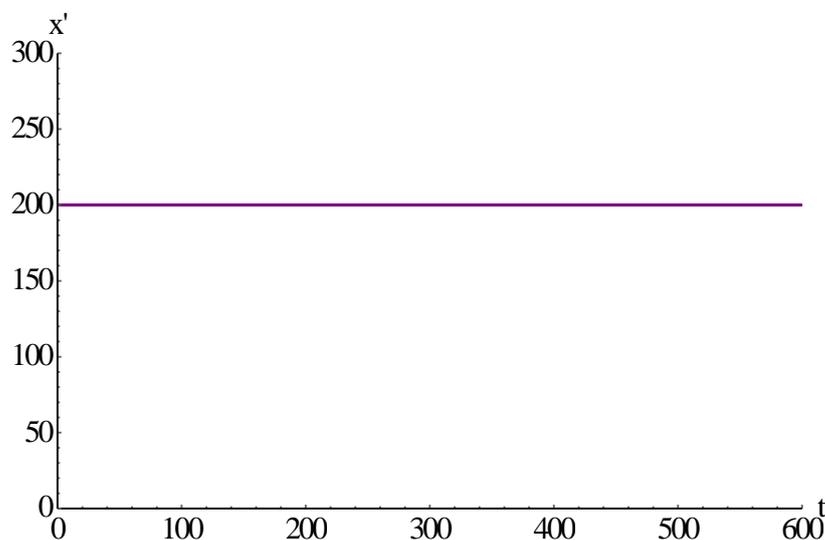


Рис 8. График зависимости скорости от времени

На рис. 9 приведена зависимость высоты полета от времени, по которой можно сделать вывод, что движение является прямолинейным.

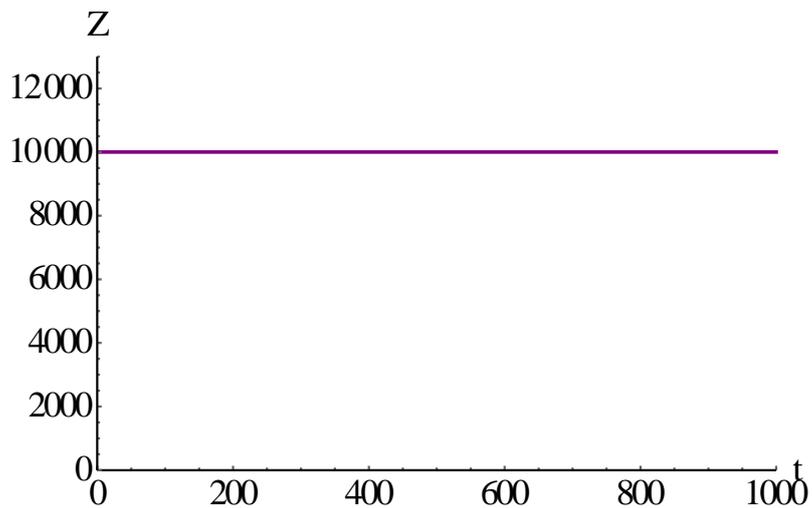


Рис 9. График зависимости высоты полета от времени

Анализируя рис. 8 и 9, можно сделать вывод, что модель адекватна, т.к. графики зависимостей $z(t)$ и $x'(t)$ соответствуют графикам равномерного прямолинейного движения.

Если учитывать расход топлива ($\mu \neq 0$), то *Jetman* со временем будет плавно снижаться (рис. 10).

На рис. 11–13 приведены траектории полета при смещении центра масс пилота относительно крыльев, соответственно, вперед, влево и в двух направлениях одновременно. Видно, что, изменяя положение тела относительно крыла, пилот может управлять положением *Jetman* в пространстве.

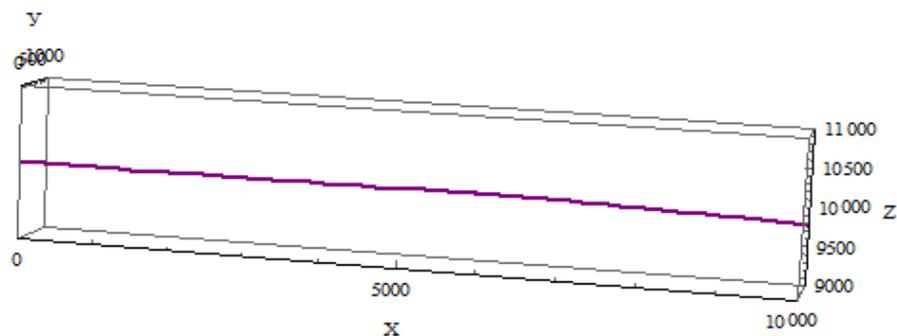


Рис. 10. Траектория Jetman при расходе топлива

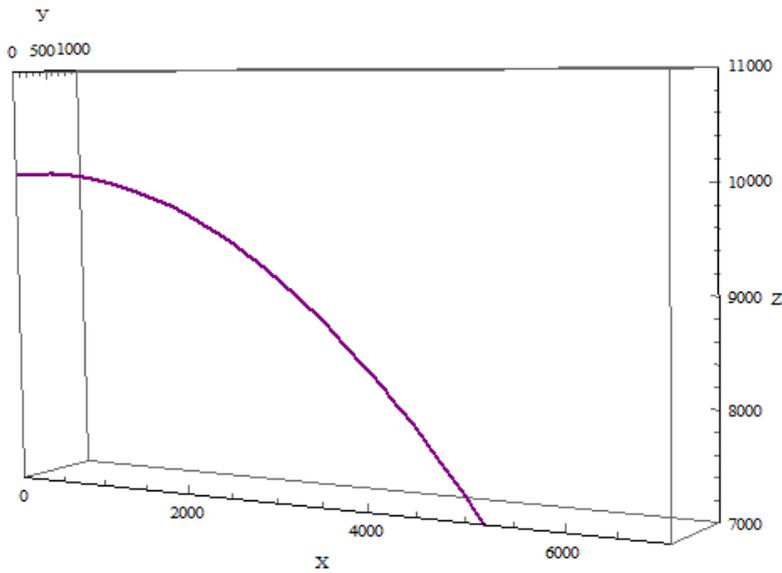


Рис. 11. Траектория при смещении центра масс вперед

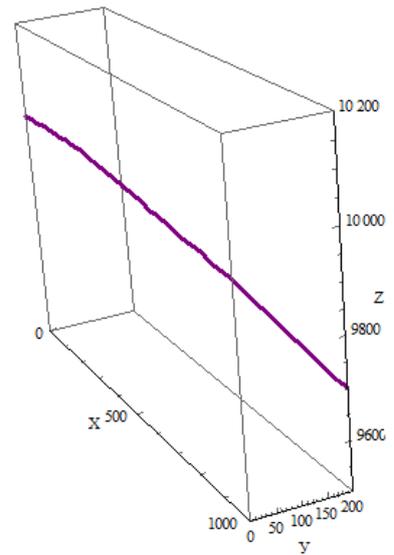


Рис. 12. Траектория при смещении центра масс влево

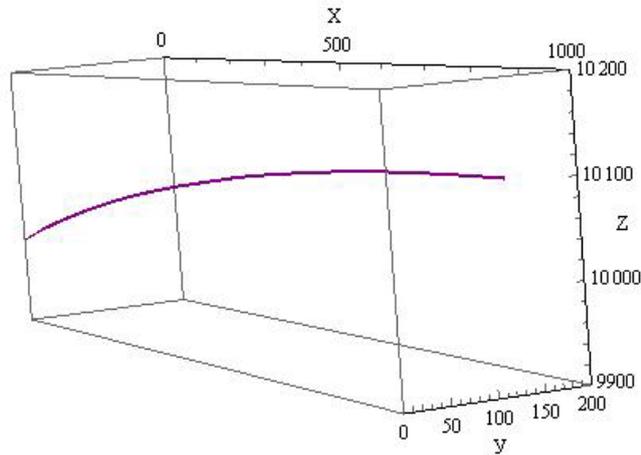


Рис. 13 Траектория при одновременном смещении центра масс

Довольно опасной является ситуация отказа одного двигателя во время полета. При таком сценарии появляется избыточный момент силы тяги и уравнения движения приобретают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x''(t)(M + m_0 - \mu t) = 3F_{\text{мяз}} \cos[\alpha(t)] + 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \sin[\alpha(t)] - \\
- \frac{1}{2}(S_{\text{кр}2} \rho C V_x^2 + S_{\text{цел}} \rho C V_x^2) \cos[\alpha(t)] - x'(t)\mu, \\
y''(t)(M + m_0 - \mu t) = 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \sin[\beta(t)] - y'(t)\mu, \\
z''(t)(M + m_0 - \mu t) = -(m_0 - \mu t)g + 2C_y \frac{\rho V_x^2 S_{\text{кр}1}}{2} \cos[\alpha(t)] \cos[\beta(t)] + \\
+ \frac{1}{2}(S_{\text{кр}3} \rho C V_x^2 + S_{\text{цел}} \rho C V_x^2) \sin[\alpha(t)] - 3F_{\text{мяз}} \sin[\alpha(t)] - z'(t)\mu, \\
\alpha''(t) \left(\frac{M}{5} 2R_{\text{цел}}^2 + \frac{m_0 - \mu t}{5} \right) (b^2 + c^2) = -Mgd_1 \cos[\alpha(t)], \\
\beta''(t) \left(\frac{M}{5} (L_{\text{цел}}^2 + R_{\text{цел}}^2) + \frac{m_0 - \mu t}{5} \right) (a^2 + c^2) = Mgd_2 \cos[\beta(t)] + \\
+ F_{\text{мяз}} \cos[\alpha(t)] \cos[\beta(t)].
\end{array} \right. \quad (10)$$

В такой ситуации *Jetman* начнет закручиваться и снижаться (рис. 14), а для выравнивания траектории пилоту необходимо сместить свое положение в направлении, перпендикулярном скорости движения (то есть в сторону).

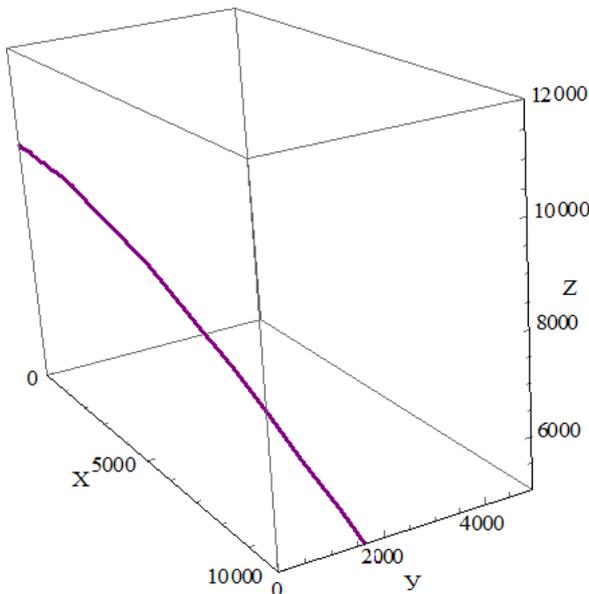


Рис. 14. Траектория движения при отказе двигателя

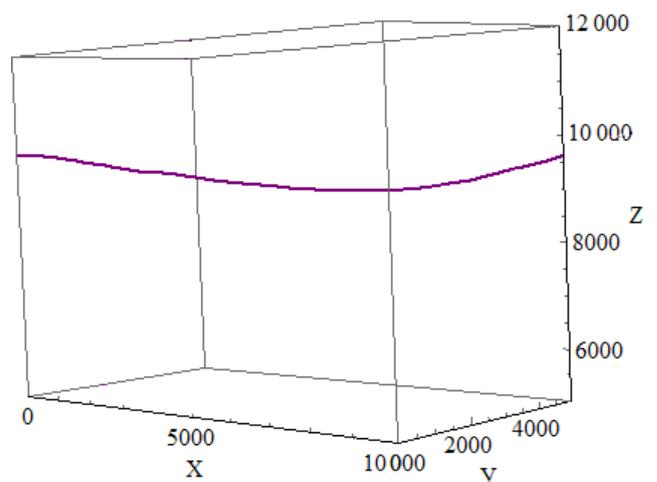


Рис. 15. Выравнивание траектории полета

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены вопросы, связанные с описанием движения *Jetman*. Сформулированы основные гипотезы постановки задачи моделирования, записана система дифференциальных уравнений, описывающих положение *Jetman* в любой момент времени. Построенную модель можно считать адекватной, так как полученные зависимости скоростей, координат и ускорений совпадают с реальными данными. Полученные результаты могут быть применены в разработке новых или усовершенствованных моделей персональных летательных аппаратов.

Список литературы

1. Нейхардт А. А. Легенды и сказания Древней Греции и Древнего Рима. – М.: Просвещение, 1990. – 40 с.
2. P. Bearman, C.E. Bosworth. Encyclopedia of Islam. – L.: E. J. Brill, 1936. – 35 с.
3. Robert Lacey. Great tales from English history. – L.: Hachette Book Group, 2003. – 221 с.
4. Ашихмин В.Н. и др. Под ред. Трусова П.В. Введение в математическое моделирование. – М.: Учебное пособие, Интернет Инжиниринг, 2000. – 336 с.
5. Официальный сайт JetMan [Электронный ресурс] – URL: <http://www.jetman.com/>
6. Интервью с Jetman [Электронный ресурс] – URL: http://json.tv/tech_trend_find/intervyu-s-jetman-20160412081111
7. Fly with Jetman [Электронный ресурс] – URL: https://www.ted.com/talks/yves_rossy_fly_with_the_jetman/transcript
8. JETCAT ENGINES [Электронный ресурс] – URL: <http://www.dreamworksrc.com/catalog/Jetcat-Engines>
9. "Jet Man" Crosses English Channel Like a Human Rocket [Электронный ресурс] – URL: <http://news.nationalgeographic.com/news/2008/09/080926-jet-man-english-channel.html>
10. Физика. Большой энциклопедический словарь.- М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 90, 460 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1986 – 736 с.