Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников по политехническим, естественнонаучным, математическим дисциплинам для учащихся 9-11 классов

Направление: математика

Кубические уравнения от простого к сложному

Гальская Ольга Алексеевна, 10 класс
МБОУ «Ильинская СОШ№1»,
Ильинский район

Самохина Наталья Александровна, учитель математики высшей квалификационной категории МБОУ «Ильинская СОШ№1»,

Пермь 2018

Оглавление

Введение

Актуальность. Практически всё, что окружает человека так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Множество различных алгебраических и геометрических задач сводятся к какому-либо уравнению. Линейные уравнения мы знаем с самых ранних лет, с начальной школы. С квадратными знакомимся в 8 классе, а вот кубические уравнения решаем в старших классах, делаем это обычно графическим способом или методом разложения на множители.

Проблема: Отсутствие навыков решения уравнений высших степеней вызывает затруднение при подготовке к итоговой аттестации на профильном уровне.

Объект: Кубическое уравнение

Предмет исследования: Способы решения кубических уравнений.

Гипотеза: Существует связь между коэффициентами кубического уравнения и его корнями, при решении таких уравнений можно применять разнообразные способы.

Цель: Изучение способов решения кубических уравнений.

Задачи:

1.Подобрать необходимую литературу;

2.Отобрать материал для исследования, выбрать главную, интересную, понятную информацию;

3.Проанализировать и систематизировать полученную информацию;

4.Найти различные методы и приёмы решения кубических уравнений;

5.Классифицировать исследуемые уравнения;

6.Сравнить степень сложности каждого из них;

7.Познакомить одноклассников со способами решения уравнений;

8.Создать электронную презентацию работы для представления собранного материала.

Методы исследования:

-Изучение литературных и Интернет-ресурсов;

-Анализ и классификация информации;

-Сравнение способов решения;

-Обобщение.

Структура работы: Работа состоит из трёх глав. Первая глава-страница истории. Вторая-азбука кубического уравнения. В третьей главе рассмотрены различные приёмы решения кубических уравнений.

Глава 1.Страница истории

Решение алгебраических уравнений с одни неизвестным представляет собой одну из труднейших и древнейших математических задач. Этими задачами занимались самые выдающиеся математики древности.

Первые упоминания об уравнениях и решении линейных уравнений появились с начала II тысячелетия до н.э. в Древнем Вавилоне.

В Древней Греции уравнения решались при помощи геометрической фигуры. Числа отождествлялись с длинами отрезков. Нахождение неизвестной величины означало построение искомого отрезка.

С VI века в средневековой Индии и Китае, в странах Арабского Востока появляются решения квадратных уравнений.

В развитии алгебры уравнений велика роль французского математика и юриста **Ф. Виета** (1540-1603). Особое значение имеет установление им зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.

В XVI веке изучение алгебры началось в Западной Европе. Первым крупным достижением западноевропейских учёных было открытие формулы для решения кубических уравнений. Это было заслугой итальянских учёных алгебраистов **Никколо Тарталья** (1499-1557), **Джироламо Кардано** (1501-1576) и Л.**Феррари** (1522-1565).

Французский матаматик **Этьен Безу** (1730-1783) сформулировал свою известную теорему о делении многочлена на линейный двучлен, позволяющий снизить степень алгебраических уравнений.

Английский математик **Уильям Джордж Горнер** (1786-1837). С его именем связана схема Горнера деления многочлена на двучлен.

В дальнейшем математики активно пытались найти формулы вычисления корней уравнений пятой и более степени. И только почти через три столетия впервые итальянский учёный **Паоло Руффини** (1765-1822), а затем норвежский математик **Нильс Хенрих Абель** (1802-1829) доказали, что не существует формулы, выражающей корни любого целого уравнения пятой степени через конечное число алгебраических операций над его коэффициентами. Поэтому в современной математике разработаны методы, позволяющие находить с любой степенью точности приближённые значения корней уравнений. Использование компьютеров значительно облегчают эту работу.

Глава 2. Азбука кубического уравнения

Уравнение вида $p_n(x) = 0$, где $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен степени n; $a_0, a_{1,} \ldots a_n -$ заданные действительные числа, $a_0 \neq 0$ называют **алгебраическим уравнением n-степени.**

При $n = 1$ уравнение – линейное, при $n = 2$ – квадратное уравнение.

Если $n > 2$, то уравнение $p_n(x) = 0$ называют **уравнением высшей степени.**

Решить уравнение- значит, найти все его корни или доказать , что уравнение не имеет корней.

Кубическое уравнение - алгебраическое уравнение третьей степени вида:$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0}$.

Если $a = 1$, то уравнение называют приведенным кубическим уравнением: $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Число $\boldsymbol{x}$ будет **корнем кубического уравнения** тогда, когда после его подстановки уравнение становится верным равенством. У каждого кубического уравнения с действительными коэффициентами будет по крайней мере один **действительный корень**, два других или тоже действительные, или будут комплексно сопряженной парой.

Для кубических уравнений тоже существует дискриминант, как и для квадратных уравнений, с помощью которого различаются три случая существования корней кубического уравнения, о котором речь пойдёт ниже.

Глава 3. Решение кубических уравнений

Рассмотрим виды кубических уравнений и приёмы их решения.

3.1.Двучленное кубическое уравнение

Двучленное кубическое уравнение имеет вид $ax^3 + b = 0$.

Это уравнение приводится к виду $x^3 + \frac{b}{a} = 0$ делением на коэффициент a,отличный от нуля. Далее применяется формула сокращенного умножения сумма кубов:

$$x^3 + \frac{b}{a} = 0, \qquad \left(x + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}x + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) = 0$$

Из первой скобки находим $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, а квадратный трехчлен

$x^2 - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}x + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ в области действительных чисел корней не имеет, т.к.

$$D = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} - 4\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = -3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} < 0.$$

Уравнение 1. Найти действительные корни уравнения $8x^3 - 3 = 0$

Решение: $8x^3 = 3, x^3 = \frac{3}{8}, x = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

3.2. Разложение на множители

1.Вынесение общего множителя за скобку.

Начнем с **простейшего** случая, когда свободный член $d = 0$. В этом случае, уравнение имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. Решается вынесением x за скобки. В скобках останется квадратный трехчлен, корни которого легко найти через дискриминант $x(ax^2 + bx + c) = 0$.

Уравнение 2. Найти действительные корни уравнения $3x^3 + 4x^2 + 2x = 0$.

Решение: $x(3x^2 + 4x + 2) = 0,\ x = 0$. Квадратный трехчлен $3x^2 + 4x + 2$ действительных корней не имеет, т.к. $D/_4 = 4 - 6 = -2 < 0$

Ответ: 0.

2.Применение формул сокращенного умножения.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

Уравнение 3. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Решение: Прибавим к обеим частям уравнения 2, получим:

$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 2, (x + 1)^3 = 2,\ x + 1 = \sqrt[3]{2},\ x = \sqrt[3]{2} - 1$

Ответ: $\sqrt[3]{2} - 1$.

3.Способ группировки.

Уравнение 4. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$

Решение: $x^2(x - 3) - (x - 3) = 0,\ (x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0,$

$x = -1;\ x = 1;\ x = 3.$

Ответ: $-1; 1; 3.$

3.3 Понижение степени уравнения

Способ основан на теореме Безу и делении многочленов.

Теорема Безу утверждает, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x - a$ равен $p(a)$.

Следствие из теоремы Безу: Если число a является корнем многочлена $p(x)$, то многочлен $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ делится без остатка на двучлен $x - a$.

Задача состоит в том, чтобы найти хотя бы один корень многочлена, потом разделить многочлен на $x - a$, где a - корень многочлена. В результате получим многочлен, степень которого на единицу меньше, чем степень исходного.

Задача распадается на две: *как найти корень многочлена, и как разделить многочлен на двучлен.*

Для этого можно использовать сдедующие утверждения:

Кубическое уравнение имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

Если сумма всех коэффициентов многочлена равна нулю, то число 1 является корнем многочлена.

Если сумма коэффициентов многочлена при четных степенях равна сумме коэффициентов при нечетных степенях, то число -1 является корнем многочлена. Свободный член считается коэффициентом при четной степени.

Если уравнение имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$ *, то для него будет выполнено:* d *делится нацело на* p, a *делится нацело на* q.

Итак, на первом этапе подбирается действительный корень кубического уравнения.

Уравнение 5. Решить уравнение $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

Решение: сумма всех коэффициентов многочлена равна 1-7+14-8=0, следовательно $x = 1$ корень уравнения. Значит, по теореме Безу, многочлен $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ делится без остатка на двучлен $x - 1$.

Способы деления могут быть разными, уголком или с помощью схемы Горнера.

Деление уголком

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^3 - 7x^2 + 14x - 8 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 - 6x + 8 \\
\quad -\,-6x^2 + 14x & \\
\quad \underline{-6x^2 + 6x} & \\
\qquad -\,8x - 8 & \\
\qquad \underline{8x - 8} & \\
\qquad \quad 0 &
\end{array}
$$

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 1)(x^2 - 6x + 8) = (x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0$

$x = 1, x = 2, x = 4.$

Ответ: 1; 2; 4.

Схема Горнера $\boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n =}$

$$\boldsymbol{= (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + \mathrm{P}(\alpha)}$$

$\boldsymbol{a_0}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	**…**	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_n}$
$\boldsymbol{b_0 = a_0}$	$\boldsymbol{b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_0}$	$\boldsymbol{b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1}$		$\boldsymbol{b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_{n-2}}$	остаток равен $\boldsymbol{a_n + \alpha \cdot b_{n-1}}$

корень	коэффициенты многочлена			
$\boldsymbol{\alpha}$	1	-7	14	–8
1	1	-7+1· 1= –6	14+1· (-6) = 8	–8+1·8=0

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x^2 - 6x + 8) = (x-1)(x-2)(x-4) = 0$

$x = 1, x = 2, x = 4.$

Ответ: 1; 2; 4.

Уравнение 6. Решить уравнение $2x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$

Решение: У данного уравнения коэффициенты целые числа, поэтому можно подбирать корень.

Делители свободного члена: –2;–1;1;2.

Делители старшего члена: –2;–1;1;2.

$\boldsymbol{a} = 2$, существуют рациональные корни.

Они находятся среди чисел :–1;–$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$;1. Подставляя по очереди каждое число в уравнение, убеждаемся, что x= $\frac{1}{2}$ – корень уравнения

$P(1) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = -2 - 5 + 2 + 2 \neq 0$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0 \;\; => \;\; x = \frac{1}{2} -$ корень

корень	коэффициенты многочлена

α	2	-5	-2	2
0,5	2	$-5+0{,}5\cdot 2$ $=-4$	$-2+0{,}5\cdot(-4)$ $=-4$	$2+0{,}5$ $\cdot(-4)=0$

$2x^3-5x^2-2x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x-4)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-2x-2)=$ $(2x-1)(x^2-2x-2)$

Корни: $x=\frac{1}{2}$; $x=1-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$.

Ответ: 0.5; $1\pm\sqrt{3}$.

Вывод: При решении кубических уравнений с помощью деления многочленов или схемы Горнера удается понизить степень уравнения - свести решение кубического уравнения к решению уравнений первой и второй степени.

3.4. Симметрические или возвратные уравнения

Уравнение вида $\boldsymbol{ax^3+bx^2+bx+a=0}$ называется возвратным или симметрическим, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны.

Левую часть уравнения можно разложить на множители:

$ax^3+bx^2+bx+a=a(x^3+1)+b(x^2+x)=a(x+1)(x^2-x+1)+$ $b(x+1)=(x+1)(ax^2+x(b-a)+a)$

Такое уравнение обязательно имеет корень $x=-1$, корни квадратного уравнения $ax^2+x(b-a)+a$, легко находятся через дискриминант.

Уравнение 7. Решить уравнение $5x^3-8x^2-8x+5=0$

Решение: $5(x^3+1)-8x(x+1)=0,\ 5(x+1)(x^2-x+1)-8x(x+1)=0$

$(x+1)(5x^2-5x+5-8x)=0,\ \ (x+1)(5x^2-13x+5)=0$

$x=-1,\ x=\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}$

Ответ: -1; $\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}$.

Уравнение 8. Решить уравнение $x^3+2x^2+2x+1=0$

Решение: У исходного уравнения обязательно есть корень $x = -1$, поэтому разделим $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ на $(x + 1)$ по схеме Горнера:

$\boldsymbol{\alpha}$	1	2	2	1
–1	1	$2 + (-1) \cdot 1 = 1$	$2 + (-1) \cdot 1 = 1$	$1 + (-1) \cdot 1 = 0$

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет корней.

Ответ: -1

Уравнение 9. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Делители свободного члена: ± 1.

$p(1) = 1 + 3 + 3 - 1 = 6 \neq 0$

$p(-1) = -1 + 3 - 3 - 1 = -2 \neq 0$.

Уравнение рациональных корней не имеет.

Для нахождения иррациональных корней выделим в левой части уравнения полный куб.

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 - 1 = 0$; $(x + 1)^3 = 2$; $x + 1 = \sqrt[3]{2}$, $x = \sqrt[3]{2} - 1$

Ответ: $\sqrt[3]{2} - 1$.

3.5 Метод неопределенных коэффициентов

Иногда разложение на множители не удается произвести простейшими средствами. В этом случае можно использовать метод неопределенных коэффициентов. Методом неопределенных коэффициентов называют метод, применяемый для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее известен.

Суть этого метода состоит в том, что заранее предполагается вид множителей - многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Этот метод опирается на следующие утверждения:

- *два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x;*

- *любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей.*

Уравнение 10: Решить уравнение $x^3-5x^2+7x-3=0$. Будем искать многочлены $x-a$ и bx^2+cx+d

Решение: $x^3-5x^2+7x-3=(x-a)(bx^2+cx+d)=$

$=bx^3-abx^2+cx^2-acx+dx-ad=bx^3-x^2(ab-c)-x(ac-d)-ad,$

$$\begin{cases} b=1 \\ ab-c=5 \\ ac-d=-7 \\ ad=3 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ a-c=5 \\ ac-d=-7 \\ ad=3 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ c=a-5 \\ d=\frac{3}{a} \\ a(a-5)-\frac{3}{a}=-7 \end{cases} \begin{cases} b=1 \\ a_1=3;\ a_2=1 \\ c_1=-2;\ c_2=-4 \\ d_1=1;d_2=3 \end{cases}$$

$x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x^2-2x+1)=0;\ x=3;\ x=1$ или

$x^3-5x^2+7x-3=(x-1)(x^2-4x+3)=0;\ x=3;\ x=1$

Ответ: 1; 3.

В математике существуют уравнения, для которых метод неопределенных коэффициентов является рациональным.

Уравнение 11. Найти все значения $a,$ при которых уравнение $2x^3-4x^2-8x+a=0$ имеет два различных корня.

Решение: если уравнение имеет корни, то его левую часть можно разложить на множители. Пусть A и B корни данного уравнения. Тогда левая часть уравнения будет иметь вид $2(x-A)^2(x-B)$. Раскроем скобки и сгруппируем подобные слагаемые при одинаковых степенях x.

$2x^3-4x^2-8x+a=2(x-A)^2(x-B)=2x^3-4Ax^2+2A^2x-2Bx^2+4ABx-2A^2B=\ 2x^3+(-4A-2B)x^2+(2A^2+4AB)x-2A^2B;$

Применим метод неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} x^3\ |\ 2=2 \\ x^2\ |\ -2B-4A=-4 \\ x^1\ |\ 4BA+2A^2=-8 \\ x^0\ |\ -2A^2B=a \end{cases} \begin{cases} B+2A=2; \\ 2BA+A^2=-4 \\ -2A^2B=a \end{cases} \begin{cases} B=2-2A \\ 2A(2-2A)+A^2=-4 \\ -2A^2B=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=2-2A \\ 3A^2-4A-4=0 \\ \end{cases}$$

$-2A^2B = a$

Из этой системы находим:

$A_1 = -\frac{2}{3}$; $A_2 = 2$, тогда $B_1 = 3\frac{1}{3}$; $B_2 = -2 \Rightarrow a_1 = -2\frac{26}{27}, a_2 = 16$.

Ответ: $a_1 = -2\frac{26}{27}$, $a_2 = 16$.

3.6 Теорема Виета для кубических уравнений

Из курса математики мы знаем данную теорему для квадратного уравнения, но ее используют и для решения уравнений высших степеней. Рассмотрим уравнение: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, разделим на $a \neq 0$.

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)(x - x_3)$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x - x_1x_2x_3$.

Правую часть уравнения преобразуем к виду

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1x^2 + x_2x^2 + x_3x^2) + (x_1x_2x + x_1x_3x + x_2x_3x) - x_1x_2x_3$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$;

отсюда следует, что можно записать в систему следующие

равенства: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b,}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$

Это теорема Виета для кубических уравнений.

Уравнение 12. Решить уравнение $x^3+x^2-4x-4=0$;

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{1}{1}=-1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{-4}{1}=-4 \\ x_1x_2x_3=-\frac{4}{1}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \\ x_3=-1 \end{cases}$$

Ответ: -2; -1; 2.

По теореме Виета корни кубического уравнения $x_1,\ x_2, x_3$ взаимосвязаны с коэффициентами a, b, c, d такими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b,}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}. \end{cases}$$

Деление выше приведенных тождеств друг на друга дает возможность сформулировать еще несколько верных соотношений:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d}, \quad d\neq 0,$$

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}=\frac{b}{d}, \quad d\neq 0.$$

Формулы Виета для приведенного квадратного уравнения x^2+px+q =0:

$x_1+x_2=-p; \quad x_1x_2=q.$

Если $x_1, x_2,\ x_3$ $-$ корни приведенногокубического уравнения

$x^3+px^2+qx+h=0$, то справедливы равенства

$x_1+x_2+x_3=-\text{p}$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$

$x_1x_2x_3=-h$

Доказательство: $x^3+px^2+qx+r\ =(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ =$ $(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2)(x-x_3)=\ x^3-x^2x_1-x^2x_2-xx_1x_2-x^2x_3+xx_1x_3+$ $xx_2x_3-x_1x_2x_3=x^3-x^2(x_1+x_2+x_3)+x(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3;$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=q \\ x_1x_2x_3=-r \end{cases}$$

Вывод: данный способ достаточно легок для понимания, так как теорема Виета знакома по школьной программе для квадратных уравнений и чтобы находить корни уравнений с помощью данной теоремы необходимо обладать хорошими вычислительными навыками.

3.7 Метод замены

Суть метода заключается в том, что путем замены некоторого выражения, входящего в уравнение и содержащего переменную, в исходном уравнении понижается степень, т.е. уравнение сводится к простейшему.

Уравнение 13. Решить уравнение $x^3 - 5x + 2\sqrt{3} = 0$.

Решение: Замена: $\boxed{x = t\sqrt{3}}$

Получим кубическое уравнение с целыми коэффициентами:

$$\left(\sqrt{3}t\right)^3 - 5t\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$3\sqrt{3}t^3 - 5t\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$3t^3 - 5t + 2 = 0$$

$$3t^3 - 3t - 2t + 2 = 0$$

$$3t(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0$$

$$(t - 1)(3t^2 + 3t - 2) = 0;\ t = 1, t = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$$

Обратная замена: $x = \sqrt{3}, x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{2}$;

Ответ: $\sqrt{3}$; $\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}$; $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}$.

Неполные кубические уравнения решаются подстановкой: $x = t + \frac{1}{t}$

Уравнение 14. Решить неполное кубическое уравнение $3x^3 - 9x - 10 = 0$

Решение: Замена: $\boxed{x = t + \frac{1}{t}}$

Получим: $3\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$

$$3\left(t^3 + 3t^2 \cdot \frac{1}{t} + 3 \cdot t \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$$3\left(t^3 + 3t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^3}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$3\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)+9\left(t+\frac{1}{t}\right)-9\left(t+\frac{1}{t}\right)-10=0$

$3t^6-10t^3+3=0$

Замена: $t^3=a$

$3a^2-10a+3=0;\ \ a=3, a=\frac{1}{3}$.

Обратная замена: $t^3=3$ или $t^3=\frac{1}{3}$, следовательно $t=\sqrt[3]{3},\ \ t=1/\sqrt[3]{3}$

Тогда $x=\sqrt[3]{3}+1/\sqrt[3]{3}$,

Ответ: $\sqrt[3]{3}+1/\sqrt[3]{3}$.

Вывод: при решении уравнений удачная замена переменных позволяет свести задачу к более простой.

При решении многих уравнений трудно угадать, какую новую переменную нужно ввести, чтобы упростить уравнение. Поэтому для некоторого класса уравнений вводится стандартная замена.

1. Если свободный член равен 1, то используется замена $x=\frac{1}{a}$

2. Подстановка $x=y-\frac{b}{3a}$ приводит кубическое уравнение к неполному кубическому уравнению вида $y^3-c=0$

Уравнение 15.

Решить уравнение: $21x^3+x^2-5x-1=0$.

Решение: Замена $\boxed{x=\frac{1}{a}}$

$$\frac{21}{a^3}+\frac{1}{a^2}-\frac{5}{a}-1=0$$

$$a^3+5a^2-a-21=0$$

Один из корней среди делителей свободного члена: $\pm1;\ \pm3;\ \pm7;\ \pm21$.

$$p(1)=1+5-1-21=-16\neq0$$

$$p(-1)=-1+5+1-21=-16\neq0$$

$$p(3) = 27 + 45 - 3 - 21 \neq 0$$

$$p(-3) = -27 + 45 + 3 - 21 = 0 => a = -3 \text{ корень}$$

корень	1	5	-1	-21
-3	1	$5 + (-3) \cdot 1 = 2$	$-1 + (-3) \cdot 2 = -7$	$-21 + (-3)(-7) = 0$

$$a^3 + 5a^2 - a - 21 = (a + 3)(a^2 + 2a - 7) = 0$$

$$a_1 = -3, \qquad a_2 = -1 + 2\sqrt{2}; \quad a_3 = -1 - 2\sqrt{2}$$

Обратная замена: $x = \frac{1}{a}$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{7} + \frac{1}{7}; \quad x_3 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7} = \frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{2}}{7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{2}}{7}$; $\frac{1}{7} + \frac{2\sqrt{2}}{7}$.

Уравнение 16.

Решить уравнение: $x^3 + 3x^2 + 3x - 9 = 0$.

Решение: $a = 1; b = 3; c = 3; d = -9$

Замена: $\boxed{x = y - \frac{b}{3a}}$

$$x = y - \frac{3}{3 \cdot 1} = y - 1.$$

Уравнение примет вид: $(y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 + 3(y - 1) - 9 = 0$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 + 3y - 3 - 9 = 0$$

$y^3 - 10 = 0$, $y = \sqrt[3]{10}$;

Обратная замена: $x = \sqrt[3]{10} - 1$

Ответ: $\sqrt[3]{10} - 1$.

Уравнение 17.

Решить уравнение: $x^3 + 6x^2 + 12x + 5 = 0$.

Решение: $a = 1;\ b = 6;\ c = 12;\ d = 5.$

Замена: $\boxed{x = y - \frac{b}{3a}}$

$$x = y - \frac{6}{3 \cdot 1} = y - 2.$$

Уравнение примет вид: $(y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 12(y-2) + 5 = 0$

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 12y - 24 + 5 = 0$$

$$y^3 - 3 = 0,\ \ y^3 = 3,\ \ y = \sqrt[3]{3}$$

Обратная замена: $x = \sqrt[3]{3} - 2.$

Ответ: $\sqrt[3]{3} - 2$

3.8 Формула Кардано

В случае, когда кубическое уравнение не имеет рациональных корней, применяется формула Кардано, которая была открыта в 16 веке итальянским математиком Джироламо Кардано.

Все корни кубического уравнения можно найти по формуле Кардано.

Вывод формулы Кардано состоит из двух этапов.

На первом этапе кубическое уравнение вида $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$ где a_0, a_1, a_2, a_3 - произвольные числа, $a_0 \neq 0$ приводится к кубическому уравнению, у которого отсутствует член со второй степенью неизвестного. Такие кубические уравнения называют трехчленными кубическими уравнениями.

На втором этапе трехчленные кубические уравнения решаются при помощи сведения их к квадратным уравнениям.

Первый этап. Приведение кубических уравнений к трехчленному виду.

Разделим уравнение $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ на старший коэффициент a_0. Тогда оно примет вид $x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$ где $a, b, c -$действительные числа; заменим переменную xна новую переменную y по формуле $\boldsymbol{x = y - \frac{a}{3}}$.

Получим: $x^3 + ax^2 + bx + c = \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c =$

$=y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot \frac{a}{3} + 3 \cdot y \cdot \frac{a^2}{q} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{q}\right) + by - \frac{ba}{3} + c = y^3 -$

$y^2a + \frac{1}{3}ya^2 - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}ya^2 + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c =$

$y^3 - \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} + by - \frac{ab}{3} + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}.$

Уравнение примет вид: $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{c}\right) + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} = 0$

Обозначения: $p = b - \frac{a^2}{3};\ q = c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3};$

Уравнение примет вид: $y^3 + py + q = 0,$ где p, q - числа.

Это трехчленное кубическое уравнение, у которого отсутствует член со второй степенью неизвестного.

Второй этап. Сведение трехчленного кубического уравнения к квадратному.

Замена: $\boldsymbol{y = z - \frac{p}{3z}}$, z – новая переменная

$y^3 + py + q = \left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = z^3 - 3 \cdot z^2 \cdot \frac{p}{3z} + 3 \cdot z \cdot \frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} +$
$pz - \frac{p^2}{3z} + q = z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q.$

Уравнение будет иметь вид: $z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$

Умножим уравнение на z^3. Получим: $z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ - квадратное уравнение относительно z^3.

Замена: $\boldsymbol{z^3 = t.}$

Уравнение примет вид: $t^2 + qt^2 - \frac{p^3}{27} = 0$

$$D = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$t_1 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$; $\quad t_2 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$

Обратная замена: $z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ и $z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Обратная замена: $y = z - \frac{p}{3z}$.

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}.$$

Нетрудно убедиться, что $y_1 = y_2$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} -$$

$$\frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3 \cdot \left(-\frac{p}{3}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = z_1 + z_2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} -$$

$$\frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = z_2 + z_1$$

Для решения уравнения $y^3 + py + q = 0$ получили формулу

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Обозначим $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, тогда формула будет иметь вид

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}},$$ **формула Кардано**.

Вопрос о характере его корней зависит от знака выражения $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$,

• если $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то уравнение имеет три различных корня, один из них действительный;

•если $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то все три корня действительны, два из них равны;

•если $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то все три корня действительные и различные.

Рассмотрим метод Кардано на примере.

Уравнение 18. Решить уравнение $x^3+4x^2+6x+3=0$.

Решение: приведем уравнение $x^3+4x^2+6x+3=0$ к виду $x^3+px+q=0$

заменой $x=y-\frac{a}{3}$, $\boxed{x=y-\frac{4}{3}}$

$\left(y-\frac{4}{3}\right)^3+4\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+6\left(y-\frac{4}{3}\right)+3=0$

$y^3-3y^2\cdot\frac{4}{3}+3y\cdot\frac{16}{9}-\frac{64}{27}+4y^2-4\cdot 2y\cdot\frac{4}{3}+4\cdot\frac{16}{9}+6y-8+3=0$

$y^3-4y^2+\frac{16}{3}y-\frac{64}{27}+4y^2-\frac{32}{3}y+\frac{64}{9}+6y-5=0$

$y^3+\frac{2}{3}y-\frac{7}{27}=0$,

Найдем значение выражения $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{49}{27^2\cdot 4}+\frac{8}{27\cdot 27}=\frac{81}{27^2\cdot 4}>0$

Уравнение имеет три различных корня, один из них действительный.

$$y=\sqrt[3]{\frac{7}{54}-\sqrt{\frac{81}{27^2\cdot 4}}}+\sqrt[3]{\frac{7}{54}+\sqrt{\frac{81}{27^2\cdot 4}}}=\sqrt[3]{\frac{7}{54}-\frac{9}{54}}+\sqrt[3]{\frac{7}{54}+\frac{9}{54}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}+$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Разделим по схеме Горнера $y^3+\frac{2}{3}y-\frac{7}{27}$ на $x+\frac{1}{3}$.

корень	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{27}$
$\frac{1}{3}$	1	$0+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$	$-\frac{7}{27}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}=0$

$y^3+\frac{2}{3}y-\frac{7}{27}=\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{7}{9}\right)=0$, $y=\frac{1}{3}$, второе уравнение действительных корней не имеет. Тогда $x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1$.

Ответ: -1.

Уравнение 19. Решить уравнение $x^3-6x^2+5x+12=0$,

$$(x^3+ax^2+bx+c=0)$$

Решение: Приведем уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ к трехчленному виду.

Замена: $x=y-\frac{a}{3}$; $x=y-\frac{-6}{3}=y+2$;

$(y+2)^3-6(y+2)^2+5(y+2)+12=0$

$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+5y+10+12=0$

$y^3-7y+6=0 \qquad (y^3-py+q=0)$

Найдем значение выражения $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{36}{4}-\frac{343}{27}=9-\frac{343}{27}=\frac{243-343}{27}=-\frac{100}{27}<0$; уравнение имеет три действительных корня.

Преобразуем уравнение $y^3-7y+6=0$, представив слагаемое $-7y$ в виде суммы двух слагаемых $y^3-y-6y+6=0$, $y(y^2-1)-6(y-1)=0$,

$y(y-1)(y+1)-6(y-1)=0$, $(y-1)(y^2+y-6)=0$;

$y_1=1;\ y_2=-3;\ y_3=2.$

Обратная замена: $x=y+2$

$x_1=1+2=3, x_2=-3+2=-1, x_3=2+2=4$

Ответ: -1; 3; 4.

Уравнение 20. Решить уравнение $x^3-12x+16=0$.

Решение: $p=-12;\ q=16$

$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{256}{4}+\frac{(-12)^3}{27}=64-64=0$, уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают.

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}=\sqrt[3]{-\frac{16}{2}+\sqrt{0}}+\sqrt[3]{-\frac{16}{8}+\sqrt{0}}=\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-8}=-4$$

Остальные корни находим по схеме Горнера:

	1	0	-12	16
-4	1	$0+(-4)\cdot 1=-4$	$-12+(-4)(-4)=4$	$16+(-4)\cdot 4=0$

$x^3-12x+16=(x+4)(x^2-4x+4)=(x+4)(x+2)(x-2)=0$

$x=-4, x=-2, x=2.$

Ответ: $-4;\ -2;\ 2.$

Вывод: любое кубическое уравнение можно привести к неполному кубическому уравнению вила $y^3+py+q=0$. Это уравнение имеет всегда хотя бы один действительный корень, который можно найти, используя формулу Кардано. Решение громоздкое, содержит много корней. Поэтому используется только в том случае, если обычные методы (разложение на множители, выделение куба двучлена, метод замены) не помогают.

Формула Кардано применяется при решении кубических уравнений с параметрами.

Уравнение 21. При каком наименьшем натуральном a уравнение $x^3 - 3x + 4 - a = 0$, имеет одно действительное решение?

Решение: По формуле Кардано: $p = -3, q = 4 - a$

Так как по условию найти одно решение, то это возможно, если $D > 0$.

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(4-a)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{16 - 8a + a^2}{4} - 1$$
$$= \frac{12 - 8a + a^2}{4} > 0\ ,\ \ a^2 - 8a + 12 > 0$$

Решая методом интервалов, получаем $x < 2, x > 6$. Наименьшее натуральное число из этих промежутков - число 1.

Ответ: 1.

Уравнение 22. В зависимости от параметра a найти число корней уравнения $x^3 - 3x - a = 0$.

Решение: По формуле Кардано: $p = -3;\ q = -a,$

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{a^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{a^2}{4} - 1 = \frac{a^2 - 4}{2};$$

Решив методом интервалов, получаем:

$D > 0$ при $a < -2, a > 2$ $-$ один корень;

$D < 0$ при $a \in (-2; 2)$ - 3 корня

$D = 0$ при $a = -2,$ при $a = 2$ $-$ три корня, два из них равны.

3.9 Метод тригонометрических подстановок

Тригонометрическая подстановка используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значений тригонометрической функции или включается в эту область.

Уравнение 23. Решить уравнение $8x^3 - 4x - 1 = 0$.

Решение: Уравнение равносильно уравнению $4x(2x^2 - 1) = 1$. Отсюда следует, что при $x \le -1$ значение левой части отрицательно, а при $x \ge 1$ - больше 1, т.е. корни возможны только из $(-1; 1)$.

Тогда $x = \cos\, t$ при $t\ \in (0; \pi)$, и уравнение примет вид

$4\cos\, t(2\cos^2 t - 1) = 4\cos\, t\, \cos\, 2t = 1$, $\frac{2\sin\, 2t \cdot \cos\, 2t}{\sin\, t} = 1$,

После умножения на $sint \ne\ 0$ по формуле синуса двойного угла получаем

$\sin\, 4t = \sin\, t$, $2\cos\frac{5t}{2}\sin\frac{3t}{2} = 0$, $\cos\frac{5t}{2} = 0$ или $\sin\frac{3t}{2} = 0$

$\frac{5t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $\frac{3t}{2} = \pi n, n \in Z$

Учитывая условие $t \in (0; \pi)$, получим:

$5t = \pi + 2\pi k$ $\qquad$ $3t = 2\pi n$

$t = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$ $\qquad$ $t = \frac{2}{3}\pi n$.

Отберем корни:

$0 < \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5} < \pi$ $\qquad$ $0 < \frac{2\pi n}{3} < \pi$

$0 < \pi + 2\pi k < 5\pi$ $\qquad$ $0 < n < \frac{3}{2}$

$-\pi < 2\pi k < 4\pi$ $\qquad$ $n = 1, t = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{1}{2} < k < 2$

$k = 0,\ t = \frac{\pi}{5}$

$k = 1,\ t = \frac{3\pi}{5}$

Обратная замена: $x = \cos\frac{\pi}{5}$ или $x = \cos\frac{3\pi}{5}$ или $x = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

3.10 Использование монотонности функции

Этот способ основан на следующих утверждениях:
1) строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз;

2) если одна функция возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики их либо только один раз пересекутся, либо вообще не пересекутся, а это означает, что уравнение $f\ (x)\ = g\ (x)$ имеет не более одного решения;

3) если на некотором промежутке одна из функций убывает (возрастает), а другая принимает постоянные значения, то уравнение $f\ (x) = g\ (x)$ либо имеет единственный корень, либо не имеет корней. Этот способ можно использовать для решения следующих типов уравнений:

- уравнения, в обеих частях которых стоят функции разного вида;
- уравнения, в одной части которых убывающая, а в другой - возрастающая на данном промежутке функции;
- уравнения, одна часть которых - возрастающая или убывающая функция, а вторая - число.

Уравнение 24. Решить уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Решение: рассмотрим функцию $y = x^3 + 3x - 4$ и представим в виде суммы двух функций $y = x^3$ и $y = 3x - 4$. Обе функции определены на множестве R и являются возрастающими. Следовательно, их сумма - возрастающая функция. А так как всякая монотонная функция каждое свое значение может принимать лишь при одном значении аргумента, то и значение, равное нулю, она может принимать лишь при одном значении x. Значит, такое уравнение если имеет действительное корень, то только один. Испытывая делители свободного члена, находим, что $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Уравнение 25. Решить уравнение $x^3 + x - 2 = 0$.

Решение: Запишем уравнение в виде: $x^3 = 2 - x$. Рассмотрим функции $y = x^3$ и $y = 2 - x$. Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения, а функция $y = 2 - x$ убывает на области определения. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ действительно корень уравнения.

Ответ: 1.

3.11 Графический метод

Уравнение 25. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Решение: запишем уравнение в виде $x^3 = x^2 + 1$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 1$. Графики пересекаются в точке, с абсциссой $x \approx 1{,}5$.

Вывод:*С помощью графического метода можно приближенно находить корни уравнения или решать вопрос о количестве рациональных корней уравнения.*

3.12 Алгебра одного уравнения

Уравнение 26.Решить уравнение $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Решение 1. Метод понижения степени .

Сумма коэффициентов равна 0 $\Rightarrow$ $x = 1$ корень уравнения.

корень	1	-3	-13	15
1	1	$-3 + 1 \cdot 1 = -2$	$-13 + 1 \cdot (-2) = 15$	$15 + 1 \cdot (-15) = 0$

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x^2 - 2x - 15) = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = -3;\ x_3 = 5.$

Ответ: -3; 1; 5.

Решение 2. Метод неопределенных коэффициентов.

Один из корней уравнения $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0,\ x = 1$

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c =$ $ax^3 - (a - b)x^2 - (b - c)x - c$, составляем систему

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 3 \\ b - c = 13 \\ c = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ = 1 \\ \ = -2 \\ \ = -15 \end{cases}$$

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x^2 - 2x - 15) = (x - 1)(x - 5)(x + 3)$

Ответ: $-3; 1; 5.$

Решение 3. Теорема Виета. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0;$

$a = 1, b = -3, c = -13, d = 15.$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -13 \\ x_1x_2x_3 = -15 \end{cases}$$

Метод подбора: $x = -3;\ x = 1;\ x = 5.$

Решение 4. Формула Кардано. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

Приведём уравнение к неполному заменой $\boxed{x = y - \frac{a}{3}}$ $x = y - \frac{-3}{3} = y + 1.$

$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - 13(y + 1) + 15 = 0$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 - 13y - 13 + 15 = 0$

$y^3 - 16y = 0$

$y = 0$ или $y = 4$ или $y = -4$

Обратная замена: $x = 0 + 1 = 1, \quad x = 4 + 1 = 5, \quad x = -4 + 1 = -3$

Ответ: -3, 1, 5.

Решение 5. Метод разложения на множители

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

$x^3 - 3x^2 - 13x - 2x + 2x + 15 = 0$

$(x^3 - 3x^2 + 2x) - 15(x - 1) = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) - 15(x - 1) = 0$

$x(x - 1)(x - 2) - 15(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x^2 - 2x - 15) = 0$

$(x - 1)(x + 3)(x - 5) = 0$

$x = 1, x = -3, x = 5$

Ответ: $-3;\ 1;\ 5.$

Различные способы решения одного уравнения показывают универсальность каждого метода, его оригинальность и рациональность. Сравнив различные способы решения кубических уравнений, можно сделать **вывод**: в каждом из методов решения есть свои плюсы и минусы, во многом они дополняют друг друга, например, если у кубического уравнения слишком большие коэффициенты, его можно решить с помощью схемы Горнера и проверить теоремой Виета и каждый способ нужен для решения своих задач в математике. Ясно, что формулу Кардано нужно применить лишь в самом крайнем случае, когда все остальные способы не дадут точного ответа.

Результаты исследования

Рассмотрены и классифицированы кубические уравнения по видам и способам решения. Основные способы решения: разложение на множители, произведение которых равно нулю, замена переменной, позволяющая получить уравнение меньшей степени, чем исходное и функционально-графический способ.

Результатом поиска методов решения кубических уравнений, неподдающихся решению способами, рассматриваемыми в школьной программе, стали способы, основанные на применении теоремы Виета (для уравнений степени $n > 2$), теоремы Безу, схемы Горнера, а также формула Кардано.

В работе представлены методы решения уравнений, которые стали открытием. К ним можно отнести - метод неопределенных коэффициентов, метод тригонометрических подстановок, симметрические уравнения.

Более понятна и наглядна в применении к решению уравнений теорема Безу.

Схема Горнера упрощает вычисления, помогает легко подобрать корни.

Формула Кардано очень сложная и громозская, т.к. содержит несколько радикалов. Применяется крайне редко.

Теорема Виета для уравнений высших степеней является универсальным методом. Он трудоемкий, требует хорошей техники вычислений;

Графический способ решения не всегда дает точных ответов. Этот способ удобен для решения задач, где необходимо узнать, сколько корней имеет уравнение, а не какие.

Особый интерес к решению уравнений методом неопределенных коэффициентов, метод тригонометрических подстановок, к решению симметричных и возвратных уравнений.

Заключение

Теория уравнений занимает ведущее место в математике. Имеет не только теоретическое значение, но и служит практическим целям. Изучив учебную и научную литературу, интернет-ресурсы по теме "Кубические уравнения и его корни" удалось выяснить, что современной науке известно множество способов решения уравнений.

На мой взгляд, самые надежные и практичные способы - это теорема Виета и схема Горнера, они позволяют быть уверенным в своем ответе.

Выдвинута гипотеза о существовании связи между коэффициентами кубического уравнения и его корнями. Действительно - такая формула существует.

В данной работе достигнута цель и выполнены основные задачи: показаны и изучены новые, ранее неизвестные формулы. Рассмотрено много примеров. Исследованы различные методы решения уравнений третьей степени. Не все способы удобны для решения, но каждый из них интересен.

Предлагаемая работа рассчитана на учеников 9 - 11 классов, желающих повысить уровень математической подготовки, узнать больше о кубических уравнениях и способах их решения.

Практическая значимость: в зависимости от вида уравнения умение определять, какой способ решения в данном случае является наиболее эффективным, а также правильно применять выбранный метод.

Продолжение работы вижу в изучении уравнений высших степеней.

Список использованной литературы

1. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажер: Пособия для школьников и абитуриентов. – М: Илекса, 2001 г.

2. Журнал «Все для учителя математики», статья Ю. А. Захарченко: Алгебраические уравнения высших степеней. От простого к сложному. 1.2017.

3. Электронная энциклопедия «Википедия».