Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников
по политехническим, естественным, математическим дисциплинам
для учащихся 9-11 классов

Прикладные вопросы математики

Знак четырех.
Проблема четырёх красок

Яицкая Мария Ростиславовна,
9класс МАОУ «СОШ №17»
город Соликамск

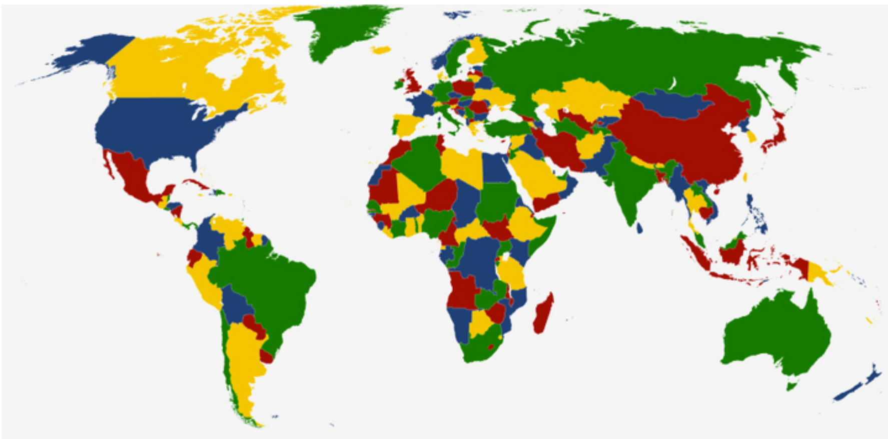
Аксаева Татьяна Николаевна
учитель математики, высшая
квалификационная категория

Пермь. 2018.

Содержание

Введение

С тех пор, как появились первые географические карты, появился вопрос о том, как их лучше всего раскрашивать. С одной стороны, каждая отличная от прочих территория должна быть окрашена в свой цвет. С другой стороны, строгая функциональность не допускала кричащей пестроты. Да и типографские возможности тех времен были не так уж велики. В связи с этим, географы поставили перед математиками задачу, на первый взгляд казавшуюся довольно простой: каким минимальным количеством красок может быть раскрашена карта так, чтобы каждая из соприкасающихся на ней фигур имела свой цвет?[1]



Задачи работы:

1.Изучить имеющуюся литературу по данной теме.

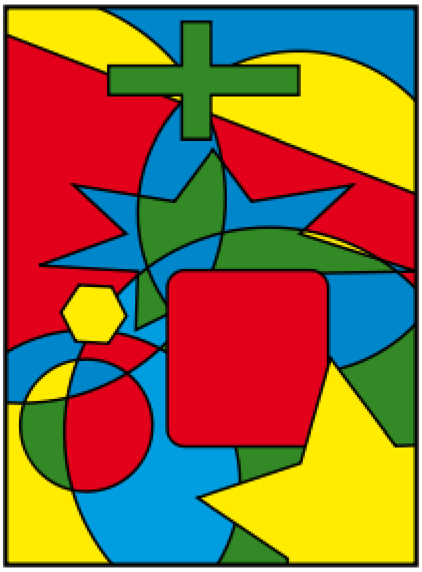
2.Рассказать о теореме четырёх красок.

3.Проверить данную теорему на практике.

Глава 1.Теорема о четырёх красках

§ 1.1.

Теорема о четырёх красках— утверждение о том, что всякую расположенную на сфере карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. Эта теорема была сформулирована Фрэнсисом Гутри в 1852 году, однако доказать её долгое время не удавалось. В течение этого времени было предпринято множество попыток, как доказательства, так и опровержения, и эта задача носила название ***проблемы четырёх красок***.[3]



Широкую известность проблема четырех красок приобрела после того, как в 1878 году выдающийся математик Артур Кэли сообщил, что он размышлял над этой проблемой, но так и не сумел ее решить.

§ 1.2. История

В 1879 году английский юрист и математик Альфред Кемпе опубликовал то, что, по его мнению, было решением проблемы, а год спустя представил в журнал статью с названием «Как раскрасить карту четырьмя красками».

В течение десяти лет математики считали проблему решенной, но потом П. Дж. Хивуд указал на роковой пробел в доказательстве Кемпе. С тех пор математические умы безуспешно пытались найти решение проблемы. Внешне невинная формулировка проблемы четырех красок – кажется, что решить её совсем нетрудно,- многим дает ложные надежды.

Питер Тэт предложил другое доказательство в 1880 году, его опровергли в 1891 году.

В своей автобиографической книге Ноберт Винер писал о том, что и он, подобно всем математикам, пытался найти решение проблемы четырех красок, но каждый раз найденное решение, обращалось в неудачу. В настоящее время проблема четырёх красок положительно решена для всех карт с числом стран, не превышающим 38 (больше чем 10^{38}). Даже современные быстродействующие компьютеры не в состоянии перебрать все эти варианты в разумный отрезок времени.

Отсутствие доказательства для проблемы четырёх красок на плоскости становиться ещё удивительнее, если учесть, что похожие проблемы решены для более сложных поверхностей (при рассмотрении проблемы четырех красок поверхность сферы не отличается от плоскости). Для раскраски односторонних поверхностей, таких, как лист Мёбиуса, бутылка Клейна и проективная плоскость, необходимо и достаточно шести красок. Для раскраски карты на поверхности тора, или бублика, число красок должно быть равно семи.[1]

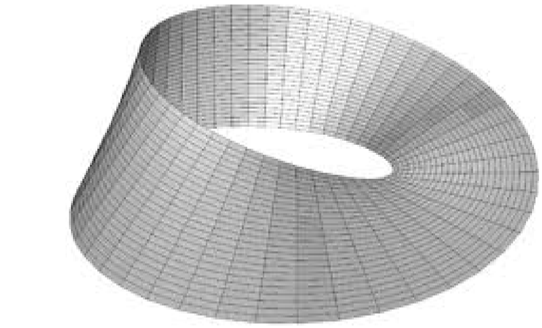
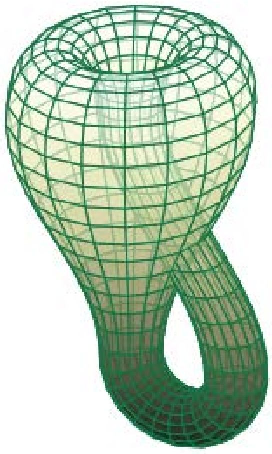


Рис. 9. У ленты Мёбиуса всего одна сторона



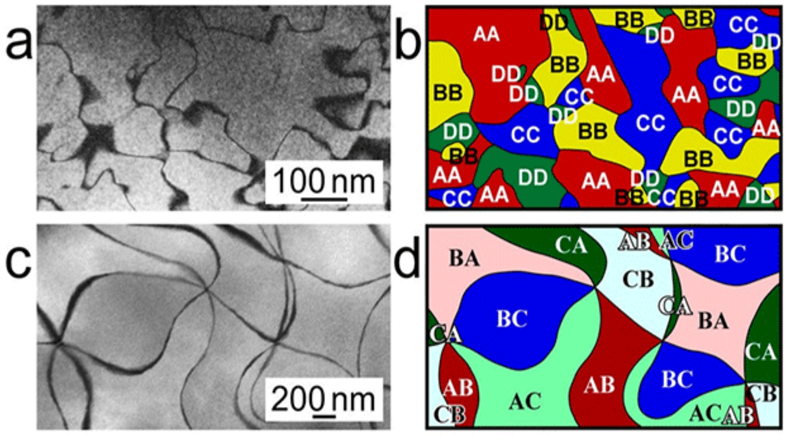
Теорема о четырёх красках была доказана в 1976 году Кеннетом Аппелем (англ.) и (англ.) из Иллинойского университета. Это была первая крупная математическая теорема, доказанная с помощью компьютера. Первым шагом доказательства была демонстрация того, что существует определенный набор из 1936 карт, ни одна из которых не может содержать карту меньшего размера, которая опровергала бы теорему. Аппель и Хакен использовали специальную компьютерную программу, чтобы доказать это свойство для каждой из 1936 карт. Доказательство этого факта заняло сотни страниц. После этого Аппель и Хакен пришли к выводу, что не существует наименьшего контрпримера к теореме, потому что иначе он должен бы содержать, хотя не содержит, какую - нибудь из этих 1936 карт. Это противоречие говорит о том, что вообще не существует контрпримера. Изначально доказательство не было принято всеми математиками, поскольку его невозможно было проверить вручную. В дальнейшем оно получило более широкое признание, хотя у некоторых долгое время оставались сомнения.[3]

Проблема раскраски карты по сути дела решена для всех изученных сложных поверхностей, но стоит лишь взять поверхность, отличную от плоскости или сферы, как решение проблемы ускользает от топологов. Хуже всего, что всякие видимые причины, объясняющие, почему так происходит, отсутствуют.

Является ли проблема четырёх красок такого рода математической теоремой? Если это так, то её можно считать «истиной» только в том случае, если её или какую-нибудь другую тесно связанную с ней теорему включить в качестве нового недоказуемого постулата в расширенную дедуктивную систему.[3]

§1.3. Теорему о четырёх красках связали с магнитными свойствами кристаллов

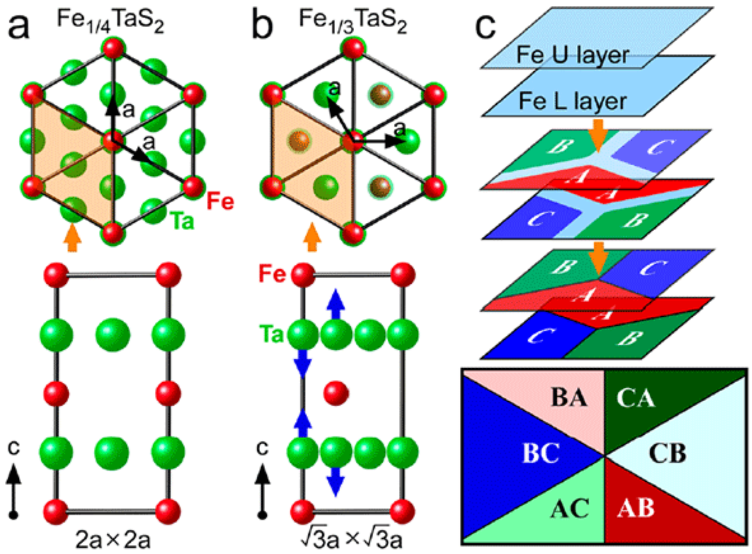
Иногда чисто теоретические, математические абстракции находят удивительное соответствие в живой природе. Пожалуй, самые известные среди них — **фракталы** (тема проекта прошлого года). Но вот группе математиков, физиков и химиков из США, Южной Кореи и Японии удалось найти ещё один замечательный пример. Они доказали, что известная **теорема** о четырёх красках в точности описывает **структуру некоторых кристаллов**.[2]



Много лет картографы использовали эту теорему для подготовки географических карт. Однако, в последние десятилетия она представляет больший интерес не столько для картографов, сколько для математиков, из-за сложности доказательства. Её удалось доказать только в 1976 году, спустя 124 года после того, как теорему сформулировали в 1852 году. Судя по всему, до сих пор не предложено её доказательства без использования компьютера.

Возвращаясь к находке междисциплинарной группы учёных, они изучали свойства кристалла Fe_xTaS_2. Это слоистая структура, принадлежащая к классу дихалькогенидов переходных металлов (TMD), такую можно обнаружить под микроскопом в сплавах металлов и магнитах. Именно слоистая структура TMD определяет физические макросвойства материала. В Fe_xTaS_2 тонкие слои TaS_2 чередуются с ионами Fe, образуя массивную кристаллическую решётку.

Авторы исследования пришли к выводу, что кристаллическая решётка подчиняется математическим условиям. В первом случае это теорема о четырёх красках, а во втором — 6-валентный граф.



В любом случае, каждый узел в кристаллической решётке никогда не соприкасается с узлом такого же типа, а только с другими узлами, как и в случае с красками на географической карте.

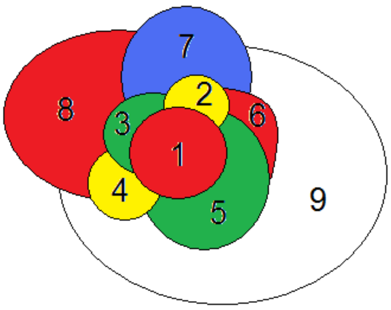
Конечно, никто не раскрашивает кристаллы, но именно теорема о красках позволяет интуитивно понять логику, по которой сформирована физическая структура. Если понять, как формируются свойства, можно создать новые материалы, которые найдут применение в электронике, оптике и многих других областях.[2]

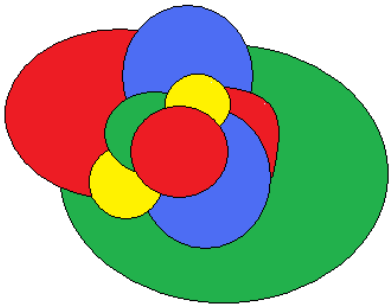
§1.4 Игра «Четыре краски»

Стивен Барр предложил логическую игру на бумаге для двух игроков, названную «Четыре краски».

За время существования теоремы о четырех красках на ее базе были созданы многочисленные игры. Затем появились компьютерные варианты. Проверить свои математические способности в этой области можете и вы, используя логическую онлайн - игру «Четыре краски».[1]

Для этой игры нужны четыре цветных карандаша. Первый игрок начинает игру, рисуя произвольную пустую область. Второй игрок закрашивает её любым из четырёх цветов и в свою очередь рисует свою пустую область. Первый игрок закрашивает область второго игрока и добавляет новую область, и так далее - каждый игрок раскрашивает область соперника и добавляет свою. При этом области, имеющие общую границу, должны быть раскрашены в разные цвета. Проигрывает тот, кто на своём ходу вынужден будет взять пятую краску.





Стоит отметить, что в этой игре проигрыш одного из игроков вовсе не является доказательством неверности теоремы (если четырех красок оказалось недостаточно!). А лишь иллюстрацией того, что условия игры и теоремы весьма разнятся.

Чтобы проверить верность теоремы для полученной в игре карты, нужно проверить связность нарисованных областей и, удалив с неё цвета, выяснить, можно ли обойтись лишь четырьмя цветами для закрашивания получившейся карты (теорема утверждает, что можно).[2]

Глава 2. Исследование.

§ 2.1 Проверка теоремы на практике

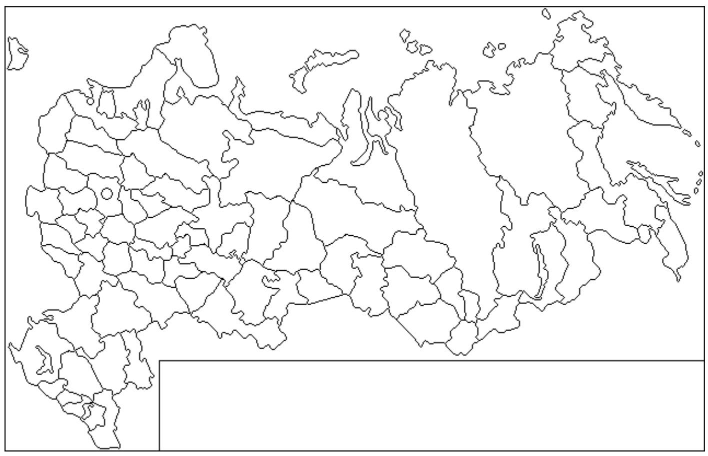
Цель : доказать теорему четырёх цветов

Ход работы:

1.Раскрасить карту России и Пермского края, используя:

1) 4 цвета;2) 3цвета

2.Сделать вывод о теореме.

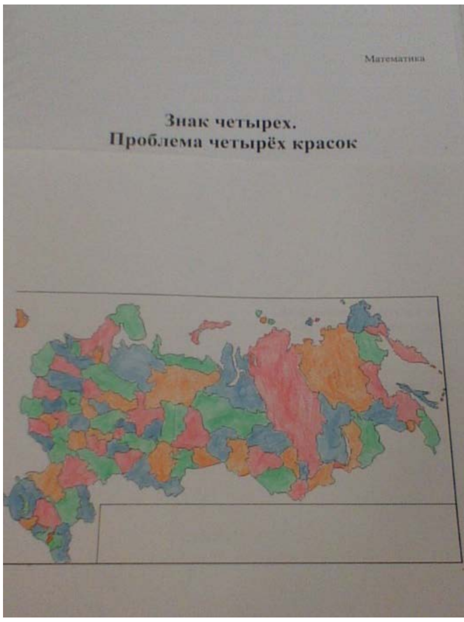


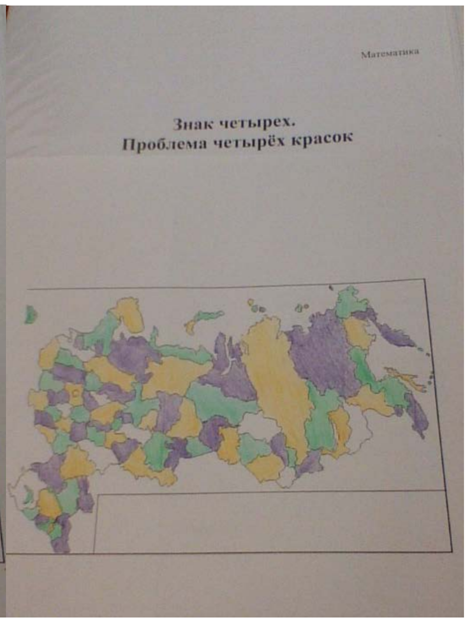
Пермский край:

4 цвета   3 цвета

Россия:

4 цвета 3 цвета





*Белыми участками на картах обозначены области, для которых необходим 4-й цвет.

Вывод

Для раскраски карт хватило четырёх цветов и не достаточно трёх. Теорема доказана на практике.

Заключение

Пожалуй, на этом историю теоремы о четырех красках можно считать исчерпанной. Впрочем, если вы считаете себя великим математиком, вполне можете попытаться самостоятельно ее доказать либо опровергнуть. А можете просто поиграть, ведь тренировка мозга и развитие логического мышления не вредило до сих пор еще никому.

Источники

1.Сайт infourok.ru[Электронный ресурс]
https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-teorema-o-chetireh-kraskah-klass-305750.html
2. Сайт habrahabr.ru [Электронный ресурс]
https://habrahabr.ru/post/226091
3. Сайт kopilkaurokov.ru [Электронный ресурс]
https://kopilkaurokov.ru/matematika/planirovanie/zadacha_chietyriekh_krasok

Приложение

1. Логическая онлайн-игра «Четыре краски»

http://www.iqfun.ru/online-games/four-color.shtml