

Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников по политехническим, естественным, математическим дисциплинам для учащихся 9-11 классов

Физика

Исследование и описание гравитационного маневра

Коробейников Владислав Сергеевич,
202 кл., Лицей №1, г.Пермь.

Попов Фёдор Сергеевич
Преподаватель физики

Пермь. 2018.

Оглавление

Введение.	3
Глава 1. Постановка задачи.	3
§1. Краткие сведения о полетах космических аппаратов.	3
§2. Гомановская траектория	8
§3. Концептуальная постановка задачи	8
Глава 2. Математические расчёты.	9
§1. Построение Гомановской траектории.....	9
§2. Построение траектории с использованием гравитационного маневра.	13
§3. Сравнение траекторий.	19
§4. Расчёт времени для перемещения по Гомановской траектории.....	19
§5. Расчёт времени для перемещения с гравитационным маневром.	21
Заключение.	22
Список используемой литературы.	23

Введение.

С первого запуска искусственного спутника в космос прошёл 61 год. Для того времени это было большое событие для всего мира. С тех пор уже множество ракетносителей покинуло нашу планету и сегодня их запуски стали для человека чем-то обыкновённым и даже не интересным для широкой публики. Важной инженерной задачей был и остаётся вопрос о минимальной затрате топлива и времени для так называемого путешествия в космическом пространстве. Для полётов необходимо колоссальное количество топлива и соответственно очень громоздкий космический аппарат. Добиться минимальный расход топлива в двигателе было трудной задачей, непосильной инженерии того времени и поэтому необходимо было прибегать к некоторым хитростям. Во время полёта советской автоматической межпланетной станции “Луна-3”, целью которой было получить снимки обратной стороны Луны, то есть ту часть поверхности Луны, которую не видно с Земли, применили так называемый гравитационный маневр, при котором космический аппарат двигался только за счёт своего импульса и изменял свою траекторию под воздействием силы притяжения Луны и Земли. Это и называется гравитационным маневром, когда космический аппарат меняет свою траекторию вследствие влияния на него силы притяжения космического объекта. Так же немаловажной особенностью гравитационного маневра является ускорение или замедление аппарата связанная с тем, что космический объект движется по своей орбите, а, следовательно, имеет собственную скорость. При подлёте космического аппарата, этот объект увлекает его за собой тем самым сообщая ему часть своей скорости, после чего аппарат, по гиперболической траектории, проходит мимо этого тела и летит дальше с увеличенной или уменьшенной скоростью.

Глава 1. Постановка задачи.

§1. Краткие сведения о полётах космических аппаратов.

Силу притяжения других планет уже давно используют в современной космонавтике (с 1959 года во время полета космического аппарата “Луна-3”, как говорилось ранее, хотя официально считается что первое применение маневра было выполнено в 1974 году американской станцией “Маринер-10”). Траектории полетов данных космических аппаратов можно увидеть на рисунках 1а и 1б соответственно.

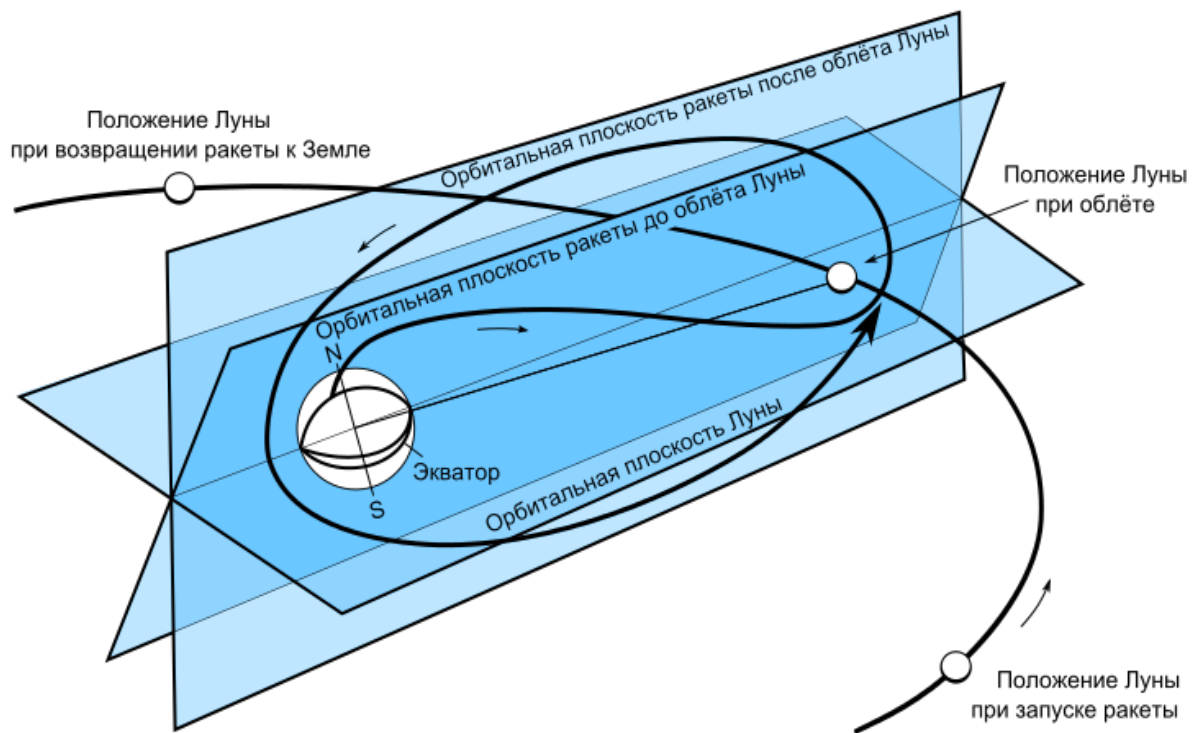


Рис 1а. Траектория полета КА “Луна-3”

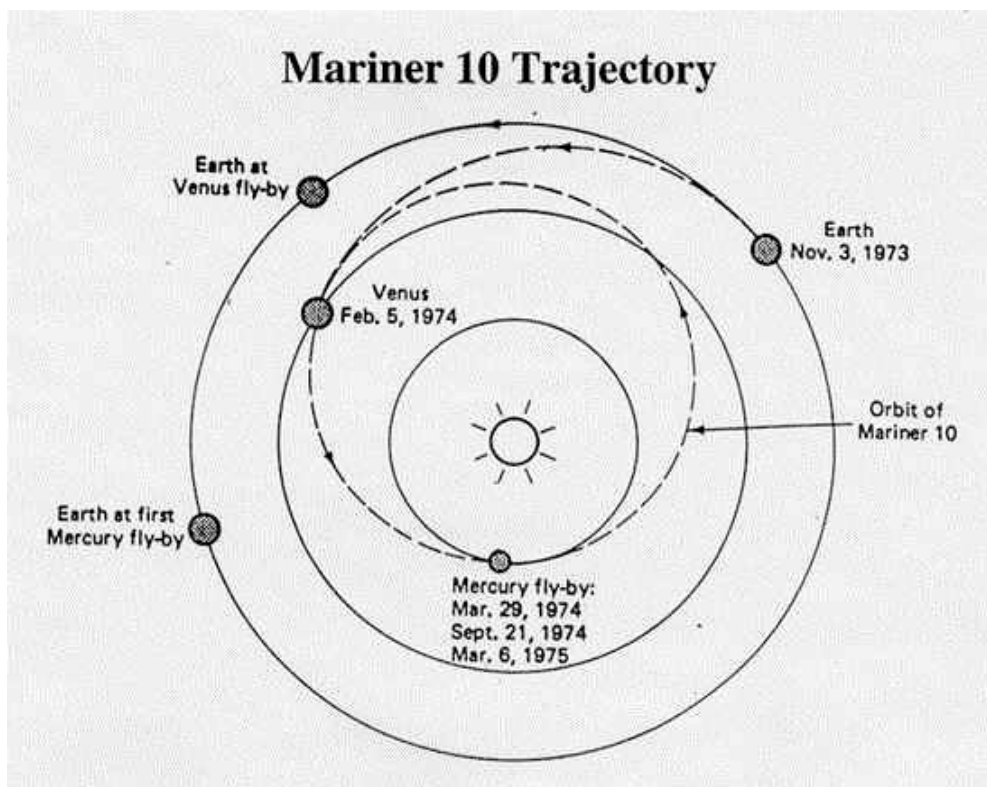


Рис 16. Траектория полёта КА “Маринер-10”

Главным достоинством этого движения является то, что он практически не нуждается в расходе топлива. Единственное что необходимо для использования маневра это наличие массивного космического тела, находящийся вблизи траектории полета аппарата. Чаще всего используют силу притяжения Юпитера, исследуя объекты Солнечной системы, из-за её огромной массы, придающей космическому аппарату соответственно большую скорость. Для гравитационного маневра важно и необходимо точно выбрать дату запуска космического аппарата. Таких дат, для эффективного выполнения маневра, в большинстве своем бывает несколько и этот интервал в баллистике называется окном запуска. В этом плане Юпитер является наиболее независимым от выбора старта полета с Земли, так как является планетой с большой массой и поворачивать рядом с ним можно по широкой плавной дуге, что является еще одной причиной почему множество космических аппаратов использовала, использует и будет использовать гравитацию Юпитера.

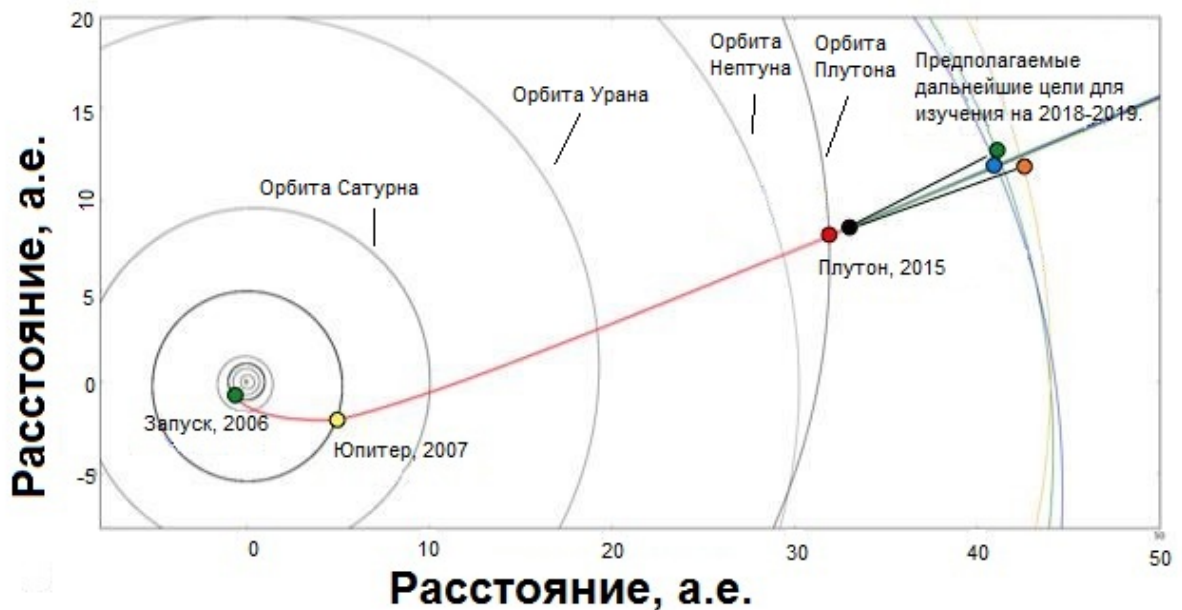


Рис. 2. Траектория полета КА “Новые горизонты” (“New Horizons”)

На рисунке 2 показана траектория полета автоматической межпланетной станции “Новые горизонты” (“New Horizons”), запуск которой произошел в 2006 году. Используя гравитацию Юпитера, аппарат совершил гравитационный маневр, что увеличило его скорость на 4 км/с и на 2,5 градуса отклонило его от плоскости эклиптики. Таким образом “Новые горизонты” - первый космический аппарат, посетивший Плутон.

Самым важным при использовании гравитационного маневра является максимально точная навигация полета. Например, из-за неточности расчета высоты над космическим телом при выполнении маневра на несколько километров, аппарат может отклониться от курса на несколько секунд, минут или градусов (изменение угла). Таким образом приведение аппарата на заданную траекторию во-первых, будет уже достаточно трудным или невыполнимым для стандартного коррекционного двигателя, а во-вторых потребует дополнительной затраты столь драгоценного топлива.

Еще одним способом задания движения(рассмотрение) в космосе является “Лестница Лагранжа”. Существуют такие точки, например, у Земли (две), в которых космический аппарат будет двигаться с таким же периодом, как и у

самой планеты. Такими называют “Точками Лагранжа”. Самой причиной существования таких точек, при которых тело не будет двигаться быстрее планеты, когда она внутри орбиты вращающейся вокруг Солнца Земли, и медленнее, когда она за орбитой, является все то же притяжения планет, а точнее двух: Солнца и Земли. При нахождении точки за орбитой суммарное притяжение Земли и Солнца складываются и соответственно при нахождении точки внутри орбиты эти притяжения вычитаются (сила притяжения Солнца минус сила притяжения Земли) после чего рассчитывают так, чтобы расширенная или уменьшенная орбита этой точки была с таким же периодом что и у Земли. Так вот при изучении спутников Юпитера можно рассчитать экономную траекторию так, чтобы космический аппарат перелетал из одной точки Лагранжа в другую, проходя большие расстояния и расходуя минимальный запас топлива. Это и называется “Лестницей Лагранжа” (рисунок 3).

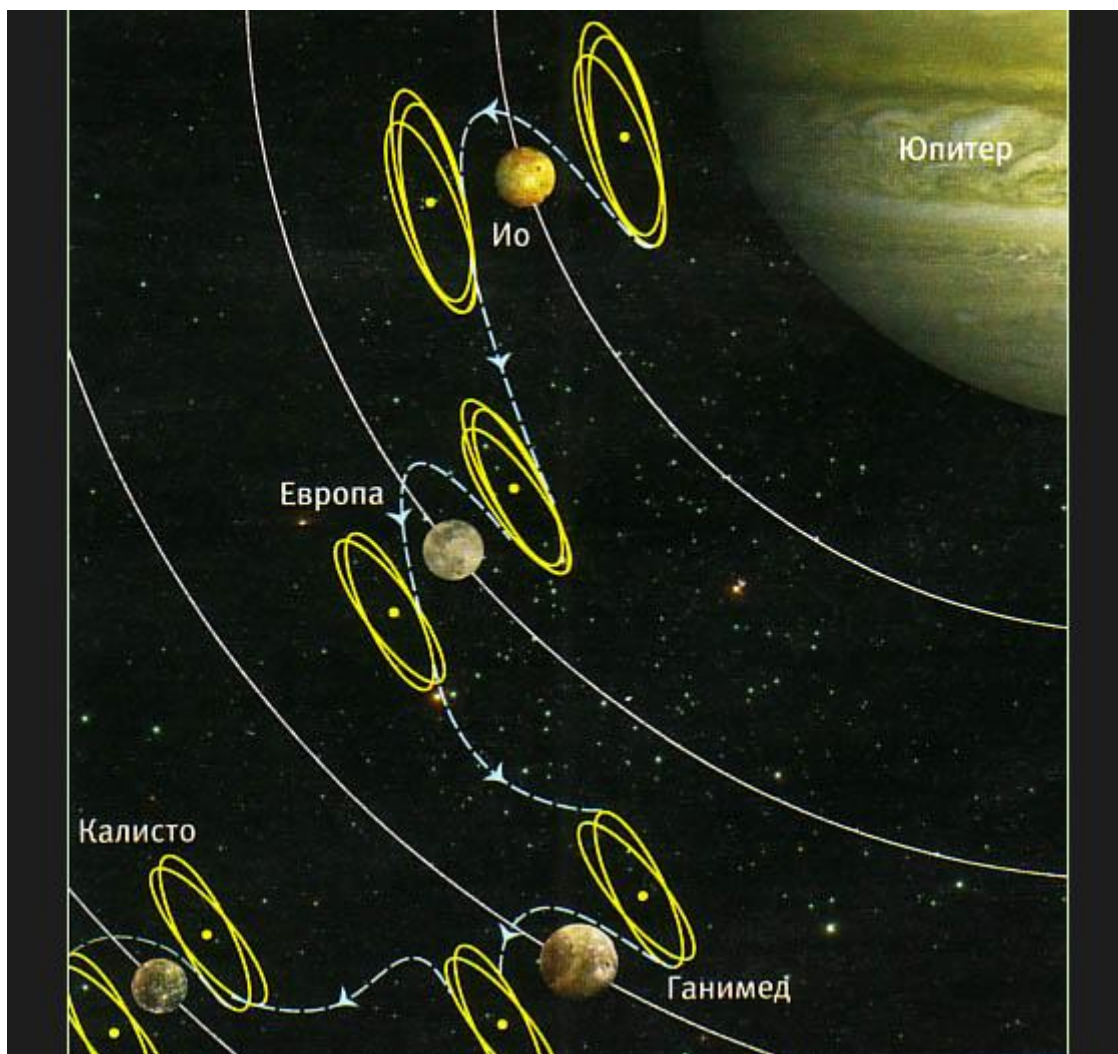


Рис. 3. “Лестница Лагранжа” спутников Юпитера

§2. Гомановская траектория

Гомановская траектория- орбита, используемая для перехода между двумя другими орбитами. Именно с этой орбитой мы будем сравнивать траекторию с использованием гравитационного маневра. Обычно данная траектория пересекает две орбиты в апоцентре и перигентре. Необходимо использовать два импульсных приращения скорости для перелета с одной круговой орбиты на другую, что безусловно затрачивает необходимое топливо.

§3. Концептуальная постановка задачи

Целью данной работы является описание полёта космического аппарата с гравитационным маневром и без него при перемещении с Земли на Меркурий.

Задачей данной работы является построение траекторий движения с Земли на Меркурий, расчёт времени прибытия, проанализировать получившиеся траектории.

Гипотезы:

- 1) Космические объекты и сам аппарат будем считать материальными точками, центр масс которых будет совпадать с центром масс всего тела.
- 2) Движение аппарата происходит в пределах Солнечной системы и описывается уравнениями классической механики Ньютона.
- 3) Все планеты движутся по окружностям, в центре которых неподвижно находится Солнце.
- 4) Все планеты находятся в одной плоскости.

Исходные данные:

- 1) Орбиты каждого космического объекта.
- 2) Масса аппарата и космических объектов.
- 3) Орбитальная скорость космических объектов.

Глава 2. Математические расчёты.

§1. Построение Гомановской траектории.

Основные необходимые формулы при решении задачи:

- 1) Сила тяготения космического аппарата к планете:

$$F = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная равная $6.67408 \times 10^{-11} \left(\frac{M^3}{K^2 \times c^2} \right)$, m – масса космического аппарата, M – масса планеты, R – расстояние между космическим аппаратом и планетой.

2) Уравнения движения

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + a_x t, \\ v_y &= v_{y0} + a_y t, \\ v_z &= v_{z0} + a_z t, \end{aligned} \quad (3)$$

где v – скорость тела, a – ускорение тела, t – время, x, y, z – координаты тела в пространстве.

3) Сила тяги двигателя космического аппарата

$$F = P_{y\theta} \times \dot{m}, \quad (4)$$

где: $P_{y\theta}$ – удельный импульс, \dot{m} – скорость расхода массы топлива;

4) Гравитационный параметр $\mu = G(m + M)$

5) Векторный интеграл площадей $c = \vec{r} \times \vec{v}$

6) Интеграл энергии $h = v^2 - \frac{2\mu}{r}$

Сравнивая две траектории, найдем общую начальную скорость отлета от Земли. Для этого нам понадобится формула приращения скорости, зная круговую скорость орбиты Земли и отношение радиусов орбит Земли и Меркурия:

$$\Delta V = V_1 \left(\sqrt{\frac{2\bar{r}}{\bar{r}+1}} - 1 \right),$$

где V_1 – начальная скорость, \bar{r} – отношение конечного радиуса (орбита Меркурия) к начальному (орбита Земли).

Зная, что круговая скорость на орбите Земли равна 30000 м/с получаем, что приращение $\Delta V = -7620$ м/с. Значит начальную скорость аппарата будем считать 22380 м/с.

Построим орбиту космического аппарата при отлете от Земли, для этого будем использовать уравнение орбиты в полярной форме $r = \frac{p}{1 + e \times \cos \varphi}$, где

p – фокальный параметр, вычисляемый по формуле $p = \frac{c^2}{\mu}$;

e – эксцентриситет, вычисляемый по формуле $e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}}$;

φ – угол истинной аномалии, угол между большей полуосью и прямой проведенной из фокуса (точка, где находится большее тело) орбиты к точке, где сейчас находится тело;

Таким образом, получаем, что космический аппарат будет иметь массу в космосе 503 кг., тело движется со скоростью 22380 м/с относительно Солнца, угол между радиус вектором от Солнца и вектором скорости равен 90 градусов. Знаем, что масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг и расстояние между Солнцем и аппаратом $15 \cdot 10^{10}$ м (среднее расстояние от Солнца до Земли).

Тогда:

$$\mu = 1.334 \cdot 10^{20} ;$$

$$c = 3357 \cdot 10^{12} ;$$

$$h = -1.2778 \cdot 10^9 ;$$

$$p = 8.44786 \cdot 10^{10} ;$$

$$e = 0.436809 ;$$

$$a = 1.04398 \cdot 10^{11} ;$$

$$b = 9.39117 \cdot 10^{10} .$$

Получается орбита, изображенная на рисунке 4:

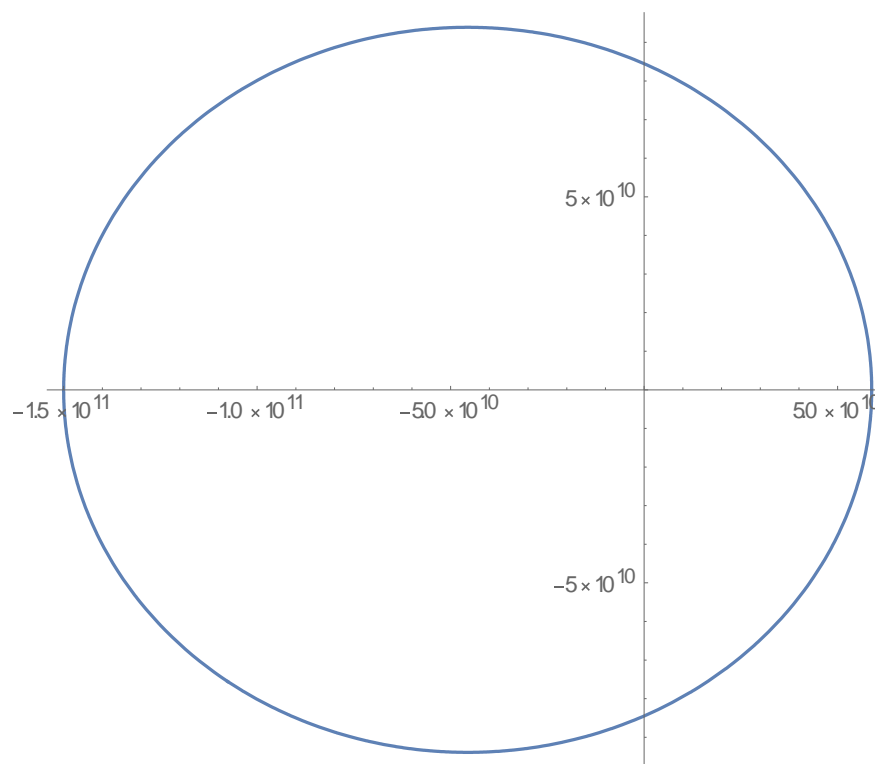


Рис.4. Орбита движения КА после отлёта от Земли.

В итоге получаем орбиту движения космического аппарата, стартующего с Земли относительно Солнца по Гомановской траектории(рис.5):

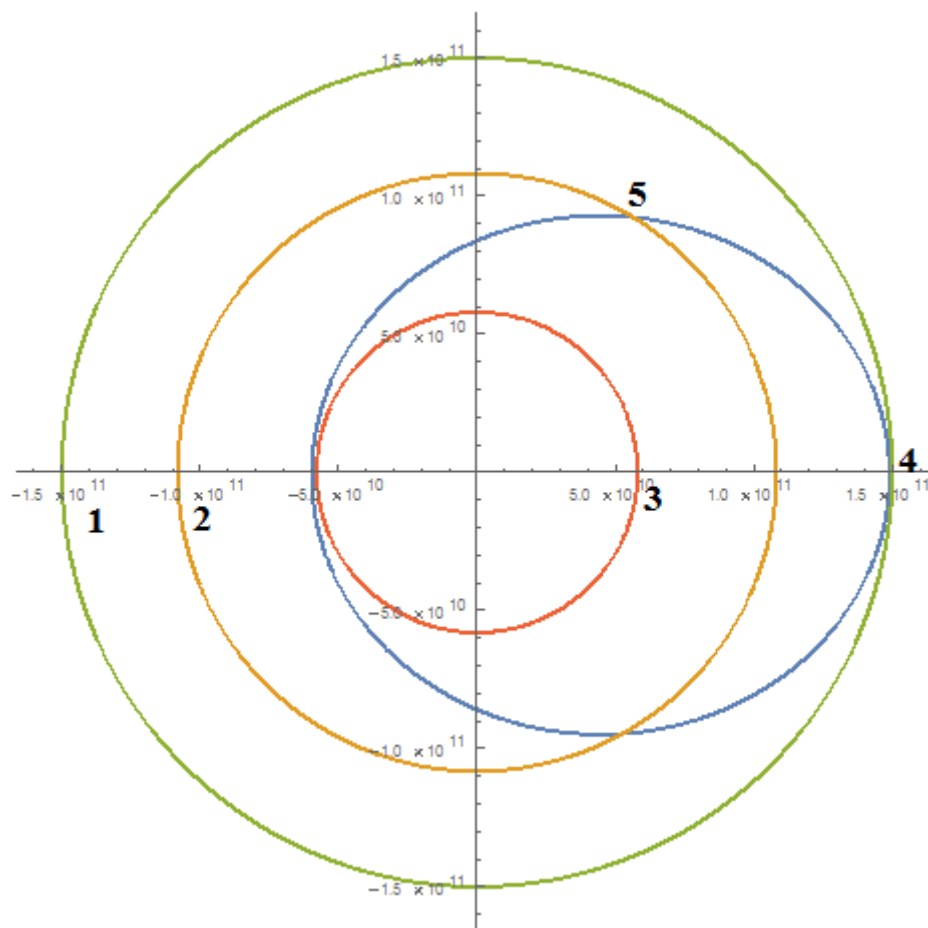


Рис.5. Движение КА по Гомановской траектории относительно Солнца.

На данном рисунке 1, 2, 3 – это орбиты соответственно Земли, Венеры и Меркурия. 4 – момент отлёта от Земли по часовой стрелке. 5 – приближение к Венере.

§2. Построение траектории с использованием гравитационного маневра.

Найдем скорость аппарата при его приближении к Венере. Имеем формулу $V = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$, где a - значение большей полуоси, r - расстояние от Солнца. Получаем, что $V = 34478.5$ м/с.

Для безопасного гравитационного маневра нужно посчитать эффективный радиус планеты, при котором наш космический аппарат не столкнется с планетой. Формула нахождения эффективного радиуса:

$R_{эф} = R\sqrt{1+(V_p/V_{прибл})^2}$, где R- радиус Венеры (6052000 м), $V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$, $V_{прибл}$ - скорость приближения к Венере. Получаем, что $R_{эф} = 6.31881*10^6$ м.

Посчитаем тангенс угла, на который изменилось направление полета в сближении к Венере: $tg(\varphi/2) = \frac{GM}{R_{эф} * V_{прибл}^2} = 0.0432216$. Получается угол, на который изменилось движение аппарата равен 2.474° . Таким образом мы можем уже посчитать приращение скорости по формуле $\Delta V = 2V \sin(\varphi/2) = 2406.56$ м/с. Эта скорость отнимается от текущей, так как аппарат должен пролететь впереди движения планеты, а значит замедлится. Данную орбиту движения космического аппарата после гравитационного маневра с измененной скоростью можно увидеть на рисунке 6. Изменённые параметры:

$$e_1 = 0.50247;$$

$$a_1 = 9.27703*10^{10};$$

$$c_1 = 3.00433*10^{15};$$

$$h_1 = -1.43796*10^9;$$

$$p_1 = 6.76614*10^{10};$$

$$b_1 = 7.92273*10^{10};$$

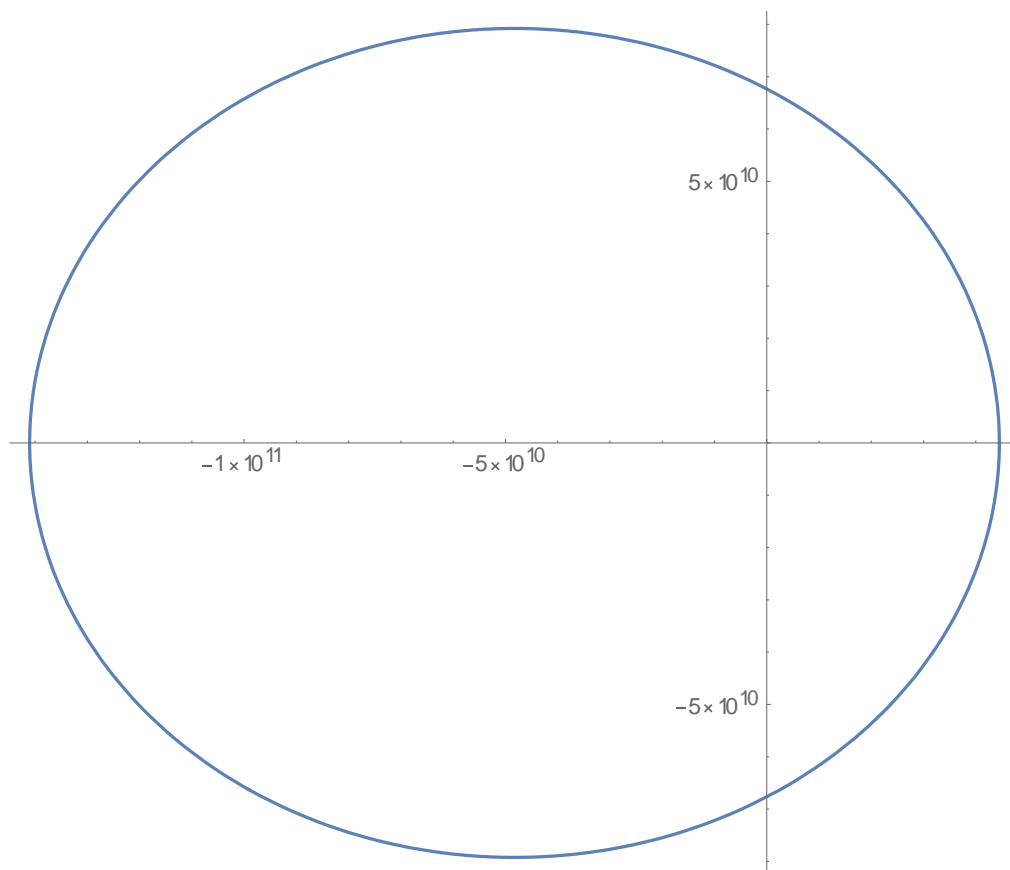


Рис.6. Орбита движения КА после совершения гравитационного маневра

Картину всех происходящих событий можно увидеть на рисунке 7 и 8.

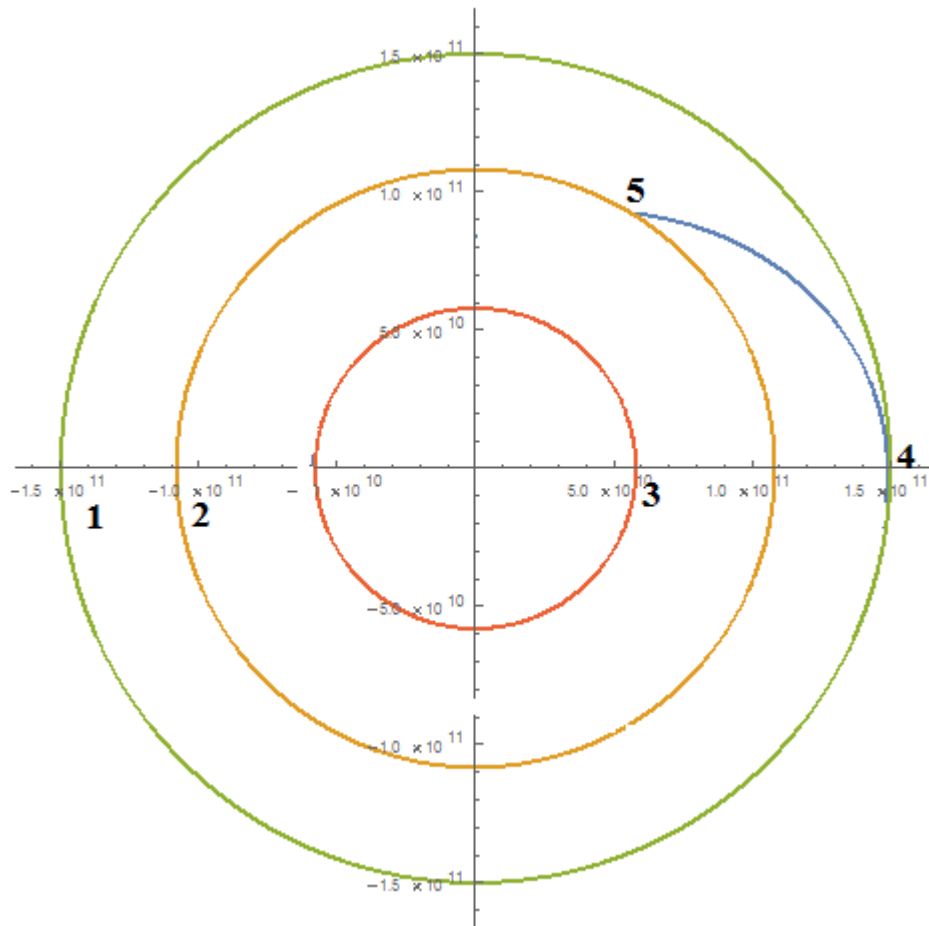


Рис.7. Траектория движения КА от момента отлёта от Земли до встречи с Венерой.

На рисунке 7 представлена траектория движения космического аппарата относительно Солнца от начала отлёта от земли (4) до встречи с Венерой (5).

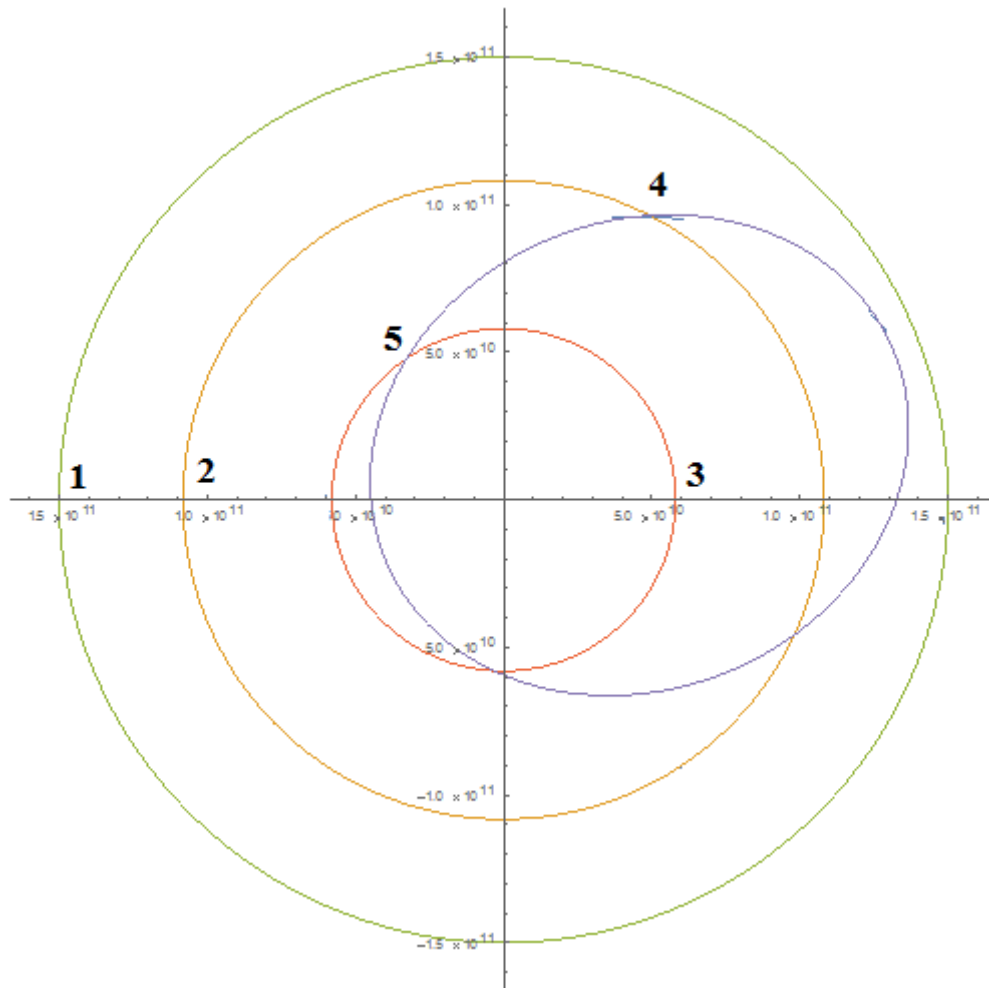


Рис.8. Орбита КА после совершения гравитационного маневра.

На рисунке 8 представлена орбита движения космического аппарата после совершения гравитационного маневра. 4 – отлёт от орбиты Венеры. 5 – встреча Меркурием.

Таким образом получаем траекторию движения космического аппарата с использованием гравитационного маневра (рис.9).

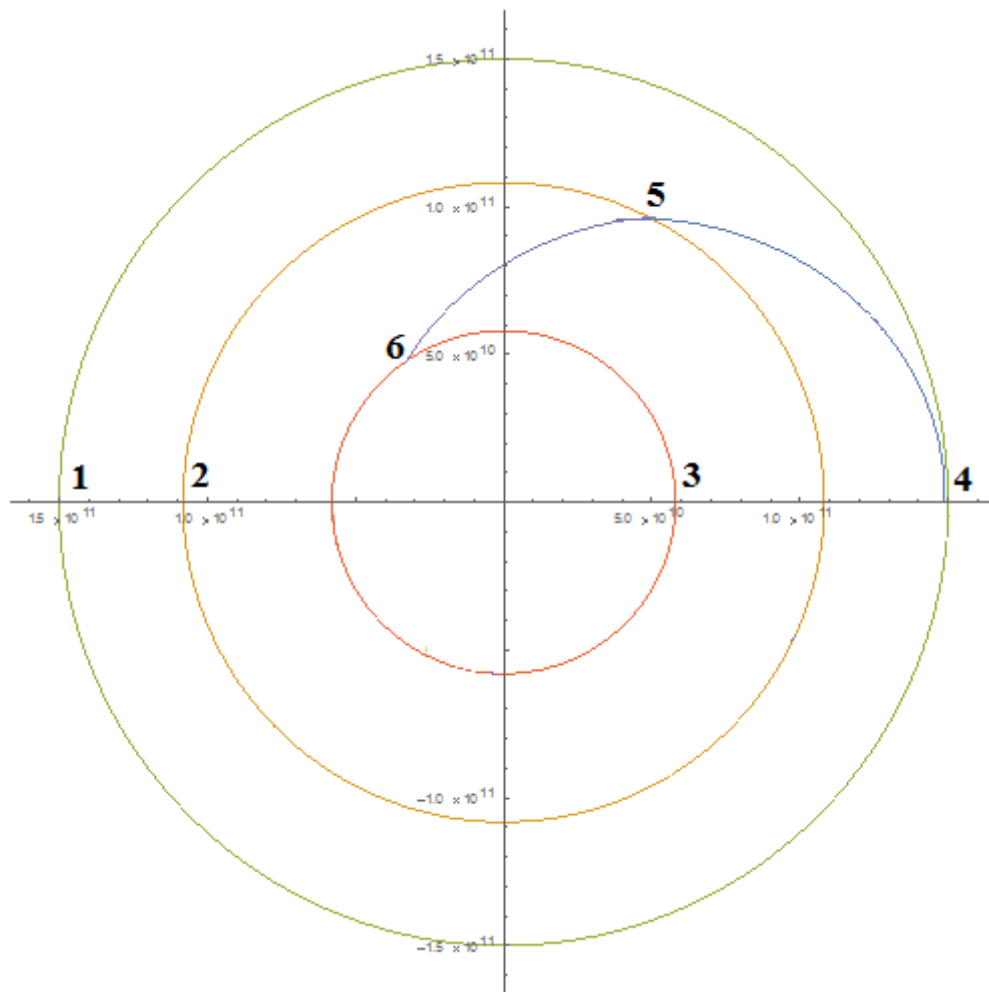


Рис.9. Траектория движения космического аппарата с использованием гравитационного маневра. 1, 2, 3 – орбита движения соответственно Земли, Венеры, Меркурия. 4 – отлёт КА от Земли. 5 – выполнение гравитационного маневра. 6 – встреча с Меркурием.

§3. Сравнение траекторий.

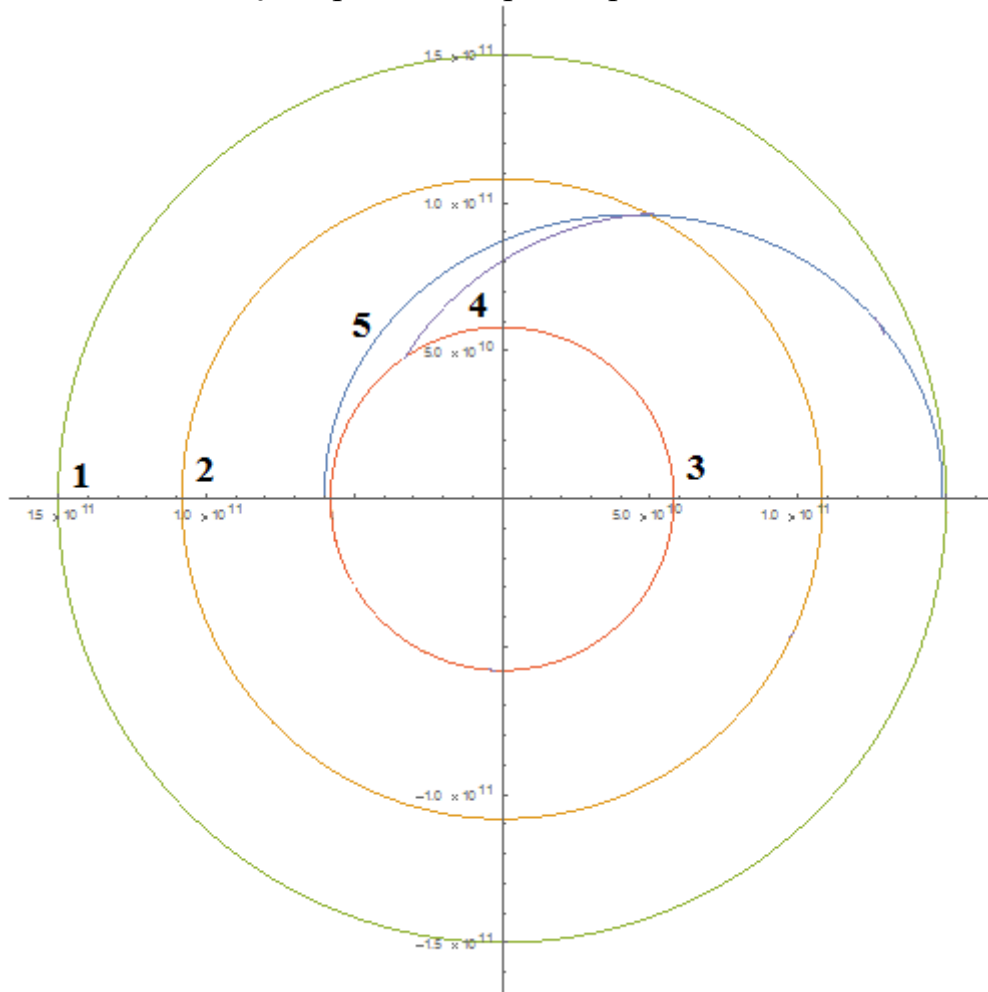


Рис.10. Сравнение двух траекторий.

Сравним две траектории на рисунке 10, 4 – Гомановскую и 5 – с использованием гравитационного маневра. Как можно заметить, при перемещении с использованием гравитационного маневра, аппарат несколько раньше пересекает орбиту Меркурия. Но пока что не известно на сколько раньше аппарат, движущийся по траектории с использованием маневра прилетит на Меркурий чем аппарат, перемещающийся по Гомановской траектории.

§4. Расчёт времени для перемещения по Гомановской траектории.

Воспользуемся уравнением Кеплера для эллиптической орбиты для определения времени перелёта от Земли до Меркурия. Уравнение выглядит

следующим образом: $t - t_n = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E - e \cdot \sin E)$, где

t_n - время прохождения через перицентр,

E – эксцентрическая аномалия (рис.5).

Формула для перехода от истинной аномалии к эксцентрической:

$$\operatorname{tg}(E/2) = \operatorname{tg}(\varphi/2) \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}};$$

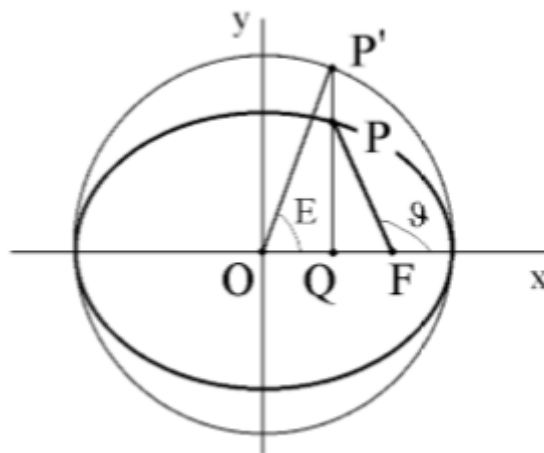


Рис.5 . Наглядный пример отличия двух углов.

Таким образом, зная угол истинной аномалии можно найти угол эксцентрической при нахождении времени перелёта от Земли к Венере и после гравитационного маневра от Венеры к Меркурию.

Но для начала найдем время перелета для Гомановской орбиты. Как известно в простейшем случае она пересекает две орбиты в апоцентре и перицентре. Значит угол истинной аномалии, как и эксцентрической будет

равен 180 градусов. Таким образом получаем что время, затраченное на перелет от Земли к Меркурию по Гомановской орбите будет равно 106 дней.

§5. Расчёт времени для перемещения с гравитационным маневром.

Теперь посчитаем время перелёта с Земли на Меркурий, используя гравитационный маневр. По тому же уравнению Кеплера найдём время от начала запуска до подлёта к Венере. Из картинки видно, что момент пересечения орбит движения аппарата и Венеры находится перпендикулярно выше центра эллипса орбиты аппарата. Соответственно угол истинной аномалии будет равен 90 градусам. Найдём сначала время от начала движения с перицентра до прохождения угла 270 градусов, так как в уравнении указано время прохождения перицентра минус текущее. Это время равно 174 дням. Найдём время прохождения угла 180 градусов. Это время равно 106 дней. Вычитая одно из другого приходим к выводу о том, что время движения аппарата от Земли до Венеры равно 68 дней.

Найдём время от места совершения гравитационного маневра до собственно сближением с Меркурием. Угол между перпендикуляром к центру эллипса и местом совершения маневра равен 54 градуса. Угол между перпендикуляром к центру эллипса и местом сближения с Меркурием равен 54 градусов. Таким образом считаем время с измененной большой полуосью и эксцентриситетом: сначала время прохождения угла 324 градуса равного 168 дням, потом время прохождения угла 216 градусов равного 148 дней. Вычитаем одно из другого и получается 20 дней. Получается, что общее время полета с совершением гравитационного маневра составляет 88 дней.

Заключение.

Таким образом, в работе получено, что разница между движением аппарата по Гомановской траектории и по траектории с использованием гравитационного маневра у Венеры составляет 18 дней. Результаты расчетов демонстрируют, что, если рассматривать проект, связанный с перелётом на Меркурий с использованием той же начальной скорости, предпочтение лучше отдать перемещению с помощью Гомановской траектории из-за расширенного окна запуска, т.к. подбирать время правильного местонахождения Венеры уже не требуется, если только из-за опасности столкнуться с нею выполняя перелёт, но в этом случае количество таких дат больше.

Во время работы были построены все необходимые орбиты и траектория движения космического аппарата с использованием мат пакета, осуществлён гравитационный маневр вблизи Венеры с учетом эффективного расстояния от неё для ликвидации опасности столкновения с ней, были проанализированы две траектории движения аппарата и сделаны соответствующие выводы об эффективности использования одной из них.

Список используемой литературы.

1. Мирер С.А. Механика космического полёта. Орбитальное движение. Учебно-методическое пособие. 2013. 106 с.
2. Астрономия из первых рук [электронный ресурс] – Режим доступа: URL: http://crydee.sai.msu.ru/Universe_and_us/4num/v4pap2.htm
3. ТЕХНОЛОГИИ и ДОСТИЖЕНИЯ: ОРБИТА ЗЕМЛИ [электронный ресурс] – Режим доступа: URL: <http://galspace.spb.ru/orbita/12.htm>

Abstract

This research is devoted to the problem of the fuel-related travel in space.

The main subject of it is the behaviour of a spacecraft in the space using the gravitational maneuvering.

The aim of the research is:

- to analyze and to compare the fuel consumption of a spacecraft using the gravitational maneuver and without it

To achieve the aim it was necessary to accomplish the following:

- to study the behaviour of the spacecraft moving from the Earth to Mercury using the gravitational maneuver of Venus.
- to analyze the results.

During the research was found out that that the flight with the maneuver to Venus is really less expensive in time.

It should be noted that during the flight along the Hohmann trajectory, it was necessary to double speed to the spacecraft with its engines, in contrast to the trajectory using the gravitational maneuver, which was not used its own thrust after take-off from the Earth.

In conclusion it should be noted that the objectives set in the beginning of the research have been accomplished, namely it was turned out that the flight along a given trajectory using the gravitational maneuver lasts 88 days. The flight along the Hohmann trajectory lasts 106 days. Obviously, it is more profitable to use the gravitational maneuver but you need to wait for the launch window.