

Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников
по политехническим, естественным, математическим дисциплинам
для учащихся 9-11 классов

направление:

математическое моделирование

Определение траекторий движения космических тел

Выполнили:

Нечаева Валерия Андреевна,
Окулова Регина Александровна,
11 класс МБОУ лицей 1 г. Пермь

Научный руководитель:

к.ф.м.н. каф. ММСП
ПНИПУ, Янц Антон Юрьевич

Пермь- 2018

Оглавление

Введение.	3
§1. Математическая постановка.	5
§2. Результаты моделирования.	12
Аннотация.	16
Заключение.	17
Список использованной литературы.	18

Введение

Небо и звезды с древнейших времен привлекали внимание людей. За ними наблюдали, ими любовались, а ученые строили различные гипотезы. И однажды было замечено, что каждая звезда на небе время от времени меняет свое положение. Этот немаловажный факт заставил ученых задуматься о том, что Земля или небо каким-то образом движутся.

Античные ученые робко предполагали, что Земля и некоторые другие планеты вращаются вокруг Солнца. Однако твердо гелиоцентризм основался лишь в шестнадцатом веке. Произошло это благодаря польскому ученому-астроному Николаю Копернику, кто доказал, что Земля вращается вокруг Солнца.

Гелиоцентрическая система мира — это представление об устройстве мироздания. В узком смысле этого слова, оно заключается в том, что Солнце расположено в центре Вселенной, а Земля совершает по крайней мере два вида движения: годовое вокруг Солнца и суточное вокруг своей оси; звезды неподвижны относительно Солнца.

Мы решили самостоятельно, с помощью математических подсчетов и моделирования, убедиться в том, что Земля вращается вокруг Солнца, а Луна вокруг Земли и Солнца.

Цель: определить траектории движения Земли относительно Солнца, Луны относительно Солнца, Луны относительно Земли и Солнца в любой момент времени.

Для того чтобы достичь поставленной цели, делаем **концептуальную постановку**

Примем, что в начальный момент времени Солнце покоится. Земля, Луна и Солнце находятся на одной линии, а их начальные скорости направлены перпендикулярно радиус-вектору, соединяющему их. Земля под действием силы гравитации движется вокруг Солнца, а Луна, под действием той же силы, движется вокруг Земли и Солнца, Солнце под действием всех этих сил тоже движется.

Из концептуальной постановки следуют следующие **гипотезы**

- а) Примем, что Земля, Солнце и Луна - материальные точки, массами M_3 , $M_с$, M_l .

- b) Трение и сопротивление отсутствуют (т.к. в космическом пространстве вакуум)
- c) Действует гравитация
- d) Теория относительности не используется
- e) Движение описывается механикой Ньютона
- f) Все действие происходит в трехмерном пространстве

§1. Математическая постановка

Для наглядного представления поставленной задачи мы решили создать чертеж системы этих тел в координатной плоскости в начальный момент времени. Началом координат будет являться Солнце.

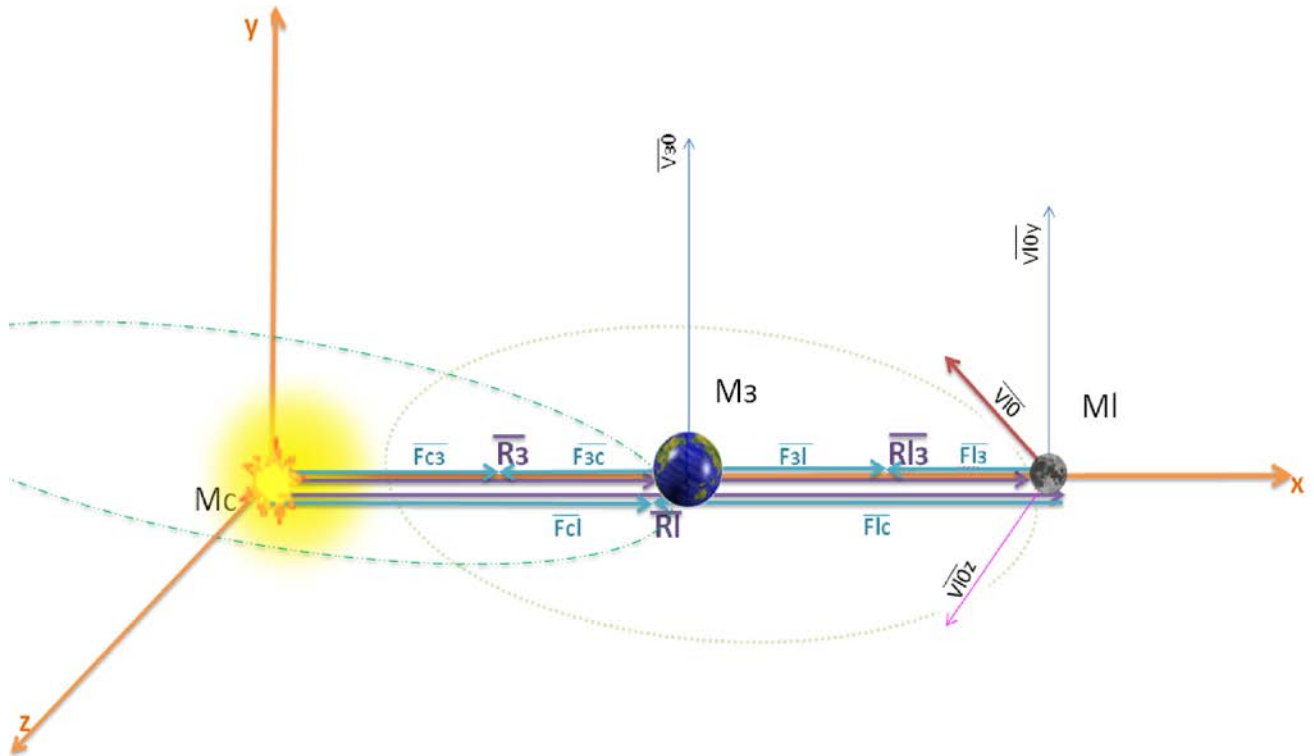


Рисунок 1

M_c - масса Солнца

M_z - масса Земли

M_l - масса Луны

$\overline{R_z}$ - расстояние между Солнцем и Землей

$\overline{R_{l3}}$ - расстояние между Луной и Землей

$\overline{R_l}$ - расстояние между Солнцем и Луной

$\overline{V_{l0}}$ - скорость Луны в начальный момент времени

$\overline{V_{z0}}$ - скорость Земли в начальный момент времени

$|\overline{F_{c3}}| = |\overline{F_{z3}}|$ - сила гравитационного взаимодействия Солнца и Земли

$|\overline{F_{c1}}| = |\overline{F_{lc}}|$ - сила гравитационного взаимодействия Солнца и Луны

$|\overline{F_{3l}}| = |\overline{Fl_3}|$ - сила гравитационного взаимодействия Луны и Земли

$|\overline{Fl_3}| = G \frac{M_3 M_l}{Rl_3^2}$ Сила направлена по вектору Rl_3

$$\begin{aligned}\overline{Rl_3} &= \overline{Rl} - \overline{R_3} \\ |\overline{Rl_3}| &= \sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \\ \overline{Fl_3} &= -|\overline{Fl_3}| \frac{\overline{Rl_3}}{|\overline{Rl_3}|}\end{aligned}$$

$$\overline{Fl_3} = -G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \frac{\overline{Rl} - \overline{R_3}}{\sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2}} \quad (1)$$

$$\overline{F_{3l}} = |\overline{Fl_3}| \frac{\overline{Rl_3}}{|\overline{Rl_3}|}$$

$$\overline{F_{3l}} = G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \frac{\overline{Rl} - \overline{R_3}}{\sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2}} \quad (2)$$

$|\overline{Flc}| = G \frac{M_c M_l}{Rlc^2}$ Сила направлена по вектору Rlc

$$\begin{aligned}\overline{Rlc} &= \overline{Rl} - \overline{Rc} \\ |\overline{Rlc}| &= \sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \\ \overline{Flc} &= -|\overline{Flc}| \frac{\overline{Rlc}}{|\overline{Rlc}|}\end{aligned}$$

$$\overline{Flc} = -G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \frac{\overline{Rl} - \overline{Rc}}{\sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2}} \quad (3)$$

$$\overline{Fcl} = |\overline{Flc}| \frac{\overline{Rlc}}{|\overline{Rlc}|}$$

$$\overline{Fcl} = G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2} \frac{\overline{Rl} - \overline{Rc}}{\sqrt{(Rlx - R_3x)^2 + (Rly - R_3y)^2 + (Rlz - R_3z)^2}} \quad (4)$$

$$|\overline{F_{3c}}| = G \frac{M_3 M_c}{R_{3c}^2} \quad \text{Сила направлена по вектору } R_{3c}$$

$$\overline{R_{3c}} = \overline{R_3} - \overline{R_c}$$

$$|\overline{R_{3c}}| = \sqrt{(R_{lx} - R_{3x})^2 + (R_{ly} - R_{3y})^2 + (R_{lz} - R_{3z})^2}$$

$$\overline{F_{3c}} = -|\overline{F_{3c}}| \frac{\overline{R_{3c}}}{|\overline{R_{3c}}|}$$

$$\overline{F_{3c}} = -G \frac{M_3 M_c}{(R_{lx} - R_{3x})^2 + (R_{ly} - R_{3y})^2 + (R_{lz} - R_{3z})^2} \frac{\overline{R_3} - \overline{R_c}}{\sqrt{(R_{lx} - R_{3x})^2 + (R_{ly} - R_{3y})^2 + (R_{lz} - R_{3z})^2}} \quad (5)$$

$$\overline{F_{c3}} = |\overline{F_{3c}}| \frac{\overline{R_{3c}}}{|\overline{R_{3c}}|}$$

$$\overline{F_{c3}} = G \frac{M_3 M_c}{(R_{lx} - R_{3x})^2 + (R_{ly} - R_{3y})^2 + (R_{lz} - R_{3z})^2} \frac{\overline{R_3} - \overline{R_c}}{\sqrt{(R_{lx} - R_{3x})^2 + (R_{ly} - R_{3y})^2 + (R_{lz} - R_{3z})^2}} \quad (6)$$

$$M_3 \ddot{\overline{R}}_3 = \overline{F_{3c}} + \overline{F_{3l}} \quad (7)$$

$$M_c \ddot{\overline{R}}_c = \overline{F_{c3}} + \overline{F_{cl}} \quad (8)$$

$$M_l \ddot{\overline{R}}_l = \overline{F_{lc}} + \overline{F_{lz}} \quad (9)$$

$$\begin{cases} M_3 \ddot{\overline{R}}_3 = \overline{F_{3c}} + \overline{F_{3l}} \\ M_c \ddot{\overline{R}}_c = \overline{F_{c3}} + \overline{F_{cl}} \\ M_l \ddot{\overline{R}}_l = \overline{F_{lc}} + \overline{F_{lz}} \end{cases}$$

Распишем, опираясь на Рисунок 1, векторные уравнения, представленные выше, по X и Y компонентам:

$$\begin{aligned}
Rl_{3x} &= Rlx - R_{3x}; & Rlcx &= Rlx - Rcx; & R_{3cx} &= R_{3x} - Rcx; \\
Rl_{3y} &= Rly - R_{3y}; & Rlcy &= Rly - Rcy; & R_{3cy} &= R_{3y} - Rcy; \\
Rl_{3z} &= Rlz - R_{3z}; & Rlcz &= Rlz - Rcz; & R_{3cz} &= R_{3z} - Rcz;
\end{aligned}$$

$$M_3 \ddot{\bar{R}}_3 x = F_{3cx} + F_{3lx}; \quad M_l \ddot{\bar{R}}_l x = Flcx + Fl_{3x}; \quad M_c \ddot{\bar{R}}_c x = Fclx + Fc_{3x};$$

$$M_3 \ddot{\bar{R}}_3 y = F_{3cy} + F_{3ly}; \quad M_l \ddot{\bar{R}}_l y = Flcy + Fl_{3y}; \quad M_c \ddot{\bar{R}}_c y = Fcly + Fc_{3y};$$

$$M_3 \ddot{\bar{R}}_3 z = F_{3cz} + F_{3lz}; \quad M_l \ddot{\bar{R}}_l z = Flcz + Fl_{3z}; \quad M_c \ddot{\bar{R}}_c z = Fclz + Fc_{3z};$$

$$\begin{array}{lll}
R_{3x}[0] = R_{3x}0; & Rcx[0] = Rcx0; & Rlx[0] = Rlx0; \\
R_{3y}[0] = R_{3y}0; & Rcy[0] = Rcy0; & Rly[0] = Rly0; \\
R_{3z}[0] = R_{3z}0; & Rcz[0] = Rcz0; & Rlz[0] = Rlz0; \\
R_{3x}'[0] = V_{3x}0; & Rcx'[0] = Vcx0; & Rlx'[0] = Vlx0; \\
R_{3y}'[0] = V_{3y}0; & Rcy'[0] = Vcy0; & Rly'[0] = Vly0; \\
R_{3z}'[0] = V_{3z}0; & Rcz'[0] = Vcz0; & Rlz'[0] = Vlz0;
\end{array}$$

Подставим в формулу 7 формулы 5 и 2 и распишем по X и Y компонентам

$$\begin{aligned}
M_3 \ddot{\bar{R}}_3 &= -G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2} \frac{\bar{R}_3 - \bar{R}_c}{\sqrt{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2}} - \\
&-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2} \frac{\bar{R}_l - \bar{R}_3}{\sqrt{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2}}
\end{aligned}$$

OX:

$$\begin{aligned}
M_3 \ddot{\bar{R}}_3 x &= -G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2} \frac{\bar{R}_{3x} - \bar{R}_{cx}}{\sqrt{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2}} - \\
&-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2} \frac{\bar{R}_{lx} - \bar{R}_{3x}}{\sqrt{(Rlx - R_{3x})^2 + (Rly - R_{3y})^2 + (Rlz - R_{3z})^2}}
\end{aligned}$$

OY:

$$M_3 \ddot{\bar{R}}_3 y = -G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3y - \bar{R}cy}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$

$$-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}ly - \bar{R}3y}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OZ:

$$M_3 \ddot{\bar{R}}_3 z = -G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3z - \bar{R}cz}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$

$$-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lz - \bar{R}3z}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

Подставим в формулу 8 формулы 6 и 4 и распишем по X и Y компонентам

$$M_c \ddot{\bar{R}}_c = G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3 - \bar{R}c}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} +$$

$$+G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}l - \bar{R}c}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OX:

$$M_c \ddot{\bar{R}}_c x = G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3x - \bar{R}cx}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} +$$

$$+G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lx - \bar{R}cx}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OY:

$$M_c \ddot{\bar{R}}_c y = G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3y - \bar{R}cy}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} +$$

$$+ G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}ly - \bar{R}cy}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OZ:

$$M_c \ddot{\bar{R}}_c z = G \frac{M_3 M_c}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}3z - \bar{R}cz}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} +$$

$$+ G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lz - \bar{R}cz}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

Подставим в формулу 9 формулы 3 и 1 и распишем по X и Y компонентам

$$M_l \ddot{\bar{R}}_l x = -G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}l - \bar{R}c}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$

$$- G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}l - \bar{R}3}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OX:

$$M_l \ddot{\bar{R}}_l x = -G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lx - \bar{R}cx}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$

$$- G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lx - \bar{R}3x}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OY:

$$M_l \ddot{\bar{R}}_l y = -G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}ly - \bar{R}cy}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$
$$-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}ly - \bar{R}3y}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

OZ:

$$M_l \ddot{\bar{R}}_l z = -G \frac{M_c M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lz - \bar{R}cz}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}} -$$
$$-G \frac{M_3 M_l}{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2} \frac{\bar{R}lz - \bar{R}3z}{\sqrt{(Rlx - R3x)^2 + (Rly - R3y)^2 + (Rlz - R3z)^2}}$$

§2. Результаты моделирования

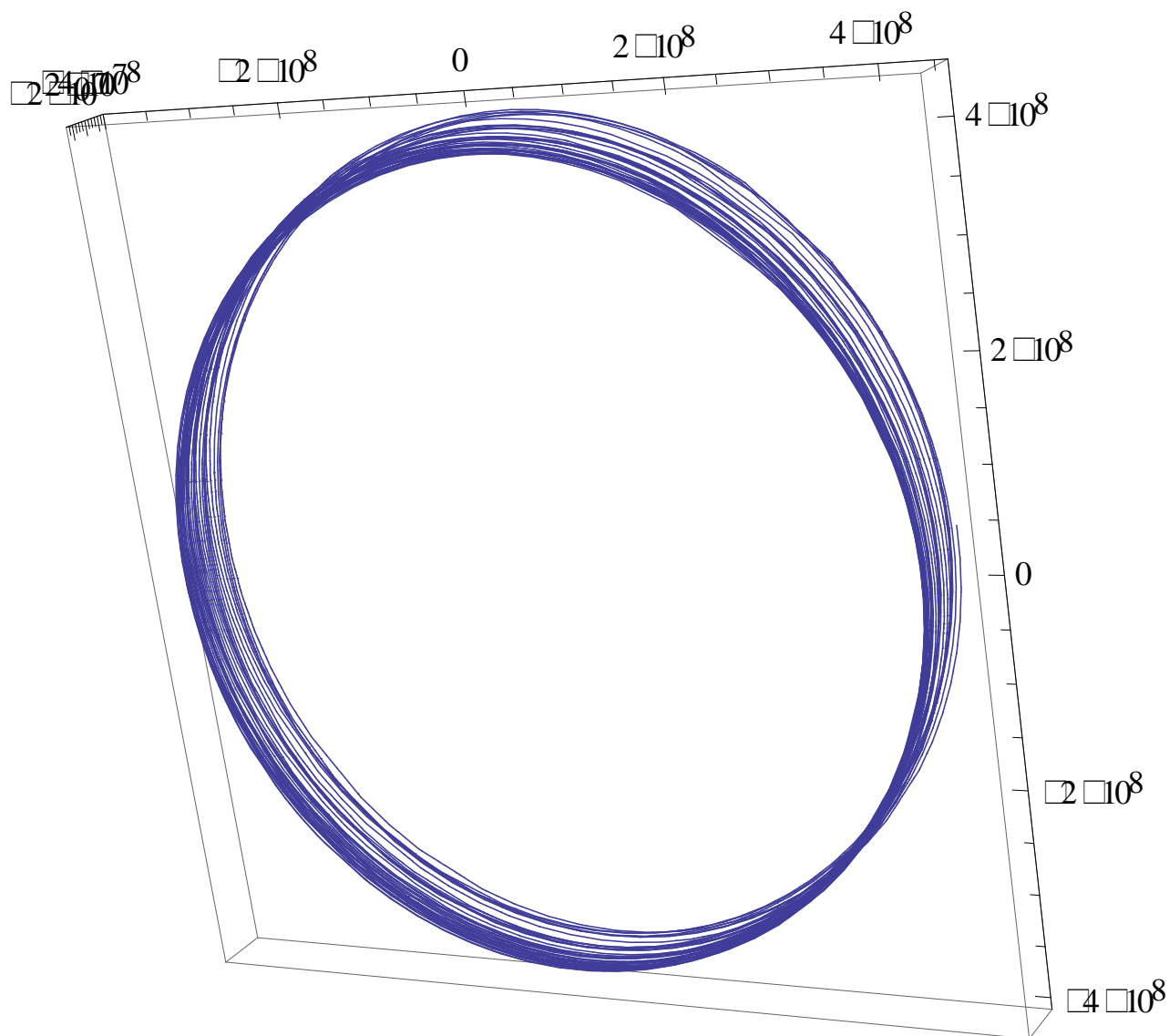


Рисунок 2

Траектория движения Луны вокруг Солнца за три года. Луна совершает вращательные движения вокруг Земли, которая в свою очередь вращается вокруг Солнца. Поэтому траектория движения Луны вокруг Солнца выглядит как окружность, образованная путем вращения точки по спирали.

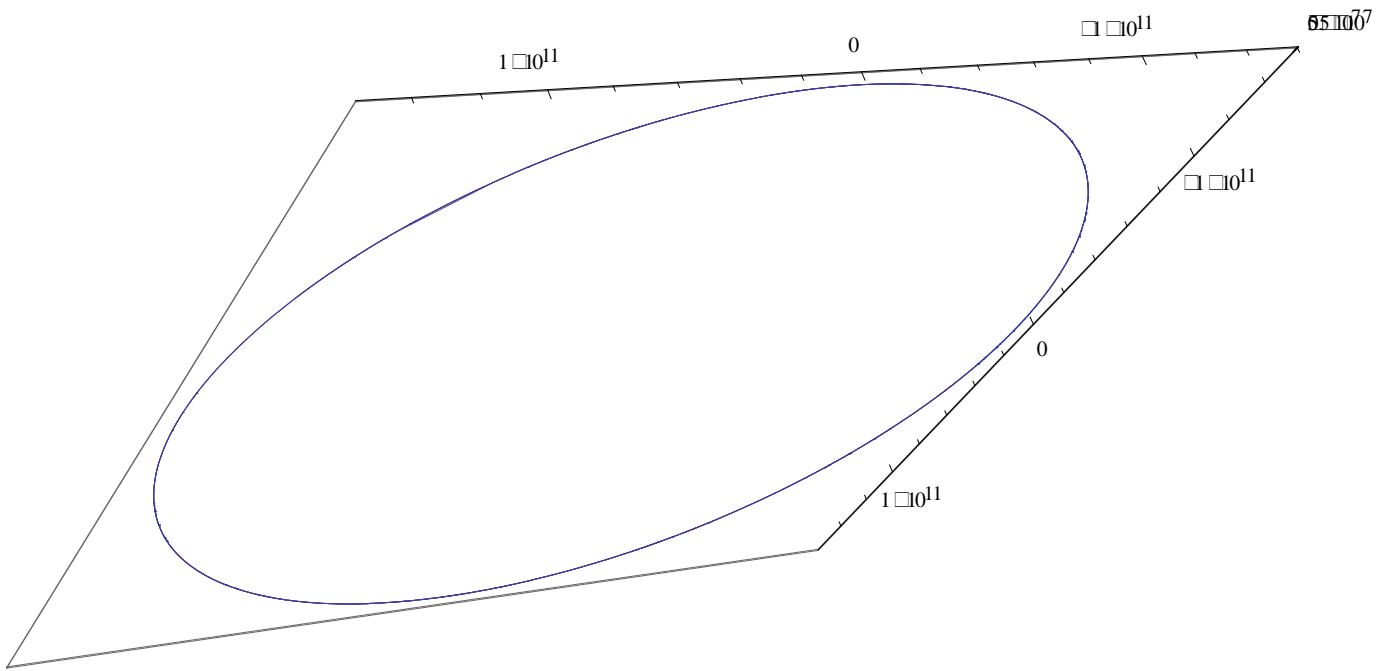


Рисунок 3

Траектория движения Земли вокруг Солнца за три года. Полученная траектория больше похожа на несколько окружностей с одинаковым радиусом, наложенных друг на друга. На самом же деле это спираль, но она не прослеживается явно от того, что смещение траектории от предыдущей значительно меньше радиус- вектора между Землей и Солнцем.

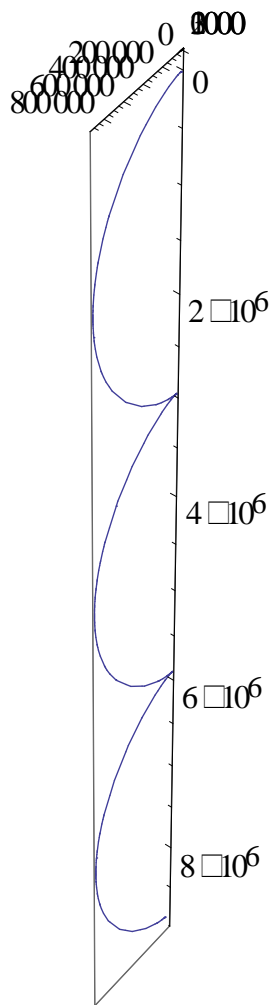


Рисунок 4

Траектория движения Солнца за три года представляет собой ломанную, образованную тремя дугообразными линиями. Несмотря на то, что центром всей системы тел является положение Солнца в начальный момент времени, с течением времени Солнце также меняет свое положение. Это происходит потому, что не только Солнце действует на космические тела, но и тела действуют на Солнце, но из-за того что массы тел значительно меньше массы Солнца, Солнце перемещается на гораздо меньшие расстояния, чем Земля и Луна

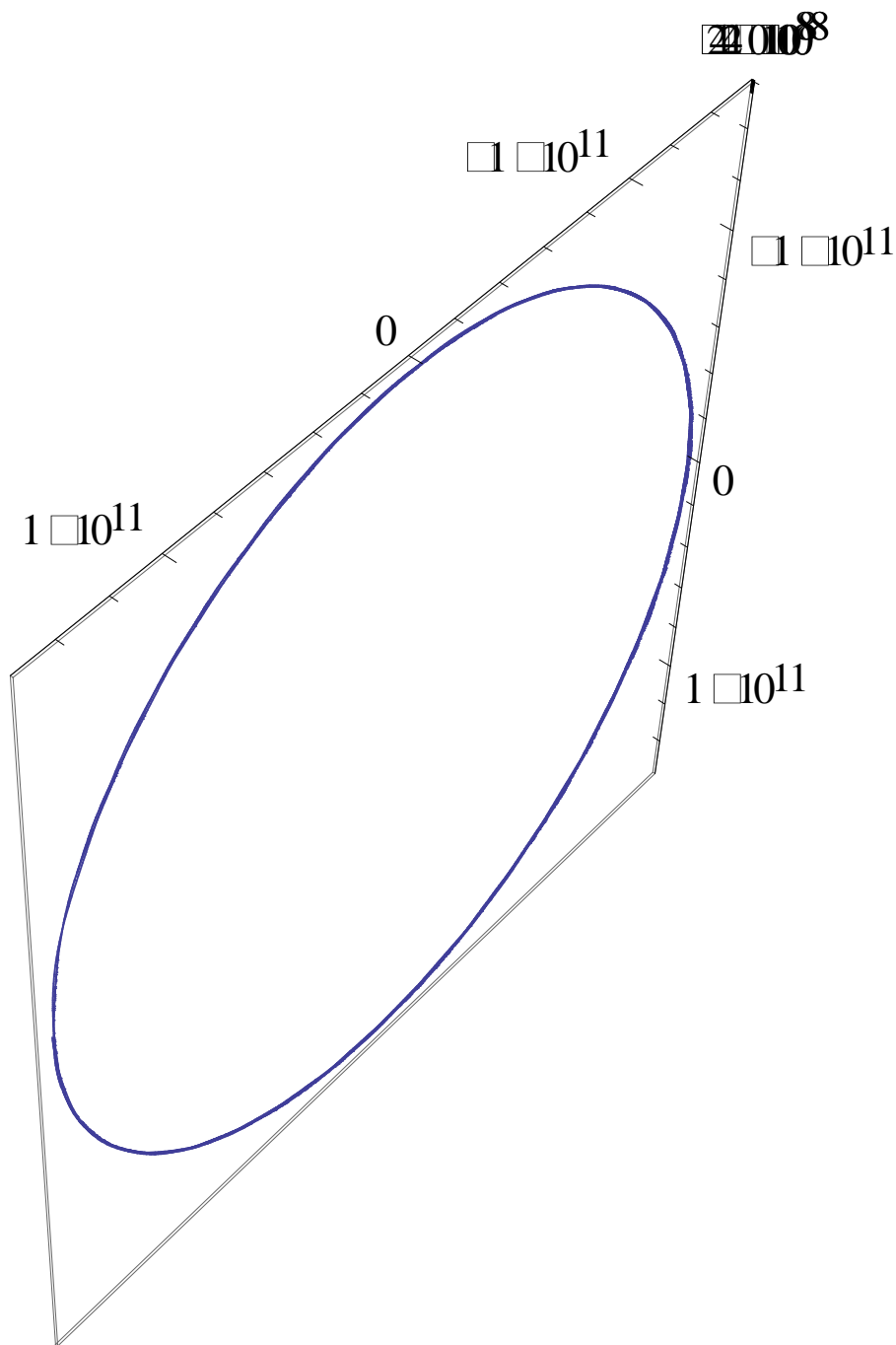


Рисунок 5

Траектория движения Луны вокруг Земли за три года представляет собой спираль, меньшего обхвата, чем траектория движения Земли вокруг Солнца. Потому что радиус- вектор, соединяющий Землю с Луной, меньше радиус- вектора, соединяющего Солнце с Землей. Полученная траектория также больше похожа на несколько окружностей с одинаковым радиусом, наложенных друг на друга. Но и это также спираль, которая не прослеживается явно от того, что смещение траектории значительно меньше радиус- вектора между Землей и Луной.

Annotation

The main theme of this research work is the modelling of the movement of space bodies.

The purpose of the work is the determination of the trajectories of the movement of the Earth, the Sun and the Moon under the influence of the gravitation forces at any moment.

To fulfil the task it was necessary to make a conceptual problem definition, to make the drawing of the system in the initial instant, to work out differential equations of the movement of the bodies, to analyse the received results and to draw the conclusions.

During the modelling operation, the trajectories of the movement were received. Then the trajectories were studied and described in detail.

This work is up-to-date as the determination of the trajectories of the movement of space bodies promotes the development of space exploration.

Заключение

Для решения поставленной задачи мы работали в программе Wolfram Mathematica 7. Сначала мы рассматривали 3 системы по два тела (Солнце - Земля, Солнце – Луна, Земля - Луна), затем мы по каждой системе находили решения и строили траектории движения тел. На заключительном этапе мы все системы свели в одну общую, состоящую из трех тел, программа решила эту систему и построила траектории движения всех тел.

В ходе работы мы достигли поставленной цели, получили траектории движения космических тел относительно Солнца.

Решение нашей задачи проходило в несколько этапов:

1. Концептуальная постановка
2. Графическое моделирование
3. Математическое моделирование
4. Заведение полученных уравнений в программу
5. Получение результатов
6. Описание полученных траекторий

Больше всего в процессе создания нашей работы нам понравилось взаимодействовать с программным продуктом Wolfram Mathematica 7. И хоть мы и не совершили какого-то нового научного открытия, нам удалось укрепить собственные фундаментальные знания в области физики, а также поработать в незнакомой ранее области-области математического моделирования. Надеемся в дальнейшем продолжать работать в сфере математического моделирования и решать уже более значимые задачи.

Список использованной литературы

- 1) Бережко, Е.Г. Введение в физику космоса [Текст] / Е. Г. Бережко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 263с.
- 2) Гелиоцентрическая система мира [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/>, свободный. Загл. с экрана. (дата обращения: 20.06.2017).
- 3) Гравитационное взаимодействие [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://nuclphys.sinp.msu.ru/>, свободный. - Загл. с экрана. (дата обращения: 15.06.2017).
- 4) Кто доказал, что Земля вращается вокруг Солнца [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://slavculture.ru/>, свободный. Загл. с экрана. (дата обращения: 13.06.2017).