

Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников  
по политехническим, естественным, математическим дисциплинам для  
учащихся 9-11 классов

**Математическое моделирование**

<<Математическое моделирование движения судна>>

**Выполнил:**

Порубов Виталий Александрович

МБОУ "Лицей №1", г. Перми,

**Научный руководитель:**

Анфёров Сергей Дмитриевич

Учитель физики, ст.пр. ПНИПУ

Пермь. 2018

Введение .....	3
Глава 1. Составление уравнения движения судна.....	4
§1. Допущения.....	4
§2.Силы действующие на судно.....	4
§3.Система дифференциальных уравнений.....	6
Глава 2.Решение системы дифференциальных уравнений.....	7
§1.Выбор судна.....	7
§2.Методы решения дифференциальных уравнений .....	8
§3.Графики.....	10
Заключение .....	11
Список использованной литературы.....	12

## **Введение.**

С появлением вычислительной техники появилась возможность обрабатывать большое количество данных, что произвело резкий рывок во всех областях. Несомненно, это повлияло и на судостроительство: возможность моделирования физических процессов дает большой ряд преимуществ. Например, компьютерное моделирование поведения судна на поверхности воды существенно снижает затраты на реальные испытания. Кроме того, с помощью ЭВМ стало возможным создание навигационной системы прямо на борту судна, возможно создание спутниковой связи и т.д.

Для описания движения судна, необходимо знать, как движутся различные его точки. Поскольку разные точки судна движутся по-разному, то для исследования процесса маневрирования достаточно ограничиться описанием движения только одной материальной точки центра тяжести судна. В ней сосредоточена масса судна.

Актуальность:

В современном мире многие средства перемещения используют автопилоты. Средства такие как машины, самолёты и т.д.

Не исключением являются и суда.

Для работы автопилотов нужны представления о движении судна. В работе строится математическая модель движения, которая может быть использована при создании автопилота

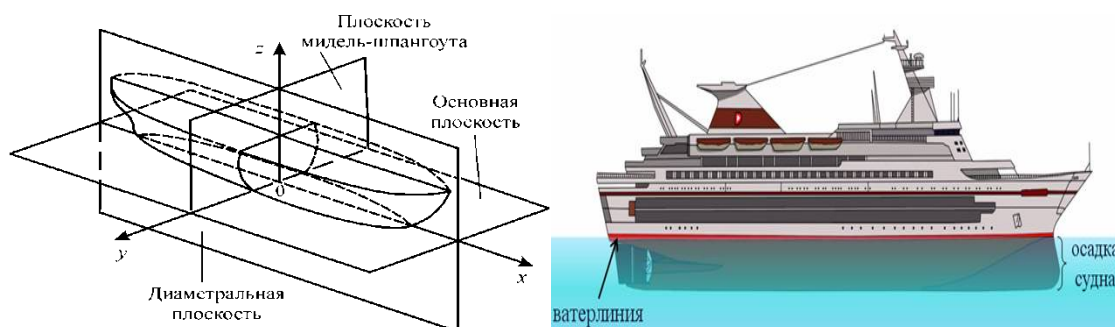
Цель:

Построить математическую модель движения судна

# Глава 1. Составление уравнения движения судна.

## §1. Допущения.

При составлении уравнений динамики надводного судна обычно используют следующие допущения. Перемещение реального судна принимают эквивалентным движению его погруженной части в плоскости ватерлинии без учета волнообразования на свободной поверхности воды. Подводную часть корпуса считают симметричной относительно плоскости мидель-шпангоута и диаметральной плоскости судна, а центр массы и центр бокового сопротивления судна - находящимися в плоскости мидель-шпангоута.



Полагают также, что крен у судна отсутствует, что скорость хода не сказывается на дифференте и средней осадке, а ускорения в движении судна не влияют на гидродинамические характеристики средств управления. Так же для расчета сил действующих на судно сделаем допущение, что транспортное средство движется только передним ходом и не учитывает эффект присоединения масс.

## §2. Силы действующие на судно. [1]

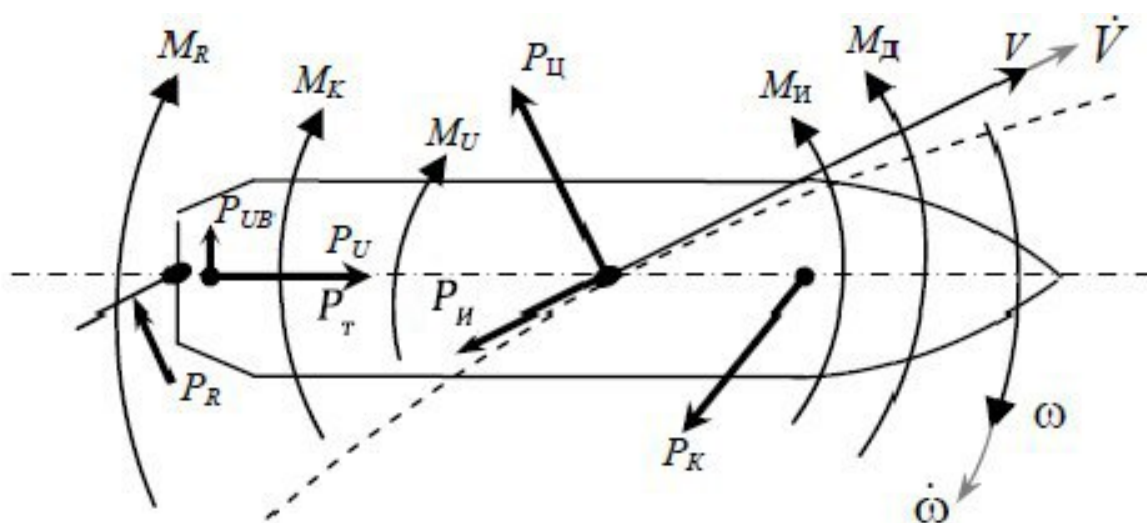


Рисунок 1. Силы и моменты на корпусе судна

1. Продольная и боковая составляющие инерциальной силы

$$P_{\Lambda L} = -m_L \frac{dV_L}{dt} \quad P_{\Lambda B} = -m_B \frac{dV_B}{dt}$$

2. Момент инерции относительно ЦМ

$$M_I = -J_\omega \frac{d\omega}{dt}$$

3. Центробежная сила

$$P_{\text{ЦЛ}} = -m_L \omega_{\text{ПУ}} V_L \quad P_{\text{ЦВ}} = -m_B \omega_{\text{ПУ}} V_B$$

4. Сила упора винта

$$P_U = K_{k0} (c_m V_n^2 - (c_m - 1) V_L^2)$$

5. Боковая сила винта

$$P_{UB} = c_B P_U$$

6. Момент от боковой силы винта

$$M_U = P_{UB} l_S$$

7. Момент демпфирующей силы

$$M_D = - \left( C_0 \omega^2 + C_V \omega * \sqrt{(V_B^2 + V_L^2)} \right)$$

8. Момент от позиционной силы

$$M_K = P_{rB} l_K$$

9. Продольная и боковая составляющие позиционной силы

$$P_{KB} = F_K \cos \alpha + R_K \sin \alpha \quad P_{KL} = F_K \sin \alpha - R_K \cos \alpha$$

10. Момент от действия руля

$$M_R = P_{rB} l_R$$

11. Продольная и боковая силы на руле

$$P_{RL} = F_R \sin(\delta\beta) - R_R \cos(\delta\beta) \quad P_{RB} = F_R \cos(\delta\beta) - R_R \sin(\delta\beta)$$

12. Сила тяги

$P_T$ -задаём сами

### §3. Система дифференциальных уравнений.

При образовании модели динамики судна используется принцип Даламбера, согласно которому:

$$\begin{cases} \sum P_{iL} = 0 \\ \sum P_{iB} = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sum P_{iL}$ ,  $\sum P_{iB}$  - суммы проекций на оси, действующих на судно сил;  $\sum M_i$  - суммарный относительно ЦМ (центр массы) судна момент сил на корпусе. Суммы проекций воздействий на корпус включают в себя продольные и поперечные составляющие, а также моменты, перечисленных выше сил (инерционных, гидродинамических, управляющих и возмущающих):

$$\begin{cases} \sum P_{iL} = P_{\Lambda L} + P_{\Psi L} + P_{K L} + P_U + P_{R L} + P_T \\ \sum P_{iB} = P_{\Lambda B} + P_{\Psi B} + P_{K B} + P_{U B} + P_{R B} \\ \sum M_i = M_{\text{И}} + M_{\text{К}} + M_{\text{Д}} + M_U + M_R \end{cases} \quad (2)$$

Оставим в левой части (2) выражения инерционных сил, обусловленных изменением линейной и угловой скорости:

$$\begin{cases} m_L \frac{dV_L}{dt} = P_{\Psi L} + P_{K L} + P_U + P_{R L} + P_T \\ m_B \frac{dV_B}{dt} = P_{\Psi B} + P_{K B} + P_{U B} + P_{R B} \\ J_{\omega} \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{К}} + M_{\text{Д}} + M_U + M_R \end{cases} \quad (3)$$

В систему (3) подставим все формулы и получим систему уравнений движения надводного судна в следующем виде:

$$\begin{cases} m_L \frac{dV_L}{dt} = -m_L \omega_{\text{ПУ}} V_L + P_T + F_K \sin \alpha - R_K \cos \alpha + K_{k0} (c_m V_n^2 - (c_m - 1) V_L^2) + F_R \sin(\delta\beta) - R_R \cos(\delta\beta) \\ m_B \frac{dV_B}{dt} = -m_B \omega_{\text{ПУ}} V_B + F_K \cos \alpha + R_K \sin \alpha + c_B P_U + F_R \cos(\delta\beta) - R_R \sin(\delta\beta) \\ J_{\omega} \frac{d\omega}{dt} = P_{\text{ГБ}} l_K + - \left( C_0 \omega^2 + C_V \omega * \sqrt{(V_B^2 + V_L^2)} \right) + c_B P_U l_S + (F_R \cos(\delta\beta) - R_R \sin(\delta\beta)) * l_R \end{cases}$$

## Глава 2. Решение системы дифференциальных уравнений.

### §1. Выбор судна.

Для упрощения решения системы было выбрано определённое судно. Это судно проекта 588



И при решении системы использовались характеристики именно этого судна

Расстояние между перпендикулярами	L1	90	м
Максимальная ширина у ватерлинии	B	11	м
Вертикальное расстояние от дна корпуса до ватерлинии	T	2,45	м
Общий коэффициент полноты	$\delta$	0,785	
Длина судна	L	95,8	м
Максимальная скорость поворота руля	$\omega$	0,05	рад/с
Постоянная времени ИУ	$T_\eta$	0,5	с
Коэффициент передачи	$k_\Omega$	0,7	
Удельный коэффициент подъемной силы	$k_f$	0,8	
Удельный коэффициент силы сопротивления на корпусе с углом атаки не равном 0	$k_r$	0,5	
Диаметр винта	$D_p$	1,6	м
Коэффициент силы сопротивления руля	$C_{r0}$	0,005	
Высота руля	$h_r$	1,8	м
Максимальная толщина руля	$b_r$	0,4	м

## §2. Методы решения дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции  $y(x)$ . Он является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y} = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x=x_0, y(x_0)=y_0$$

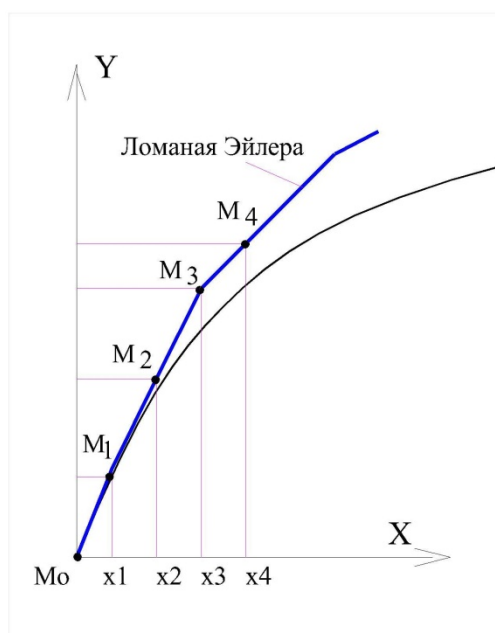
Требуется найти решение уравнения на отрезке  $[a, b]$ .

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей и получим последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $x_i = x_0 + ih$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ), а  $h=(b-a)/n$  – шаг интегрирования.

В методе Эйлера приближенные значения  $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$  вычисляются последовательно по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

При этом искомая интегральная кривая  $y=y(x)$ , проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , заменяется ломаной  $M_0M_1M_2\dots$  с вершинами  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ); каждое звено  $M_iM_{i+1}$  этой ломаной, называемой ломаной Эйлера, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (1), которая проходит через точку  $M_i$ :





2. Метод Рунге – Кутта. Этот метод используют для вычисления значения  $y_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) ,а также значения функции  $f(x, y)$  при некоторых специальным образом выбираемых значениях  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  и  $y$ .

Запишем алгоритм этого метода в виде

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0, 1, \dots,$$

$$k_0 = f(x_i, y_i), \quad k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_0}{2}\right),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right), \quad k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2).$$

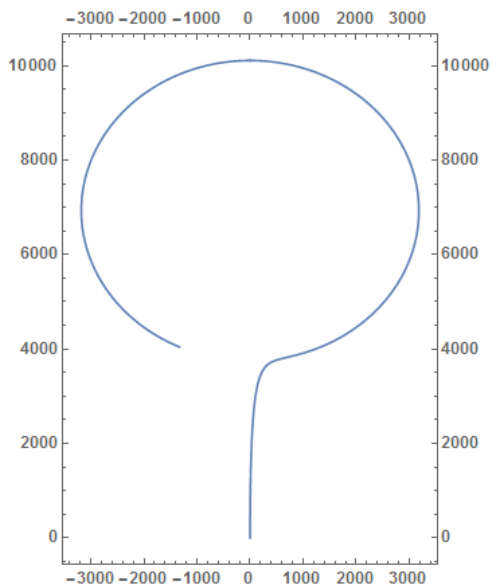
где  $h$  — величина шага сетки по  $x$ .

Метод Рунге – Кутта требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификациями, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге – Кутта .

### §3.Графики.

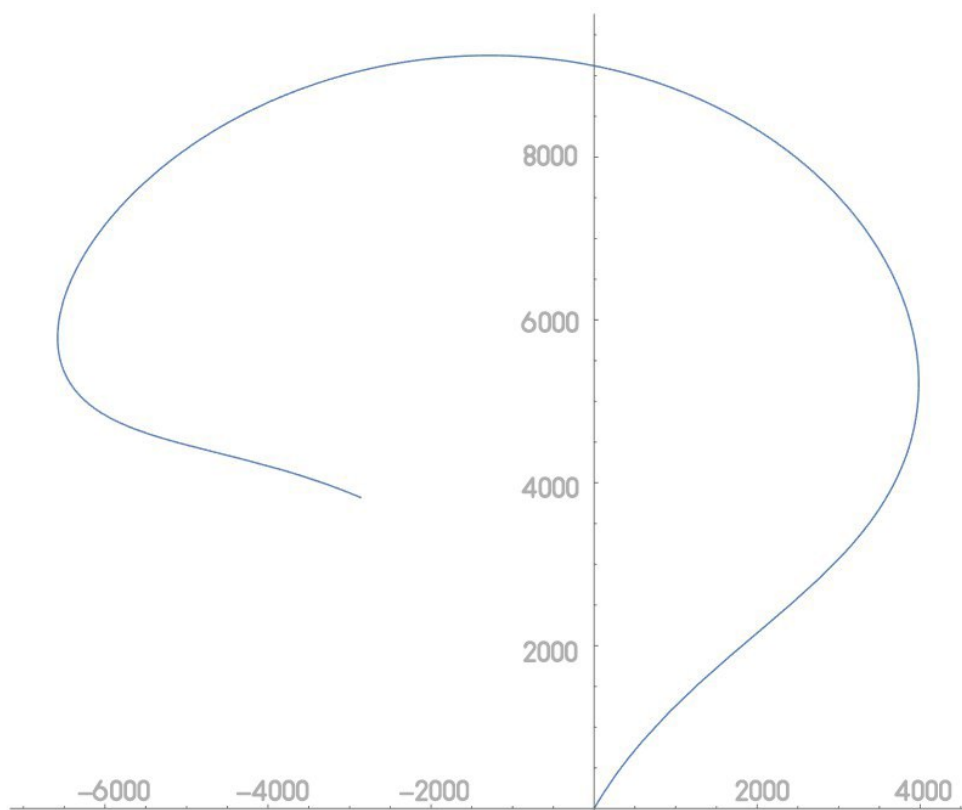
После решения системы были построены графики движения судна для 2 случаев.

Первый случай – угол поворота руля не изменяется.



Второй случай – угол поворота руля изменяется по закону

$$\beta(t) = \beta_0 - b * t$$



## **Заключение:**

На основе данной модели может быть создан полноценный автопилот для судов. Данная модель учитывает эффекты от давления воды на винты и рули судна; также эффект от давления воды на всё судно, что вызывает момент демпфирующей силы. И ещё учитывает эффект от равномерного поступательного перемещения, что вызывает позиционную силу. Но для создания автопилота в различных водоёмах нужно также учитывать:

Река	эффект присоединения масс, волнообразование, течение, как ведёт себя судно в условиях малой глубины.
Море	эффект присоединения масс, волнообразование, силу ветра.

Поэтому данная модель не может быть использована при высоких скоростях и сильном ветре.

### **Список использованной литературы:**

1.Вагущенко Л.Л., Цымбал Н.Н. Системы автоматического управления движением судна. Одесса 2007. — 328 с.

2.Муромцев Ю.Л., Муромцев Д.Ю. Основы автоматики и системы автоматического управления. Тамбов 2008. —96с.

3.Смирнов Н.Г. Теория и устройство судна. Москва «ТРАНСПОРТ» 1992. — 248с.