Департамент образования администрации г. Перми

МБОУ «Лицей №1» г. Перми

Математическое моделирование

Аэропорт “Шереметьево” как система массового обслуживания

Выполнили:

Селедков Владислав Александрович, 201 кл.

Федин Андрей Дмитриевич, 201 кл.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП ПНИПУ

Волегов Павел Сергеевич

Пермь – 2018

Оглавление

Введение

На сегодняшний день почти каждому из нас приходилось посещать аэропорты и совершать перелеты в другой город или страну. В последнее время крупным городам часто приходится сталкиваться с проблемами загруженности обслуживающих их аэропортов. Для ее решения необходимо наглядное представление пропускных характеристик аэропорта в любой конкретный момент времени. Чтобы получить общую картину удобно не рассматривать каждый самолет отдельно, а рассмотреть аэропорт как единую систему взаимодействия взлетно-посадочных полос и запросов на взлет или посадку самолетов. Таким образом, появится возможность составить статистику, учесть недостатки и оптимизировать работу аэропорта, например, за счет увеличения количества взлетно-посадочных полос или снижения времени обслуживания самолета при посадке. Чтобы наглядно представить функционирование аэропорта при различных параметрах, удобно рассмотреть аэропорт как систему массового обслуживания (СМО), имеющую определенное количество каналов (в данном случае взлетно-посадочных полос) и обладающую всеми ключевыми характеристиками СМО.

Для моделирования аэропорта как СМО необходимо вначале дать основные определения теории систем массового обслуживания. Под **системами массового обслуживания** понимают системы, на вход которых подается случайный поток однотипных заявок (событий), обработка которых выполняется одним или несколькими однотипными каналами (устройствами). Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяют на ***одноканальные*** и ***многоканальные***. Также существует классификация на СМО с отказами, с ограниченной и неограниченной очередью [1]. СМО с неограниченной очередью при занятости всех каналов ставит заявку в очередь, причем количество заявок, ждущих обслуживание в этой очереди, в общем случае не ограничено. В СМО с ограниченной очередью заявка также может ждать обслуживания в очереди, однако количество заявок, стоящих в очереди, ограничено. СМО с отказами принимает заявки, когда есть свободный канал или место в ограниченной очереди (если такая имеется); если нет свободных каналов и свободных мест в очереди заявка получает отказ. Пример СМО с ограниченной очередью и с отказом – автостоянка: машины занимают парковочные места до того момента, пока все места не будут заняты, все последующие заявки на парковку получают отказ. В СМО с неограниченной очередью все гораздо проще: например, если рассматривать светофор как СМО (возможны варианты как одноканальной, так и многоканальной), то очередь на проезд через светофор будет не ограничена. В качестве ***показателей эффективности СМО*** используются: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п. [4].

Целью работы является разработка, реализация и исследование математической модели аэропорта Шереметьево, которая позволит оценить эффективность работы аэропорта.

К основным **задачам** работы относятся:

1. составить граф состояний системы;
2. получить уравнения для финальных вероятностей состояний;
3. получить формулы для параметров эффективности;
4. вычислить эти параметры в различных модельных ситуациях.

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Исследуемым объектом будет являться международный аэропорт “Шереметьево”, г. Москва. **Шереметьево** – международный аэропорт федерального значения, один из четырёх основных аэропортов Москвы и Московской области, первый в России по объёму пассажиропотока, также входит в двадцатку крупнейших аэропортов Европы [2]. Аэропорт включает четыре пассажирских терминала: «А» (терминал бизнес-авиации), терминалы для массовых пассажирских перевозок «D», «E», «F» (ранее Шереметьево-2) и грузовой терминал «Шереметьево-Карго» (рис. 1).

Рис.1. Карта аэропорта “Шереметьево” г. Москва

Аэропорт располагает двумя параллельными взлётно-посадочная полоса (ВПП): 06R/24L и 06L/24R (длиной 3700 и 3550 м) с цементобетонным и железобетонным покрытием. Далее в работе будем обозначать эти ВПП как ВПП-1 и ВПП-2. При этом регулярность рейсов в среднем составляет 790 раз в сутки. Эти данные нужны, чтобы потом посчитать интенсивности потока поступления и обслуживания заявок.

С 2015 года идет строительство 3-й ВПП длиной 3200 метров (ВПП-3), которая будет располагаться к северу от терминалов A и B [2]. С такой длиной она сможет принимать все типы, однако для взлёта сверхтяжёлых самолётов (B-747, B-777, MD11, Ан-124 и A-380) будет действовать ограничение на взлётный вес. Полоса ВПП-3 должна увеличить пропускную способность аэропорта вдвое. Таким образом, в процессе работы необходимо будет узнать, в том числе, как на пропускную способность аэропорта повлияет ввод в эксплуатацию третьей ВПП. Для этого сначала необходимо построить математические модели СМО аэропорта в настоящее время и при наличии новой полосы. Сравнивая эти две модели, будет получено наглядное представление наглядное представление об о повышении эффективности работы аэропорта с появлением 3 ВПП.

Таким образом, в результате работы необходимо разработать, реализовать и исследовать математическую модель аэропорта Шереметьево, как модель многоканальной системы массового обслуживания, которая позволяла бы оценивать:

- параметры эффективности системы (среднее время ожидания в очереди, средняя длина очереди);
- вероятности нахождения системы в различных состояниях;
- степень отличия в эффективности аэропорта на данный момент (2 ВПП) и при функционировании третьей ВПП.

Объектом исследования является Международный аэропорт “Шереметьево” г. Москва.

Для того, чтобы построить модель системы массового обслуживания аэропорта “Шереметьево”, требуется ввести ряд гипотез:

1. будем рассматривать Аэропорт Шереметьево как СМО с ограниченной очередью, потому что топливный бак самолета ограничен и самолеты не смогут слишком долго летать над аэропортом;
2. каналом обслуживания будет являться взлетно-посадочная полоса;
3. потоком заявок будет являться запросы на взлет и посадку в аэропорту Шереметьево;
4. скоростью обработки потока будет являться количество самолетов, совершающих посадку или взлет за какой-то промежуток времени;
5. максимальная длина очереди равна 10 самолетам;
6. взлет и посадка при нормальных погодных условиях в среднем занимает 1,5 минуты;
7. среднюю интенсивность заявок будем считать равной 0,5. Самолет прилетает или улетает каждые 2 минуты.

Глава 2. Математическая постановка задачи

Согласно теории систем массового обслуживания, для того, чтобы описать работу СМО, требуется сначала построить граф состояний системы, который состоит из всех возможных состояний системы и возможных переходов между этими состояниями. Построим граф состояний системы для n работающих полос при максимальной длине очереди, равной m (рис. 2).

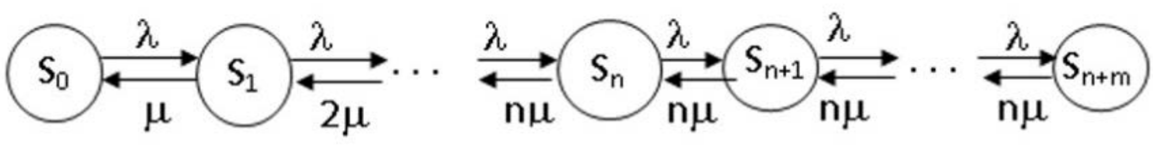

Рис. 2. Граф многоканальной СМО с очередью

На рис. 2 обозначены:

λ – интенсивность потока, n – число каналов, μ – интенсивность обработки заявок, m – максимальная длина очереди, состояния: S_0 – оба канала свободны, очереди нет; S_1 – 1 канал занят, 2 свободен, очереди нет; …; S_n – n каналов занято, очереди нет; S_{n+1} – n каналов занято, в очереди 1 заявка; … ; S_{n+m} – все каналы заняты, в очереди m заявок.

В рамках данной задачи:

- λ – количество заявок на взлет/посадку самолетов в аэропорту в единицу времени;
- μ – количество самолетов, которое самолет способен обслужить в единицу времени;
- S_n – работает n ВПП, очереди нет;
- S_{n+m} – работает n ВПП, очередь из m самолетов.

Запишем уравнения Колмогорова для финальных вероятностей системы. Так как мы рассматриваем уже финальные установившиеся вероятности, можно считать их константой, а значит их производная будет равна 0. Запишем все производные вероятностей системы. Количество уравнений будет равно количеству состояний системы.

$$\frac{dp_0}{dt} = \lambda p_0 \quad - \mu p_1 = 0$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 \quad + 2\mu p_2 - (\mu + \lambda) p_1 = 0$$

$$\ldots$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda p_{n-1} \quad + n\mu p_{n+1} - (n\mu + \lambda) p_n = 0$$

$$\frac{dp_{n+1}}{dt} = \lambda p_n \quad + n\mu p_{n+2} - (n\mu + \lambda) p_{n+1} = 0$$

$$\ldots$$

$$\frac{dp_{n+m-1}}{dt} = \lambda p_{n+m-2} \quad + n\mu p_{n+m} - (n\mu + \lambda) p_{n+m-1} = 0$$

$$\frac{dp_{n+m}}{dt} = \lambda p_{n+m-1} \quad - n\mu p_{n+m} = 0$$

Так как число состояний конечно и система должна находиться хотя бы в одном из них, то в любой момент времени справедливо следующее условие

$$\sum_{k=0}^{n+m} \quad p_k(t) = 1$$

Поочередно выражая p_k через p_0, находим зависимость для p_k. В сумме все вероятности дают единицу, из этого уравнения выражаем формулу для p_0.

Запишем уравнения Колмогорова для финальных вероятностей системы (при двух работающих полосах):

$$\frac{dp_0}{dt} = \lambda p_0 \quad - \mu p_1 = 0$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 \quad + 2\mu p_2 - (\mu + \lambda) p_1 = 0$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 \quad + 2\mu p_{2+1} - (2\mu + \lambda) p_2 = 0$$

$$\frac{dp_{2+1}}{dt} = \lambda p_2 \quad + 2\mu p_{2+2} - (2\mu + \lambda) p_{2+1} = 0$$

$$\frac{dp_{2+2}}{dt} = \lambda p_{2+1} \quad + 2\mu p_{2+3} - (2\mu + \lambda)p_{2+2} = 0$$

$$\frac{dp_{2+3}}{dt} = \lambda p_{2+2} \quad + 2\mu p_{2+4} - (2\mu + \lambda)p_{2+3} = 0$$

$$\frac{dp_{2+4}}{dt} = \lambda p_{2+3} \quad + 2\mu p_{2+5} - (2\mu + \lambda)p_{2+4} = 0$$

$$\frac{dp_{2+5}}{dt} = \lambda p_{2+4} \quad + 2\mu p_{2+6} - (2\mu + \lambda)p_{2+5} = 0$$

$$\frac{dp_{2+6}}{dt} = \lambda p_{2+5} \quad + 2\mu p_{2+7} - (2\mu + \lambda)p_{2+6} = 0$$

$$\frac{dp_{2+7}}{dt} = \lambda p_{2+6} \quad + 2\mu p_{2+8} - (2\mu + \lambda)p_{2+7} = 0$$

$$\frac{dp_{2+8}}{dt} = \lambda p_{2+7} \quad + 2\mu p_{2+9} - (2\mu + \lambda)p_{2+8} = 0$$

$$\frac{dp_{2+9}}{dt} = \lambda p_{2+8} \quad + 2\mu p_{2+10} - (2\mu + \lambda)p_{2+9} = 0$$

$$\frac{dp_{2+10}}{dt} = \lambda p_{2+9} \quad - 2\mu p_{2+10} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{2+10} \quad p_k(t) = 1$$

Анализируя уравнения для 2-х каналов, запишем зависимость для p_k, где $k = n + m$, а также формулу для p_0:

$$p_k = \frac{\lambda^k \cdot p_0}{2^{k-1}\mu^k};$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{12} \quad \frac{\lambda^k}{2^{k-1}\mu^k} + 1\right)^{-1}$$

Аналогично запишем уравнения Колмогорова для финальных вероятностей системы при трех имеющихся ВПП:

$$\frac{dp_0}{dt} = \lambda p_0 \quad - \mu p_1 = 0$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 \quad + 2\mu p_2 - (\mu + \lambda)p_1 = 0$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 \quad + 3\mu p_3 - (2\mu + \lambda)p_2 = 0$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \lambda p_2 \quad + 3\mu p_{3+1} - (3\mu + \lambda)p_3 = 0$$

$$\frac{dp_{3+1}}{dt} = \lambda p_3 \quad + 3\mu p_{3+2} - (3\mu + \lambda)p_{3+1} = 0$$

$$\frac{dp_{3+2}}{dt} = \lambda p_{3+1} \quad + 3\mu p_{3+3} - (3\mu + \lambda)p_{3+2} = 0$$

$$\frac{dp_{3+3}}{dt} = \lambda p_{3+2} \quad + 3\mu p_{3+4} - (3\mu + \lambda)p_{3+3} = 0$$

$$\frac{dp_{3+4}}{dt} = \lambda p_{3+3} \quad + 3\mu p_{3+5} - (3\mu + \lambda)p_{3+4} = 0$$

$$\frac{dp_{3+5}}{dt} = \lambda p_{3+4} \quad + 3\mu p_{3+6} - (3\mu + \lambda)p_{3+5} = 0$$

$$\frac{dp_{3+6}}{dt} = \lambda p_{3+5} \quad + 3\mu p_{3+7} - (3\mu + \lambda)p_{3+6} = 0$$

$$\frac{dp_{3+7}}{dt} = \lambda p_{3+6} \quad + 3\mu p_{3+8} - (3\mu + \lambda)p_{3+7} = 0$$

$$\frac{dp_{3+8}}{dt} = \lambda p_{3+7} \quad + 3\mu p_{3+9} - (3\mu + \lambda)p_{3+8} = 0$$

$$\frac{dp_{3+9}}{dt} = \lambda p_{3+8} \quad + 3\mu p_{3+10} - (3\mu + \lambda)p_{3+9} = 0$$

$$\frac{dp_{3+10}}{dt} = \lambda p_{3+9} \quad - 3\mu p_{3+10} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{3+10} \quad p_k(t) = 1$$

Решая эту систему уравнений, получим зависимости и формулы для вероятностей всех состояний СМО:

$$p_1 = \frac{\lambda p_0}{\mu}\text{; } p_k = \frac{\lambda^k \cdot p_0}{2\mu^k \cdot 3^{k-2}}\text{; } p_0 = \left(\left(\sum_{k=2}^{13} \quad \frac{\lambda^k \cdot p_0}{2\mu^k \cdot 3^{k-2}}\right) + \frac{\lambda}{\mu} + 1\right)^{-1},$$

а также формулы для следующих параметров эффективности системы:

- p_{2+10} - вероятность отказа при двух полосах;
- p_{3+10} - вероятность отказа при трех полосах;

- $L = \sum_{k=1}^{m} k \cdot p_{n+k}$- Средняя длина очереди;
- W=L/λ - Среднее время ожидания в очереди.

Глава 3. Результаты моделирования

В качестве рассмотренных случаев выбраны следующие модельные ситуации:

1. «нормальный» режим работы аэропорта;
2. при плохих погодных условиях скорость обработки заявок уменьшится примерно в 2 раза;
3. в праздники интенсивность потока может достигать до 1 самолета в минуту.

В результате моделирования в случае двух ВПП, изменяя параметры интенсивности потока и интенсивности обработки (λ и μ) , были получены вероятности состояний, средняя длина очереди и среднее время ожидания, показанные в таблице 1.

Таблица 1. Параметры эффективности СМО в различных ситуациях

Параметры СМО	**Ситуация 1**	**Ситуация 3**	**Ситуация 2**	**Ситуация 2 и 3**
λ (самолетов/мин)	0,5	1**	0,5	1**
μ (самолетов/мин)	0,66	0,66	0,33*	0,33*
p_0	0,4506	0,1423	0,1423	0,0012
p_1	0,34133	0,21563	0,21563	0,00354
p_2	0,12929	0,16336	0,16336	0,00536
p_{2+1}	0,04897	0,12375	0,12375	0,00813
p_{2+2}	0,01855	0,09375	0,09375	0,01231
p_{2+3}	0,00703	0,07103	0,07103	0,01865
p_{2+4}	0,00266	0,05381	0,05381	0,02826
p_{2+5}	0,00101	0,04076	0,04076	0,04282

p_{2+6}	0,00038	0,03088	0,03088	0,06488
p_{2+7}	0,00014	0,02339	0,02339	0,09831
p_{2+8}	0,00005	0,01772	0,01772	0,14895
p_{2+9}	0,00002	0,01343	0,01343	0,22568
p_{2+10}	0,00001	0,01017	0,01017	0,34194
Вероятность отказа	**0,00001**	**0,01017**	**0,01017**	**0,34194**
Средняя длина очереди (самолетов)	**0,28451**	**2,61417**	**2,61417**	**10,11526**
Среднее время ожидания (мин)	**0,56902**	**2,61417**	**5,22834**	**10,11526**

В результате моделирования в случае трех ВПП, регулируя параметры интенсивности потока и интенсивности обработки (λ и μ) , были получены вероятности состояний, средняя длина очереди и среднее время ожидания, показанные в таблице 2.

Таблица 2. Параметры эффективности СМО
в различных ситуациях

Параметры СМО	**Ситуация 1**	**Ситуация 3**	**Ситуация 2 и 3**
λ (самолетов/мин)	0,5	1**	1**
μ (самолетов/мин)	0,66	0,66	0,33*
p_0	0,46696625	0,20688419	0,01605315
p_1	0,35376231	0,31346089	0,04864590
p_2	0,13400088	0,23747037	0,07370592

p_{2+1}	0,03383861	0,11993453	0,07445042
p_{2+2}	0,00854510	0,06057300	0,07520245
p_{2+3}	0,00215785	0,03059242	0,07596207
p_{2+4}	0,00054491	0,01545072	0,07672936
p_{2+5}	0,00013760	0,00780339	0,07750440
p_{2+6}	0,00003475	0,00394111	0,07828728
p_{2+7}	0,00000877	0,00199046	0,07907806
p_{2+8}	0,00000222	0,00100528	0,07987683
p_{2+9}	0,00000056	0,00050772	0,08068366
p_{2+10}	0,00000014	0,00025642	0,08149865
Вероятность отказа	**0,00000004**	**0,00012951**	**0,08232187**
Средняя длина очереди (самолетов)	**0,00000004**	**0,00012951**	**0,08232187**
Среднее время ожидания (мин)	**0,04958982**	**0,61242352**	**6,75598439**

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены вопросы, связанные с описанием работы аэропорта Шереметьево. Сформулированы гипотезы, математическая и концептуальная постановки задачи моделирования, записаны уравнения для состояний системы и получены формулы для показателей эффективности. В результате численных экспериментов рассмотрены следующие ситуации:

1. работа аэропорта в штатном режиме;
2. работа аэропорта при повышении нагрузки и нормальных погодных условиях;
3. работа аэропорта при обычной нагрузке и плохих погодных условиях;
4. работа аэропорта при повышенной нагрузке и плохих погодных условиях.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы, позволяющие оценить параметры эффективности, такие как вероятность отказа, средняя длина очереди, среднее время ожидания в очереди при разном количестве ВПП и разной интенсивности и скорости обработки заявок:

При работе в штатном режиме при 2 работающих ВПП:

- вероятность отказа: 0%;
- средняя длина очереди: 0,3 самолета;
- среднее время ожидания: 0,6 минуты.

Видно, что при штатном режиме работы, аэропорт работает корректно и вероятность возникновения очереди всего 6%. Однако, при плохой погоде и повышенном потоке заявок, например, в новогодние праздники, показатели сильно ухудшатся:

- вероятность отказа: 34%;
- средняя длина очереди: 10,1 самолетов;

- среднее время ожидания: 10,1 минут.

Исходя из таблиц 1 и 2 можно увидеть, что с вводом в эксплуатацию третьей ВПП пропускная способность аэропорта, при работе в штатном режиме, увеличится в 2 раза, причем среднее время ожидания почти не изменится, и в критической ситуации, при плохой погоде и повышенном потоке заявок, показатели уменьшатся:

- вероятность отказа: 8%;
- средняя длина очереди: 6,8 самолетов;
- среднее время ожидания: 6,8 минут.

В условиях плохой погоды и повышенного потока заявок на текущий день 34% самолетов получат отказ в взлете или посадке. При добавлении 3 ВПП этот показатель уменьшится до 8%, среднее время ожидания может уменьшиться на 3,3 минуты до 6,8 минут.

Результаты, полученные в ходе работы могут быть полезны транспортным компаниям, пассажирам. С помощью их можно обезопасить перелет, за счет уменьшения очереди самолетов над аэропортом и сократить время полета самолета. Стоит отметить, что предложенная модель универсальна и может быть применена к любому аэропорту такого же типа.

Список литературы

1. Система массового обслуживания: определение и понятие [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=sistema-massovogo-obsluzhivaniya – Загл. с экрана.
2. Материал из Википедии — свободной энциклопедии [Электронный ресурс] / Шереметьево / Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%BE – Загл. с экрана.
3. Официальный сайт аэропорта Шереметьево [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.svo.aero/ru/timetable/today/ – Загл. с экрана.
4. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие. Под ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.