

Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшекласников
по политехническим, естественным, математическим дисциплинам
для учащихся 9-11 классов

Направление: математическое моделирование

Моделирование математических задач

Работу выполнил: Щелканов Иван
ученик 11 класса МБОУ «Ошъянская
СОШ-БШ», с. Ошъя
Руководитель: Кустова Елена
Владимировна
учитель математики высшей
категории МБОУ «Ошъянская СОШ-
БШ»

Пермь. 2018

Содержание

Введение.....	3
1.Математическая модель.....	5
2. Методы моделирования.....	6
2.1.Этапы моделирования.....	5
3. Задачи на математическое моделирование.....	7
4.Решение уравнений функционально-графическим методом.....	17
5. Решение систем линейных уравнений.....	20
5.1 Метод Гаусса.....	20
5.2 Метод Крамера.....	23
Заключение.....	26
Литература.....	26
Приложение	28

Введение

Однажды в разговоре П. Л. Чебышев заметил: «В старину математические задачи задавали боги, например, удвоение куба, по поводу изменения Делосского жертвенника. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж. Теперь третий период, когда задачи задает практика».

В настоящее время прикладная математика являются одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Она способствуют ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывают принципиально новые возможности моделирования и проектирования сложных систем с выбором оптимальных параметров технологических процессов.

Проблема: У меня возникала потребность узнать, как, например, можно решить уравнение, используя компьютер, как построить графики элементарных и сложных функций, как смоделировать решение математических задач.

Я решил узнать, владеют ли школьники 9 – 10 классов знаниями о таком понятии, как математическое моделирование. Для этого я провел небольшое анкетирование, в котором задал несколько вопросов по данной теме (приложение 1). Проанализировав ответы учащихся, я решил, что действительно необходимо овладеть технологией решения математических задач с помощью моделирования и познакомить с этим учащихся.

Цель работы: моделирование и решение математических задач

Задачи:

- узнать, что такое моделирование;
- познакомиться с методами и этапами моделирования;
- научиться решать математические задачи с помощью моделирования;
- научиться решать уравнения функционально-графическим способом с помощью MS Excel;
- научиться решать системы уравнений, изучив метод Гаусса и метод Крамера с помощью MS Excel.

Предмет исследования: математические задачи.

Методы исследования: анкетирование, сбор информации, моделирование.

Гипотеза: Моя работа будет полезна ученикам 10-11 классов при изучении многих тем из курса математики, поможет расширить кругозор о математическом моделировании.

1. Математическая модель

С середины XXв. в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и ЭВМ. Возникли такие новые дисциплины, как «математическая экономика», «математическая химия», «математическая лингвистика» и т.д., изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

Математическая модель— это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование— это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Этапы решения задач[1]

Решение всех задач проходит в четыре этапа. Остановимся на каждом из них.

I – Анализ условия задачи. Задача формулируется на описательном языке (вербальная модель задачи). От правильной постановки задачи, указания ресурсов, которыми мы располагаем, зависит успешность ее решения. Этому нужно учиться каждому – пригодится специалисту любого профиля.

II – Построение математической модели задачи. Перевод исходной части на математический язык: вводятся переменные, ищутся связи между ними и устанавливаются ограничения на них, которые записываются в виде уравнений, неравенств или их систем. Любая математическая задача – модель каких-то прикладных задач (экономических, физических, биологических, технических и т. п.).

III – Решение математической модели задачи. Изучается полученная модель. Если задача известная, то она решается по соответствующему ей алгоритму. Если задача никогда не решалась, то ищется необходимый алгоритм; иногда для этого требуется доразвить теорию или создать новую.

IV – Интерпретация решения. Это перевод решения задачи на исходный язык.

Что такое моделирование?[5]

В научных исследованиях большую роль играют гипотезы, то есть определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка гипотез может быть проведена в ходе специально поставленного эксперимента. При формулировании и проверки правильности гипотез большое значение в качестве метода суждений имеет аналогия.

Аналогией называют суждение, о каком либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть существенным и несущественным.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводится к удобным для исследования логическим схемам. Такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами модель

(лат. *modulus* - мера) – это объект заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Моделированием называется **замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели**. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью.

2. Методы моделирования[6]

- физическое моделирование;
- полунатурное моделирование;
- математическое моделирование на компьютере.

Физическое моделирование

При использовании **физического моделирования** процессы, протекающие в модели и в оригинале, имеют одинаковую иногда и различную физическую природу. Физическая модель может отличаться от оригинала размерами, скоростью протекания и физической природой процессов или материалами, из которых она изготовлена.

При физическом моделировании необходимо для каждого конкретного объекта создать свою модель. Так как изготовление сложных объектов обходится очень дорого, требует больших материальных и трудовых затрат, то изменение параметров модели часто нецелесообразно. Поэтому, несмотря на определенные преимущества, физическое моделирование находит ограниченное применение при исследовании сложных объектов и систем управления.

Полунатурное моделирование

Полунатурное моделирование – это моделирование с реальной аппаратурой, при котором часть системы моделируется, а остальная часть является реальной.

Применение такого метода моделирования становится необходимым в тех случаях, когда не удастся описать работу некоторых элементов системы математически. Естественно работа всей замкнутой схемы моделирования должна проходить в натуральном масштабе времени. Такое моделирование системы управления позволяет анализировать как всю систему в целом, так и отдельные ее элементы, исследовать влияния кинематики и динамики элементов реальной аппаратуры на работу САУ, несмотря на то, что их математическое описание отсутствует. В процессе полунатурного моделирования удачно сочетаются достоинства математического и натурного моделирования, и может быть достигнуто оптимальное взаимодействие между вычислительными и натурными экспериментами. В настоящее время методы полунатурного моделирования эффективно применяют при проектировании разнообразных автоматических управляющих систем.

Необходимость таких методов возникает, если:

- объект управления находится ещё в стадии проектирования, а элементы устройства управления реально существуют;
- объект не может испытываться в лабораторных условиях;

- элементы устройства управления имеют нелинейные характеристики, трения, помехи, которые при составлении их уравнений не учитывались;
- проведение натурных экспериментов по настройке устройства управления на объекте дороги или вообще недопустимо

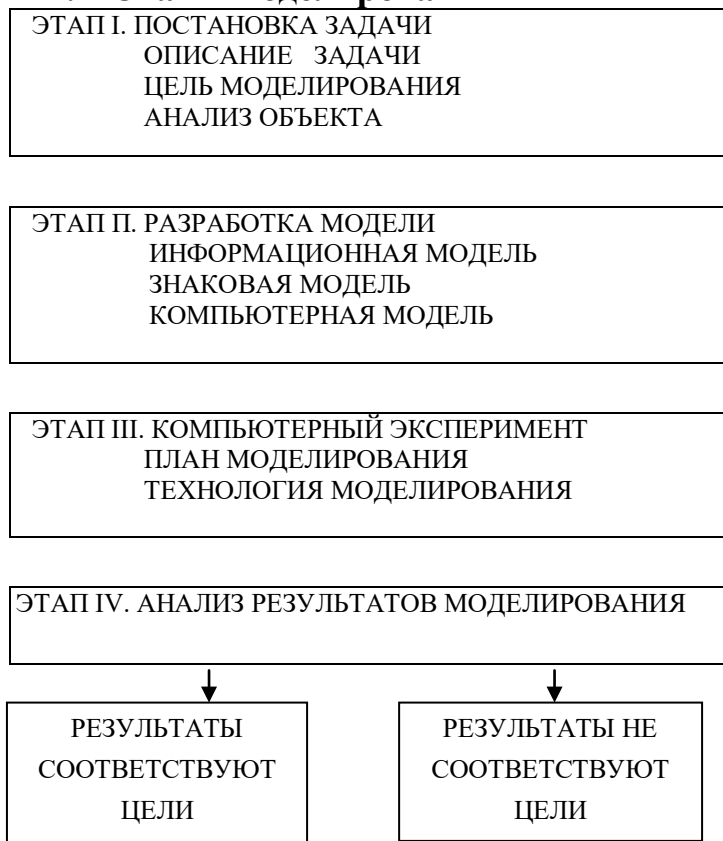
Математическое моделирование

При математическом моделировании исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики и реализованной, как правило, с использованием тех или иных математических методов. При моделировании на компьютере в качестве объекта моделирования (оригинала) выступают исходные уравнения, представляющие математическую модель реального объекта, а в качестве модели – процессы, протекающие в соответствии с этими уравнениями и воспроизводимые на компьютере в виде «машинных решений» путём реализации программ.

В математическом моделировании выделяют имитационное моделирование, под которым понимается воспроизведение объектов с имитацией случайными величинами и случайными процессами элементов оригинала, которые не удаётся представить определёнными математическими моделями. При этом процесс функционирования объекта (системы) представляется в виде определённого алгоритма, который реализуется на компьютере.

Моделирование — творческий процесс. Заключить его в формальные рамки очень трудно. В наиболее общем виде его можно представить поэтапно, как изображено на схеме:

2.1 Этапы моделирования



1) Построение модели. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект— явление природы, конструкция, экономический план,

производственный процесс и т.д. Четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, т.е. строится математическая модель. Это самый сложный этап моделирования.

2) Решение математической задачи. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ПК, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за конкретное время.

3) Интерпретация полученных следствий из математической модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4) Проверка адекватности модели. На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5) Модификация модели. На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более близкой к действительности, либо ее упрощение для достижения решения.

3. Задачи на математическое моделирование

Задача 1.

На научный семинар собрались ученые и обменялись друг с другом визитными карточками. Всего было роздано 210 визитных карточек. Сколько ученых приехало на семинар, если известно, что их было не более 20?

Решение. Постановка задачи.

Пусть x — количество ученых, приехавших на семинар. Так как в процессе обмена каждый раздает по одной карточке всем, кроме себя, то он раздает $(x - 1)$ карточку. Следовательно, всего будет роздано $n = x \cdot (x - 1)$ карточек.

математическая модель $x(x-1)$			
количество участников		20	
количество карточек		210	
x	ответ		
1	0	нет	
2	2	нет	
3	6	нет	
4	12	нет	
5	20	нет	
6	30	нет	
7	42	нет	
8	56	нет	
9	72	нет	
10	90	нет	
11	110	нет	
12	132	нет	
13	156	нет	
14	182	нет	

Математическая модель.

$$n = x(x - 1),$$

$$n = 210,$$

$$x < 20,$$

$$x \geq 2,$$

x — целое.

15	210	да	
16	240	нет	
17	272	нет	
18	306	нет	
Ответ:		15 ученых приехало на семинар	

Анализ полученных результатов.

Проверим результат, решив уравнение

$$x(x - 1) = 210.$$

$$x^2 - x - 210 = 0.$$

$$x = 15; -14.$$

Удовлетворяющий условию задачи корень уравнения $x = 15$.

Ответ. 15 человек.

Задача 2.

Математическая модель			
$5x / x + 7 = 3 / 2$			
числитель	знаменатель	новый числитель	новый знаменатель
1	3	5	8
2	4	10	9
3	5	15	10
4	6	20	11
5	7	25	12
Ответ: исходная дробь 3/5			

Знаменатель правильной дроби на 2 больше числителя. Если числитель увеличить в 5 раз, а к знаменателю прибавить 5 и сократить дробь, то в результате получится $3/2$. Найти исходную дробь.

Решение. Постановка задачи.

Пусть x — числитель исходной дроби. Тогда

$x + 2$ — знаменатель исходной дроби,

$x \cdot 5$ — новый числитель,

$(x + 2) + 5 = x + 7$ — новый знаменатель.

Так как по условию задачи новая дробь после сокращения равна $3/2$, составляем уравнение:

$$5x / x + 7 = 3 / 2$$

Математическая модель.

$$5x / x + 7 = 3 / 2$$

x — целое.

Анализ полученных результатов.

Проверить правильность нашей модели можно, решив линейное уравнение

$$5x \cdot 2 = (x + 7) \cdot 3,$$

$$10x = 3x + 21,$$

$$7x = 21.$$

$x = 3$ — это числитель исходной дроби, тогда ее знаменатель равен 5, т. е. исходная дробь $3/5$

Ответ. $3/5$

Задача 3.

Участники шахматного турнира после окончания очередной партии обменивались друг с другом рукопожатиями. Всего сыграно 210 партий, значит, 210 раз противники жали друг другу руки. Сколько человек принимали участие в турнире, если каждый сыграл по одному разу со всеми остальными и известно, что участников было не более 30?

Решение. Математическая модель.

Пусть n — количество рукопожатий, x — количество участников. Тогда

$$n = x(x-1)/2,$$

$$n = 210,$$

$$x \leq 30,$$

$$x \geq 2,$$

x — целое.

математическая модель $x(x-1)/2$		
количество участников		30
количество партий		210
x	ответ	
1	0	
2	1	
3	3	
4	6	
5	10	
6	15	
7	21	
8	28	
9	36	
10	45	
11	55	
12	66	
13	78	
14	91	
15	105	
16	120	
17	136	
18	153	
19	171	
20	190	
21	210	
22	231	
Ответ: 21 участник		

Задача 4.

Через иллюминатор затонувшего корабля требуется вытащить сундук с драгоценностями. Удастся ли это сделать?

Решение.

Постановка задачи. Математическая модель.

Иллюминатор корабля имеет форму круга. Будем считать, что сундук имеет форму параллелепипеда. Чтобы вытащить сундук, необходимо, чтобы диаметр иллюминатора был больше любой из трех диагоналей поверхности сундука.

Пусть R — радиус иллюминатора,

a, b, c — размеры сундука,

d_1, d_2, d_3 — диагонали боковых поверхностей сундука.

Сундук можно вытаскивать через иллюминатор одной из трех боковых граней, следовательно, достаточно, чтобы диагональ иллюминатора оказалась меньше одной из трех диагоналей граней сундука, т. е. должно быть истинно хотя бы одно из условий:

ЕСЛИ($(2 \cdot R > \text{КОРЕНЬ}(a \cdot a + b \cdot b))$; 1; 0)

ЕСЛИ($(2 \cdot R > \text{КОРЕНЬ}(a \cdot a + c \cdot c))$; 1; 0)

ЕСЛИ($(2 \cdot R > \text{КОРЕНЬ}(c \cdot c + b \cdot b))$; 1; 0)

В таблице находим сумму трех условий. Если сумма равна 0, делаем вывод «Сокровища недоступны» иначе «Сокровища доступны».

Радиус иллюминатора	20				
Длина сундука	60				
Высота сундука	40				
Ширина сундука	50				
Расчёты					
Радиус	Длина сундука	Ширина сундука	Высота сундука		
20	60	50	40	0	
				0	
				0	
			СУММА	0	
			Ответ:	сокровища недоступны	
Радиус иллюминатора	20				
Длина сундука	60				
Высота сундука	40				
Ширина сундука	50				
Расчёты					
Радиус	Длина сундука	Ширина сундука	Высота сундука		
20	25	25	40	1	
				0	
				1	
			СУММА	2	
			Ответ:	сокровища доступны	

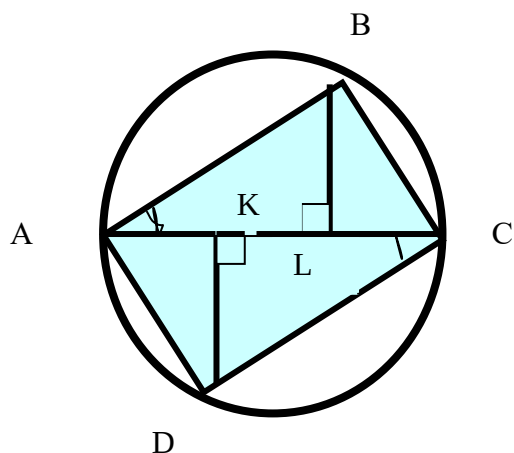
Рассмотренные задачи можно отнести к прикладным.

Рассмотрим задачу, которая даст более правильное представление о сложностях, которые могут возникнуть при решении прикладных задач.

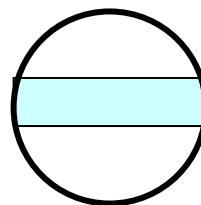
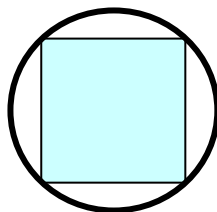
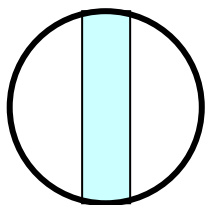
Задача 5.[4]

Старый плотник при изготовлении балки из цилиндрического бревна поступает так:

- 1) проводит на торце бревна диаметр AC;
- 2) делит его на три равные части точками K и L;
- 3) проводит перпендикуляры LB и KD;
- 4) принимает четырёхугольник ABCD за сечение балки и стесывает лишнее.



Прочность балки зависит от площади поперечного сечения балки и от высоты её сечения.



Каковы размеры прямоугольной балки наибольшей прочности, которую можно изготовить из цилиндрического бревна радиуса R.

Решение

I Пусть a – ширина балки,

h – высота балки.

II

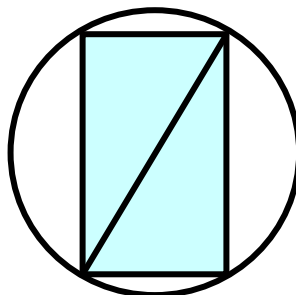
$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 4R^2, \\ F = kah^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2 = 4R^2 - a^2, \\ F = ka(4R^2 - a^2). \end{cases}$$

Имеем математическую модель:

Найти наибольшее значение функции

$$F = 4kR^2a - ka^3$$



Где $a \in [0; 2R]$.

III $F = 4kR^2a - 3ka^3$

$$F=0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2R}{\sqrt{3}}, \text{ но } a > 0$$

$$F(0)=F(2R)=0$$

$$F\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}kR^3 - \text{наибольшее значение}$$

IV Ответ: $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}, h = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ - размеры балки наибольшей прочности.

$R = 3, a = 3,4$

Компьютерная модель

Каковы размеры прямоугольной балки наибольшей прочности, которую можно изготовить из цилиндрического бревна радиуса R.

прочность балки рассчитывается по формуле

k - коэффициент прочности от материала

a - ширина балки

h - высота балки

$$a \in [0; 2R]$$

$$F = kah^2$$

шаг

0,2

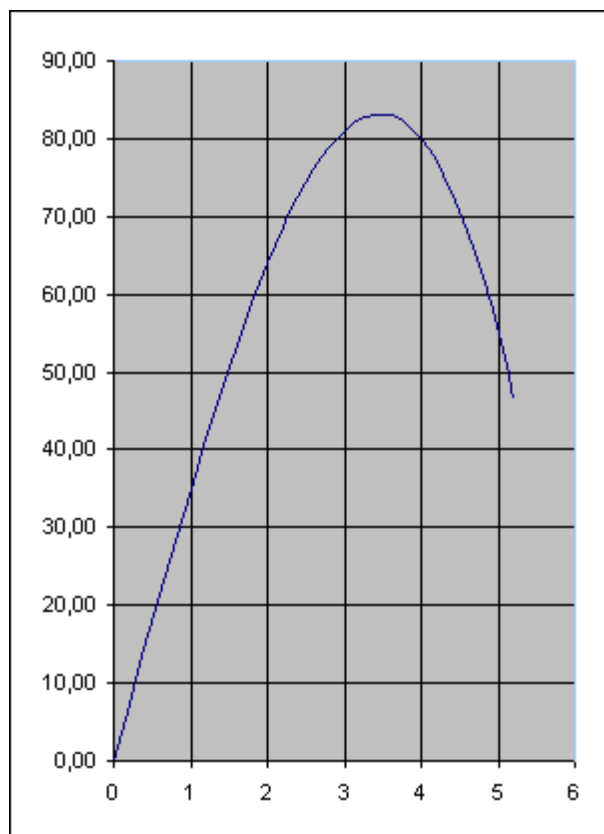
a

F

h=

R=	3
k=	1

0	0,00	6
0,2	7,19	5,996666
0,4	14,34	5,986652
0,6	21,38	5,969925
0,8	28,29	5,946427
1	35,00	5,91608
1,2	41,47	5,878775
1,4	47,66	5,834381
1,6	53,50	5,782733
1,8	58,97	5,723635
2	64,00	5,656854
2,2	68,55	5,582114
2,4	72,58	5,499091
2,6	76,02	5,407402
2,8	78,85	5,3066
3	81,00	5,196152
3,2	82,43	5,075431
3,4	83,10	4,943683
3,6	82,94	4,8
3,8	81,93	4,643275
4	80,00	4,472136
4,2	77,11	4,284857
4,4	73,22	4,079216
4,6	68,26	3,852272
4,8	62,21	3,6
5	55,00	3,316625
5,2	46,59	2,993326



Доказать, что если у прямоугольной балки максимальной прочности, сделанной из цилиндрического бревна, диагональ разделить на три равные части и из точек деления восстановить перпендикуляры к ней, то они пройдут через противоположные вершины прямоугольника.

Доказательство:

Пусть ABCD - прямоугольник, у которого $AC=2R$,

$$BC = \frac{2R}{\sqrt{3}}, AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Точки K и L таковы, что $AK=KL=LC$.

Из точек B и D опустим перпендикуляры на AC, получим точки K_1 и L_1 . Докажем, что $K_1=K$ и $L_1=L$

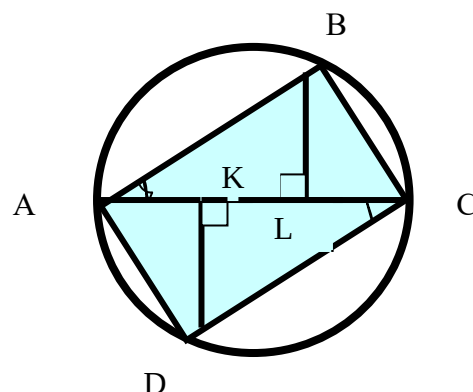
$$\triangle ADK_1 \triangle CBL_1 \Rightarrow AK_1=L_1C$$

$$\triangle CBL_1 \triangle ABC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{L_1C}{BC} \Rightarrow L_1C = \frac{2R}{3} \text{ и } AK_1 = \frac{2R}{3}$$

$$K_1L_1 = AC - (AK_1 + L_1C) = \frac{2R}{3},$$

а это значит, что $K_1=K$ и $L_1=L$

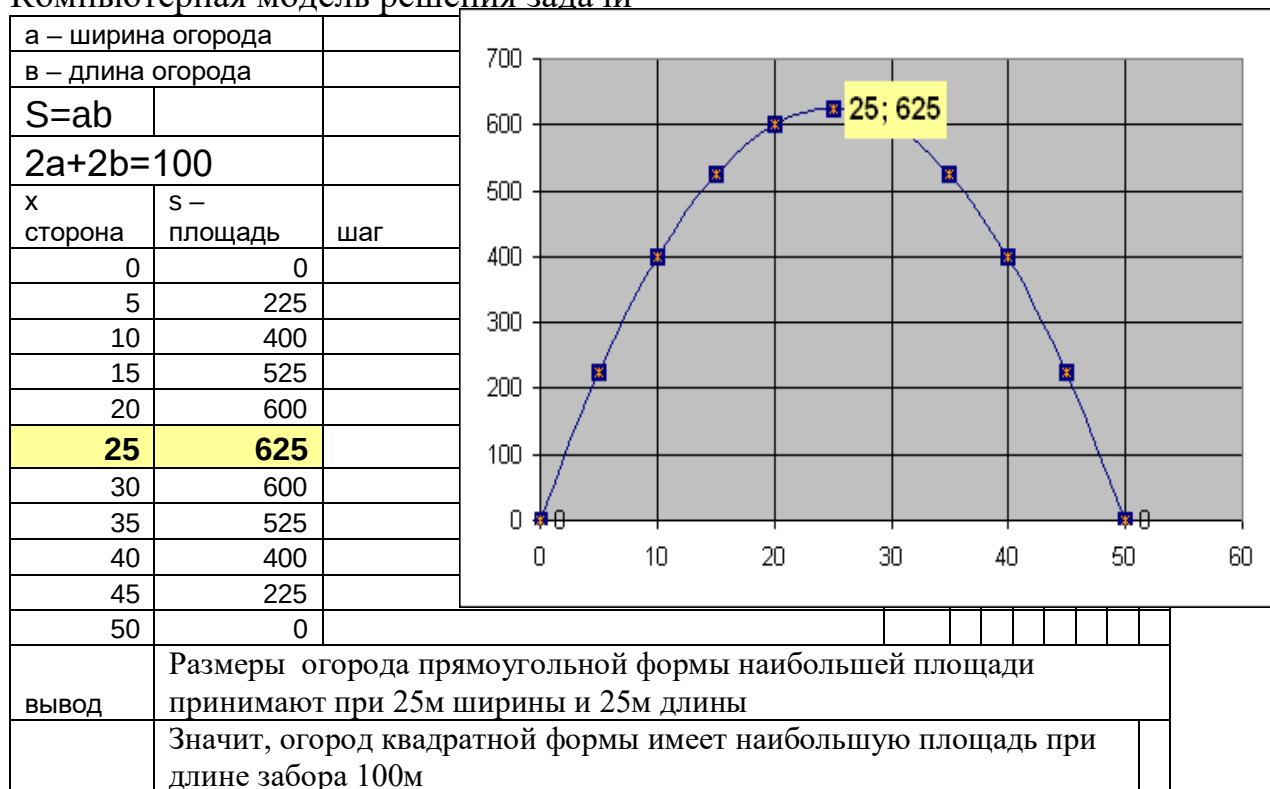
Вывод: Если диагональ разделить на три равные части и из точек деления восстановить перпендикуляры к ней, которые пройдут через противоположные вершины прямоугольника, то получится прямоугольная балка максимальной прочности.



Задача 6.

Забором длины 100 м требуется огородить прямоугольную площадку максимальной площади

Компьютерная модель решения задачи

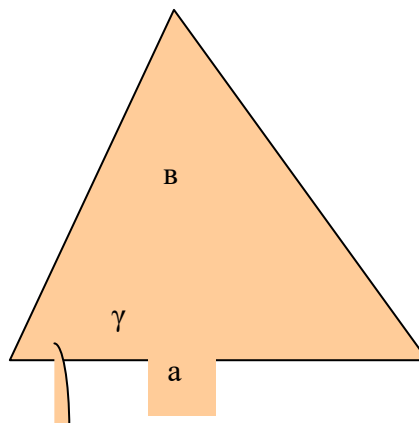


Задача 7.

Среди треугольников с двумя заданными сторонами. Найти треугольник наибольшей площади.

Компьютерная модель

		шаг	5	
		$\gamma \in [0;180^\circ]$		
а	в	угол м/у а и в	градус	площадь
4	5	0	0	0,00
		0,09	5	0,87
		0,17	10	1,74
		0,26	15	2,59
		0,35	20	3,42
		0,44	25	4,23
		0,52	30	5,00
		0,61	35	5,74
		0,70	40	6,43
		0,79	45	7,07
		0,87	50	7,66
		0,96	55	8,19
		1,05	60	8,66
		1,13	65	9,06
		1,22	70	9,40
		1,31	75	9,66
		1,40	80	9,85
		1,48	85	9,96
		1,57	90	10,00
		1,66	95	9,96
		1,75	100	9,85
		1,83	105	9,66
		1,92	110	9,40
		2,01	115	9,06
		2,09	120	8,66
		2,18	125	8,19
		2,27	130	7,66
		2,36	135	7,07
		2,44	140	6,43
		2,53	145	5,74
		2,62	150	5,00
		2,71	155	4,23
		2,79	160	3,42

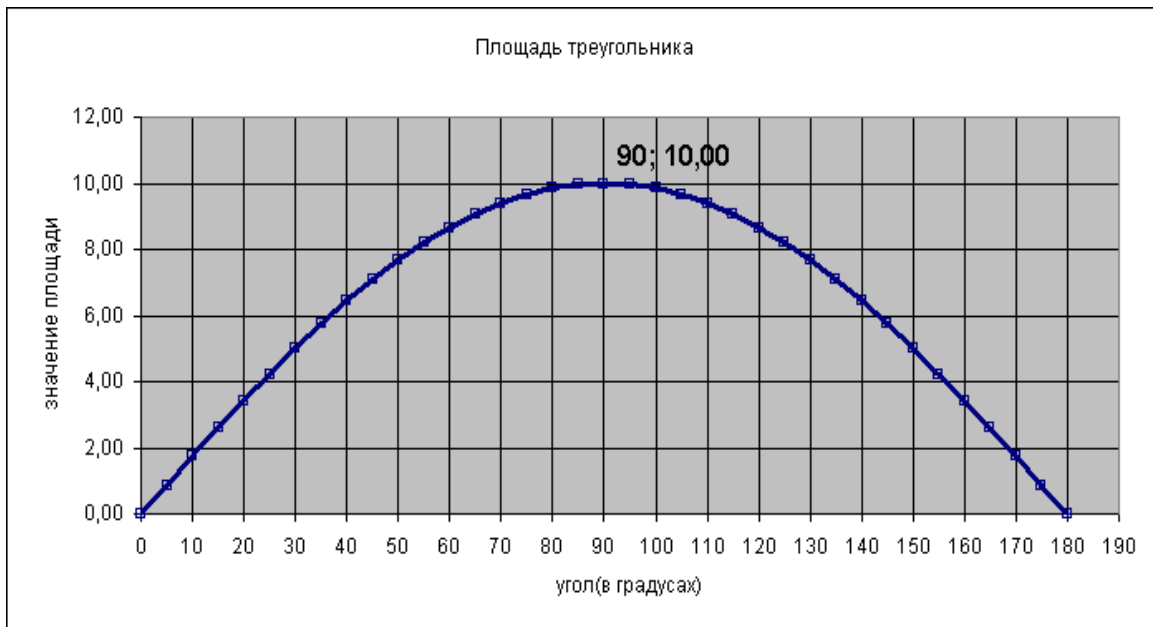


вывод

Независимо от выбора сторон треугольника, наибольшая площадь треугольника равна 10, при угле в 90 градусов.

Значит, прямоугольный треугольник с заданными сторонами имеет наибольшую площадь.

2,88	165	2,59
2,97	170	1,74
3,05	175	0,87
3,14	180	0,00



Задача 8.Экономическая задача

Рассчитать месячный платеж по кредиту со ставкой банка $x\%$ в месяц сроком на n месяцев.

Пусть a - месячный платеж

A - сумма займа

$a = \left(\frac{D\$4 * \text{СТЕПЕНЬ}((1 + B\$4/100); B\$5))}{((100/B\$4 + 1) * ((\text{СТЕПЕНЬ}((1 + B\$4/100); B\$5 - 1) - 1)))} \right)$

$$a = \frac{A \left(1 + \frac{x}{100} \right)^n}{\left(\frac{100}{x} \right) \left(\left(1 + \frac{x}{100} \right)^{n-1} - 1 \right) - 1}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Рассчитать месячный платеж по кредиту со							
2	ставкой банка $x\%$ в месяц сроком на n месяцев							
3								
4	$x=$	2	$A=$	10000	Пусть a - месячный платеж			
5	$n=$	12	A - сумма займа					
6								
7				$a=$	1022	p		
8								
9								
10								
11								
12								
13								

$$a = \frac{A \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n}{\left(\frac{100}{x}\right) \left(\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{n-1} - 1 \right) - 1}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Рассчитать месячный платеж по кредиту со							
2	ставкой банка x% в месяц сроком на n месяцев							
3								
4	x=	2	A=	200000	Пусть a - месячный платеж			
5	n=	12			A - сумма займа			
6								
7				a=	20436	p		
8								
9								
10	$a = \frac{A \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n}{\left(\frac{100}{x}\right) \left(\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{n-1} - 1 \right) - 1}$							
11								
12								
13								

Задача 9.№37.38[1]

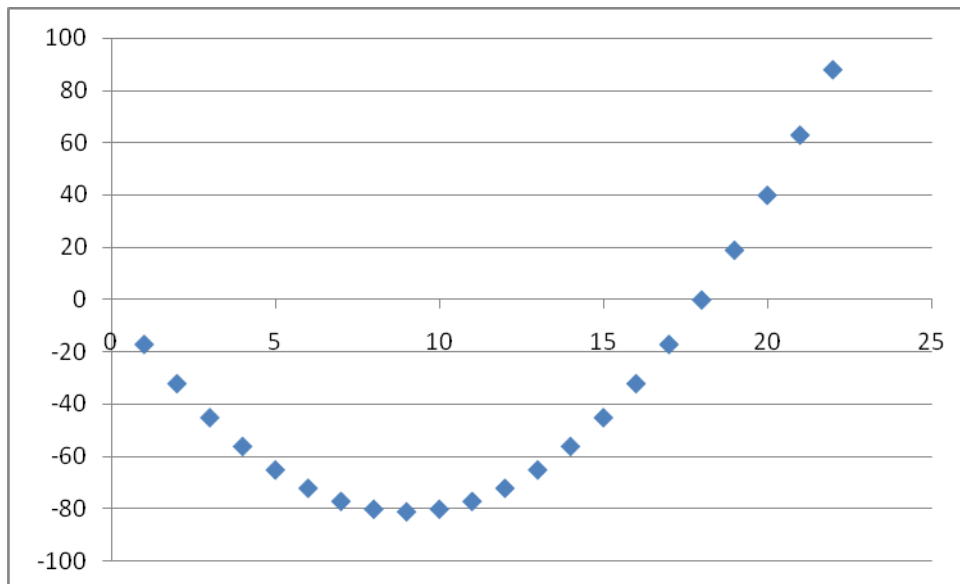
Дана последовательность $y_n = n^2 - 18n$

- а) Установите, сколько в ней отрицательных членов;
 б) найдите наименьший член последовательности;
 в) укажите номер члена последовательности, который равен 19;
 г) выясните, сколько членов последовательности принадлежит отрезку $[-15; 2]$.

шаг

1

n	y_n
1	-17
2	-32
3	-45
4	-56
5	-65
6	-72
7	-77
8	-80
9	-81
10	-80
11	-77
12	-72
13	-65
14	-56
15	-45
16	-32
17	-17
18	0
19	19
20	40
21	63
22	88



Ответ :а) $n=17$

Б) $y_n=-81$

В) $n=19$

Г) $n=2$

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения[1]

- Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. (Ответ: 12, 12).
- Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. (Ответ: -18; 18).
- Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь? (Ответ: 14; 14).
- Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. (Ответ: -5; 5).

- Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей. (Ответ: 2; 1).
- Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200м. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей? (Ответ: 50; 50).
- Площадь прямоугольника составляет 16 см². Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим? (Ответ: 4; 4).
- Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей? (Ответ: 30).

Памятка по решению задач на оптимизацию

I этап. Составление математической модели.

Проанализировав условия задачи, выделите **оптимизируемую величину** (сокращенно: О.В.), т.е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее **буквой у** (или S, R, V - в зависимости от фабулы).

Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за **независимую переменную** (сокращенно: Н.П.) и обозначьте ее **буквой х** (или какой-либо другой буквой).

Установите реальные границы изменения Н.П. (в соответствии с условиями задачи).

Исходя из условия задачи, **выразите у через х**. Математическая модель задачи представляет собой **функцию $y=f(x)$ с областью определения X**, которую нашли на втором шаге.

II этап. Работа с составленной моделью.

На этом этапе для функции $y=f(x)$, x принадлежащему промежутку X, **найдите $u_{\text{наим}}$ или $u_{\text{наиб}}$** в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые мы рассмотрели при определении наибольшего и наименьшего значений функции.

III этап. Ответ на вопрос задачи.

Здесь следует получить конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

4. Решение уравнений функционально-графическим методом[1,2]

Идея графического метода решения уравнения $f(x)=g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ и найти точки их пересечения – корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом мы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближённые, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить опорой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о функционально – графическом методе решения уравнений). Если, например, одна из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ возрастает, а другая убывает, то

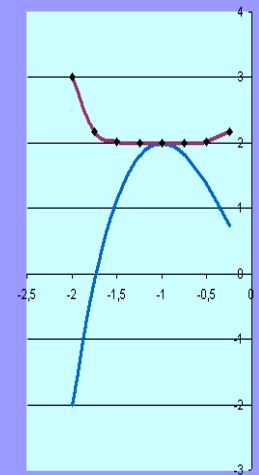
уравнение $f(x)=g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать).

Упомянем ещё одну довольно красивую разновидность функционально – графического метода: если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A , то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Решить уравнение $x^3-3x=(x+1)^6+2$

шаг	0,25		
x	y ₁	y ₂	
-2	-2	3	
-1,75	0	2	
-1,5	1	2	
-1,25	2	2	
-1	2	2	
-0,75	2	2	
-0,5	1	2	
-0,25	1	2	

ответ: **x=-1**



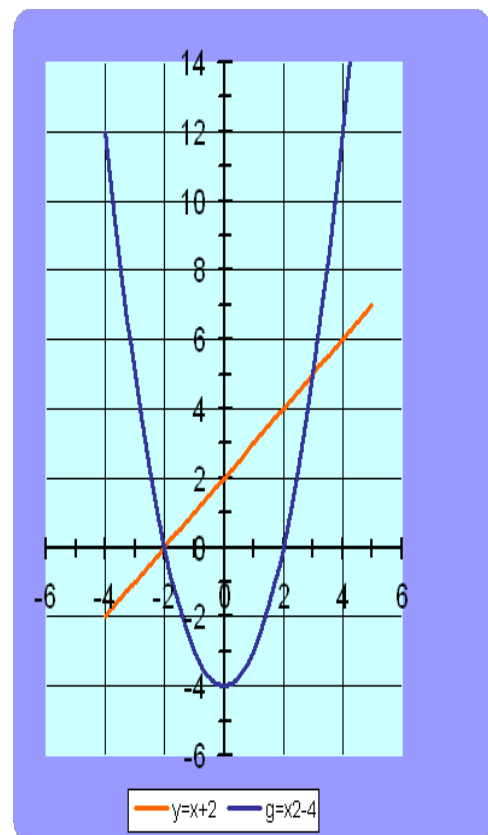
Найти количество корней данного уравнения $x+2=x^2-4$

Решение уравнений

$$x+2=x^2-4$$

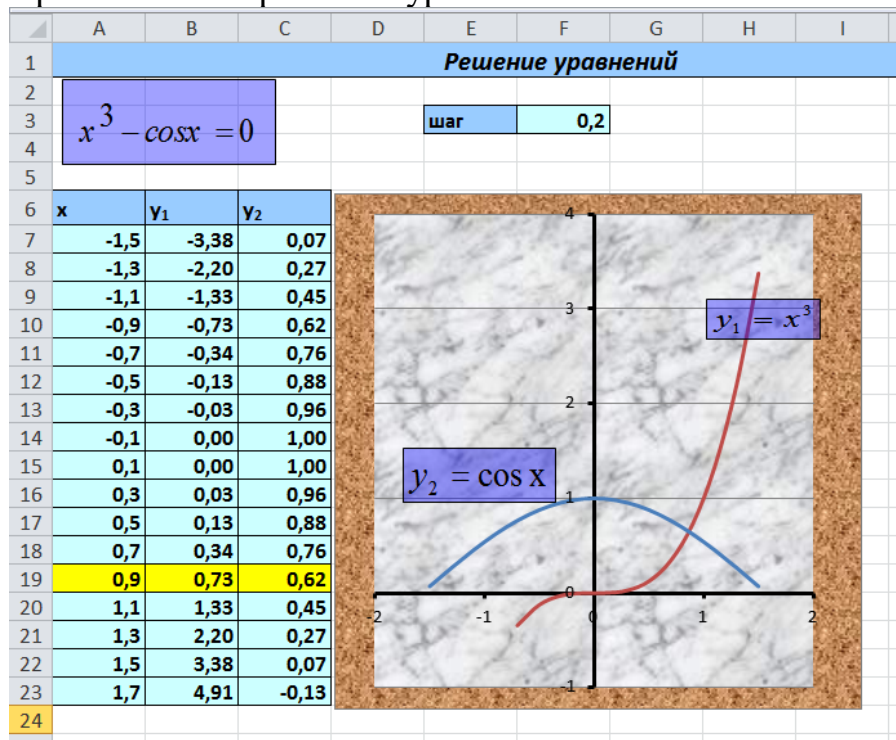
$$y=x+2 \quad g=x^2-4$$

шаг	0,5		
x	y	g	
-4	-2	12	
-3,5	-1,5	8,25	
-3	-1	5	
-2,5	-0,5	2,25	
-2	0	0	
-1,5	0,5	-1,75	
-1	1	-3	
-0,5	1,5	-3,75	
0	2	-4	
0,5	2,5	-3,75	
1	3	-3	
1,5	3,5	-1,75	
2	4	0	
2,5	4,5	2,25	
3	5	5	
3,5	5,5	8,25	
4	6	12	
4,5	6,5	16,25	
5	7	21	
	2	-4	
	2	-4	



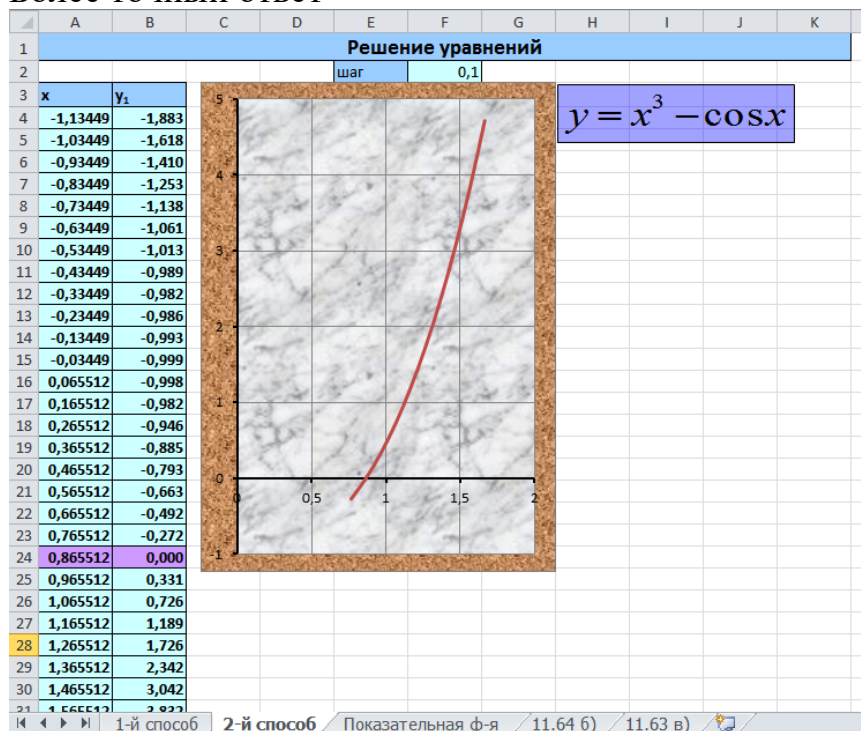
Ответ: 2 корня

Приближенное решение уравнения.



Ответ: $x=0,9$

Более точный ответ



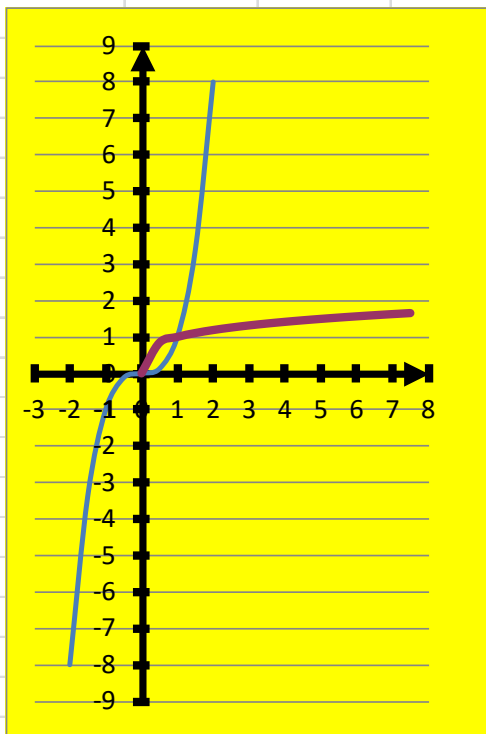
Ответ: $x=0,86512$

Задача 10. №9.14(а), №9.16(б), №15.41(а) [1,2]

9.14(в) Решите графически уравнение

X	Y1	y2
-2		-8
-1,5		-3,375
-1		-1
-0,5		-0,125
0	0	0
0,5	0,840896	0,125
1	1	1
1,5	1,106682	3,375
2	1,189207	8
2,5	1,257433	15,625
3	1,316074	27
3,5	1,367782	42,875
4	1,414214	64
4,5	1,456475	91,125
5	1,495349	125
5,5	1,531407	166,375
6	1,565085	216
6,5	1,596718	274,625
7	1,626577	343
7,5	1,654875	421,875
8	1,681793	512
8,5	1,707476	614,125

$$x^{\frac{1}{4}} = x^3$$

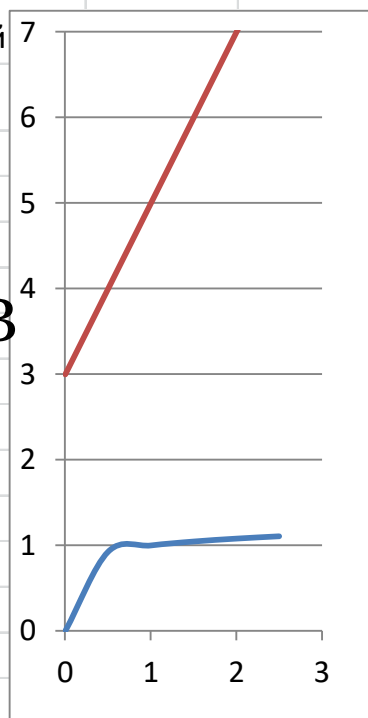


Ответ : $x = 0; 1$

9.16(б). Определите число решений системы уравнений

X	Y1	Y2
0	0	3
0,5	0,925875	4
1	1	5
1,5	1,046082	6
2	1,08006	7
2,5	1,107173	8
3	1,129831	9
3,5	1,149349	10
4	1,166529	11
4,5	1,181896	12
5	1,195813	13
5,5	1,208544	14
6	1,220285	15

$$\begin{cases} y = x^{\frac{1}{9}} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$



Ответ : система не имеет решений

№15.41(а). Построить график функции, описать свойства.

Шаг 0,5

x	y	x ²	y ²
-4	20,00	1	0,00
-3,5	18,00	1,5	0,58
-3	16,00	2	1,00
-2,5	14,00	2,5	1,32
-2	12,00	3	1,58
-1,5	10,00	3,5	1,81
-1	8,00	4	2,00
-0,5	6,00	4,5	2,17
0	4,00	5	2,32
0,5	2,00	5,5	2,46
1	0,00	6	2,58

$$y = \begin{cases} -4x + 4, & \text{если } x < 1, \\ \log_2 x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

свойства:

1. ОДЗ= $(-\infty; +\infty)$

2. ни четная ни нечетная

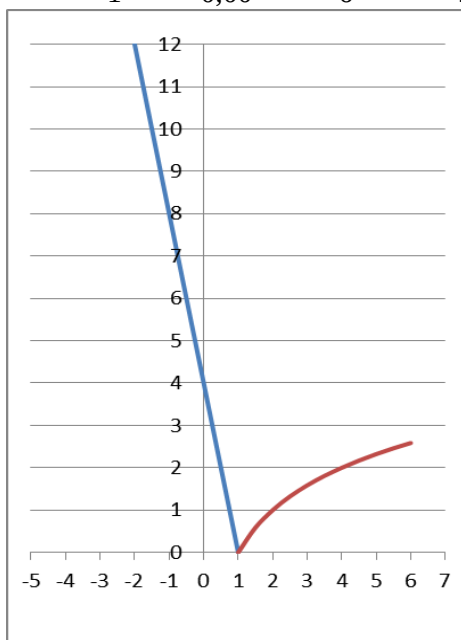
3. Ограничена снизу, $y = 0$

4. убывает на $(-\infty; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty)$

5. наим значение $y=0$, наиб - нет

6. $E(f)=[0; +\infty)$

7. дифференцируема, кроме $x=1$



Шаг	0,5		
x	y	x ²	y ²
-4	=-4*A4+4	1	=LOG(C4;2)
=A4+\$B\$2	=-4*A5+4	=C4+\$B\$2	=LOG(C5;2)
=A5+\$B\$2	=-4*A6+4	=C5+\$B\$2	=LOG(C6;2)
=A6+\$B\$2	=-4*A7+4	=C6+\$B\$2	=LOG(C7;2)
=A7+\$B\$2	=-4*A8+4	=C7+\$B\$2	=LOG(C8;2)
=A8+\$B\$2	=-4*A9+4	=C8+\$B\$2	=LOG(C9;2)
=A9+\$B\$2	=-4*A10+4	=C9+\$B\$2	=LOG(C10;2)
=A10+\$B\$2	=-4*A11+4	=C10+\$B\$2	=LOG(C11;2)
=A11+\$B\$2	=-4*A12+4	=C11+\$B\$2	=LOG(C12;2)
=A12+\$B\$2	=-4*A13+4	=C12+\$B\$2	=LOG(C13;2)
=A13+\$B\$2	=-4*A14+4	=C13+\$B\$2	=LOG(C14;2)

5. Решение систем линейных уравнений[3]

5.1 Метод Гаусса

Метод Гаусса – классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Состоит в постепенном понижении порядка системы и исключении неизвестных.

Описание метода:

Пусть исходная система выглядит следующим образом

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тогда согласно свойству элементарных преобразований над строками эту систему можно привести к трапецевидной форме:

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} = \beta_1 \\ \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} = \beta_r \\ 0 = \beta_{r+1} \\ 0 = 0 \\ \dots \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad \alpha_{1j_1}, \dots, \alpha_{rj_r} \neq 0.$$

Переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ называются главными переменными. Все остальные называются свободными.

Если $\beta_{r+1} \neq 0$, то рассматриваемая система несовместна.

$$\begin{cases} x_{j_1} + \hat{\alpha}_{1j_2}x_{j_2} + \dots + \hat{\alpha}_{1j_r}x_{j_r} = \hat{\beta}_1 - \hat{\alpha}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2} + \dots + \hat{\alpha}_{2j_r}x_{j_r} = \hat{\beta}_2 - \hat{\alpha}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{2j_n}x_{j_n} \\ \dots \\ x_{j_r} = \hat{\beta}_r - \hat{\alpha}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{rj_n}x_{j_n} \end{cases}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_i}}, \quad \hat{\alpha}_{ijk} = \frac{\alpha_{ijk}}{\alpha_{ij_i}} \quad (2)$$

Предположим, что $\beta_{r+1} = 0$.

Перенесём свободные переменные за знаки равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент, где $i=1, \dots, r, k=i+1, \dots, n$.

Если свободным переменным системы 2 придавать все возможные значения и вычислить через них главные переменные, то мы получим все решения этой системы линейных алгебраических уравнений. Так как эта система получена путем элементарных преобразований над исходной системой 1, то по теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях полученное нами решение является решением системы 1.

Пример. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 &= 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 &= -3 \end{cases}$$

Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдём одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

2	1	-1	8
0	1	1	2
0	0	1	-1
		z=	-1
		y=	3
		x=	2

Метод Крамера (правило Крамера) — способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется невырожденной.

Найдём решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E \Rightarrow E \cdot X = X$, òт

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отыскание решения системы по формуле называют матричным способом решения системы.

Матричное равенство запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

.....

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путём замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\text{Итак, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путём замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

Формулы $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, n$ называются **формулами Крамера**.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом либо по формулам Крамера.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$.

Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

Решить систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 6y + 4z = -3 \\ -4x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

Решение системы уравнений методом Крамера с помощью моделирования:

3	4	2	5					
5	-6	-4	-3					
-4	5	3	1					
					5	4	2	
D=	12			D1=	-3	-6	-4	12
					1	5	3	
					3	5	2	
				D2=	5	-3	-4	-24
					-4	1	3	
				D3=	60			
				X=	1			
				Y=	-2			
				Z=	5			

$D = (A1*B2*C3 + A2*B3*C1 + B1*C2*A3) - (C1*B2*A3 + B3*C2*A1 + A2*B1*C3)$

$D1 = (F5*G6*H7 + G5*H6*F7 + F6*G7*H5) - (H5*G6*F7 + G5*F6*H7 + H6*G7*F5)$

$D2 = (F9*G10*H11 + G9*H10*F11 + F10*G11*H9) - (H9*G10*F11 + G9*F10*H11 + G11*H10*F9)$

$D3 = (A1*B2*D3 + A3*B1*D2 + B3*A2*D1) - (A3*B2*D1 + A2*B1*D3 + D2*B3*A1)$

$x = \$I\$6 / \$B\6

$y = I10 / \$B\6

$z = F14 / \$B\6

Заключение

Возможность постановки вычислительного эксперимента на компьютере существенно ускорила процесс математизации науки и техники. Расширился круг профессий, для которых математическая грамотность становится необходимой.

Проделав данную исследовательскую работу, я убедился в том, что моделирование действительно огромную роль имеет в учебном процессе.

В результате проделанной работы:

- я изучил необходимую литературу по моделированию, в результате чего узнал много нового;
- научился решать математические задачи в программе MS Excel;
- научился строить графики элементарных функций и решать уравнения в программе MS Excel;
- освоил метод Гаусса и метод Крамера.

Так же рассмотренные мною задачи можно решать с помощью программирования.

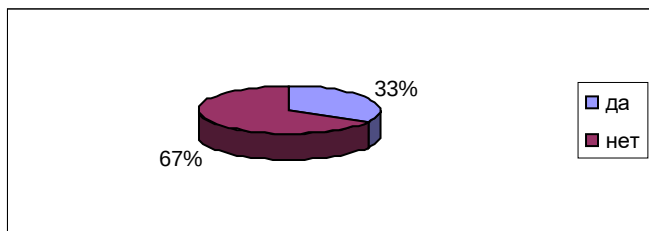
Литература

1. Алгебра и начала анализа. Учебник, задачник 10 кл профильный уровень. Мордкович и др МНМОЗИНА Москва 2014.
2. Алгебра и начала анализа. Учебник, задачник 11кл профильный уровень. Мордкович и др МНМОЗИНА Москва 2014.
3. Дмитрий Письменный «Конспект лекций по высшей математике» часть 1, Москва, 2006.
4. Учебно-методическая газета «Математика», приложение «Первое сентября», № 18, 2006 .
5. <http://www.newreferat.com/ref-20110-2.html>
6. <http://poznayka.org/s22170t1.html>
7. <http://www.kontrolnaya-rabota.ru/referat/categories/ekonomiko-matematicheskoe-modelirovanie/>
8. http://www.cleverstudents.ru/systems/Cramers_method.html

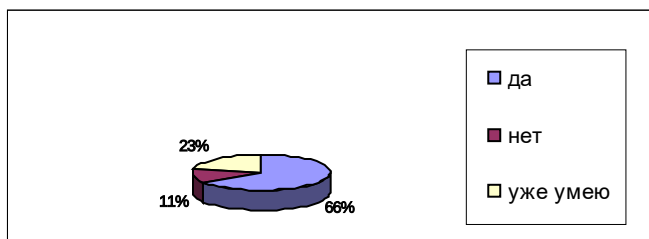
Приложение 1

Анкета:

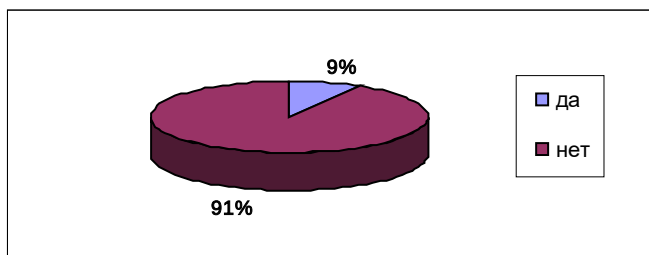
- 1) Сможете ли вы решить уравнение или систему уравнений с помощью компьютерных программ?



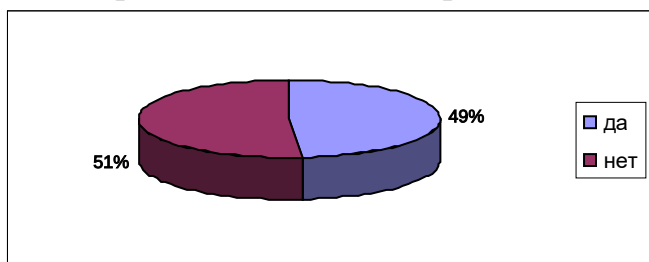
- 2) Хотели бы вы научиться решать уравнения и системы уравнений с помощью MS Excel?



- 3) Знаете ли вы о решении систем уравнений методом Гаусса и Крамера?



- 4) Сможете ли вы сконструировать коробочку наибольшего объёма из квадратного листа со стороной 10 см.?



Приложение 2

Построение графиков элементарных функций

Построение графика линейной функции

$$y=kx+b$$

шаг

0,5

коэффициент k

5

свободный член b

-3

таблица значений

x	y
-5	-28
-4,5	-25,5
-4	-23
-3,5	-20,5
-3	-18
-2,5	-15,5
-2	-13
-1,5	-10,5
-1	-8
-0,5	-5,5
0	-3
0,5	-0,5
1	2
1,5	4,5
2	7
2,5	9,5



Построение графика квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c$$

шаг

1 a

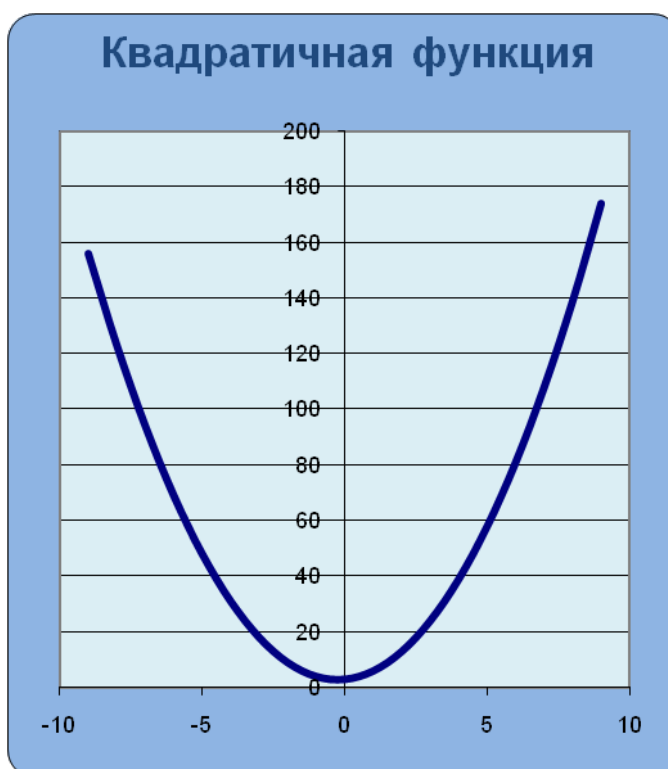
2 b

1 c

3

таблица значений

x	y
-9	156
-8	123
-7	94
-6	69
-5	48
-4	31
-3	18
-2	9
-1	4
0	3
1	6
2	13
3	24
4	39
5	58
6	81



Модуль действительного числа

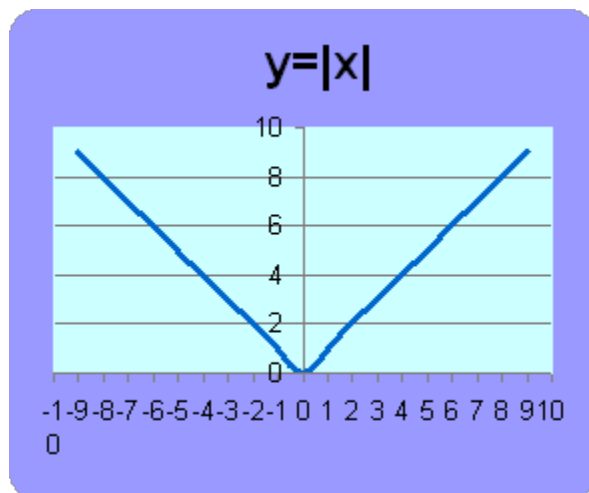
$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

шаг

1

таблица значений

x	y
-9	9
-8	8
-7	7
-6	6
-5	5
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

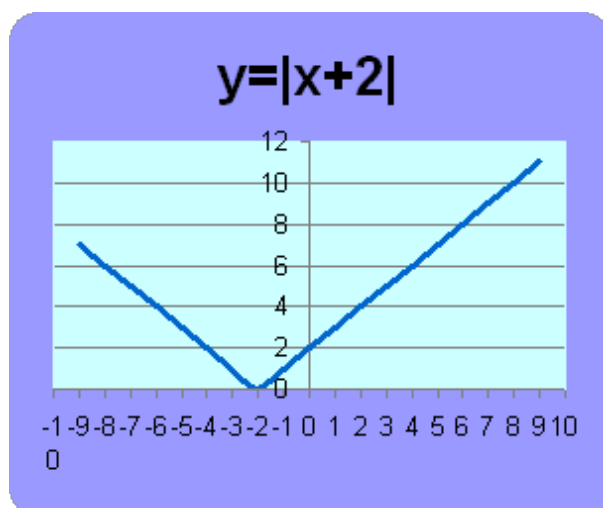


шаг

1

таблица значений

x	y
-9	7
-8	6
-7	5
-6	4
-5	3
-4	2
-3	1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11



Построение графиков степенной функции

$y=x^n$

шаг

1 n

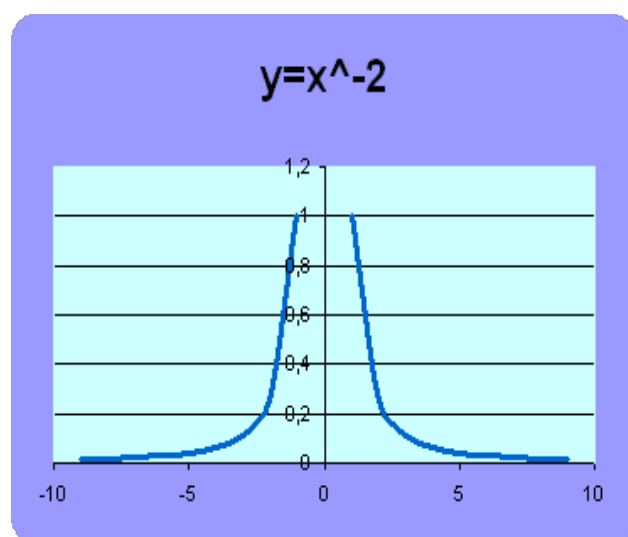
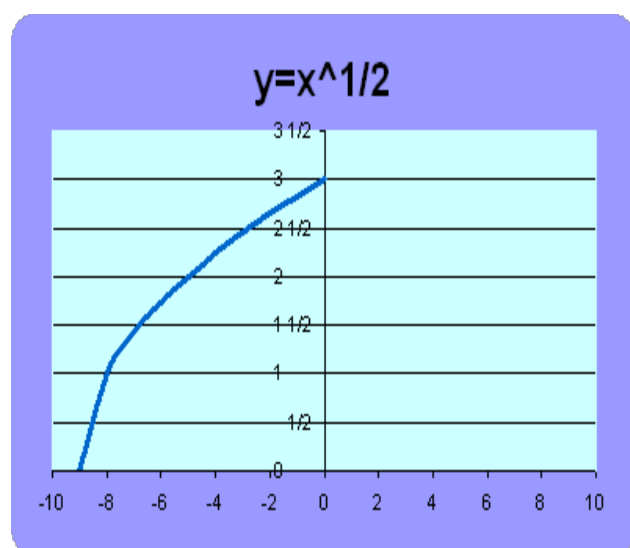
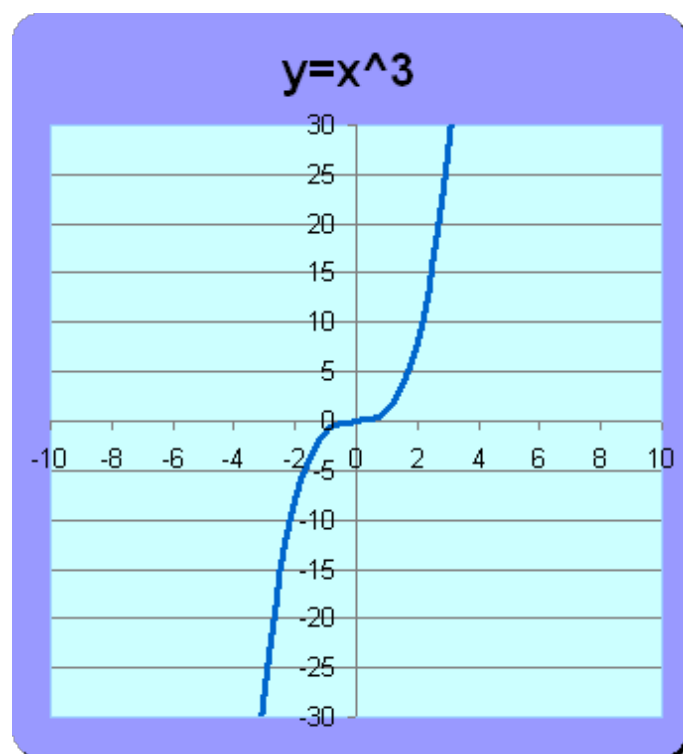
3 n

1/2 n

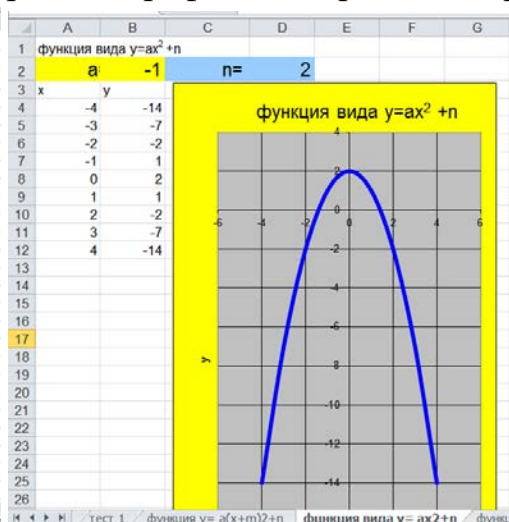
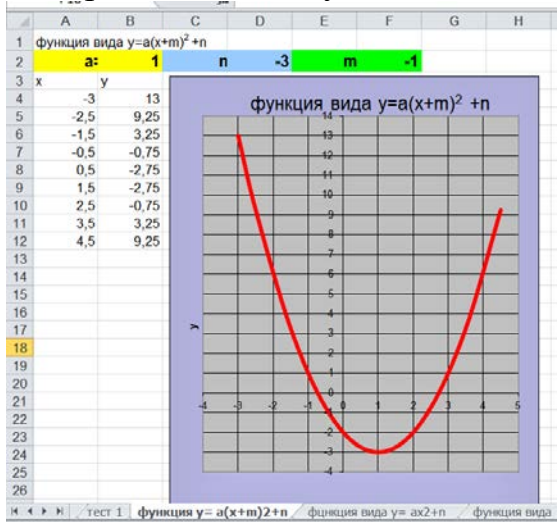
-2

таблица значений

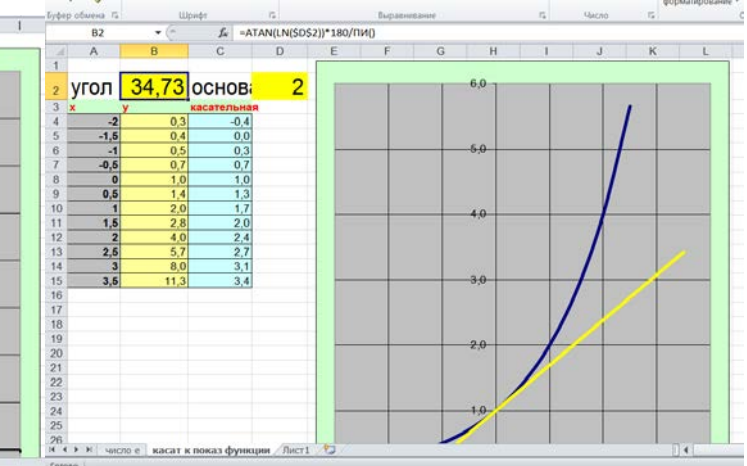
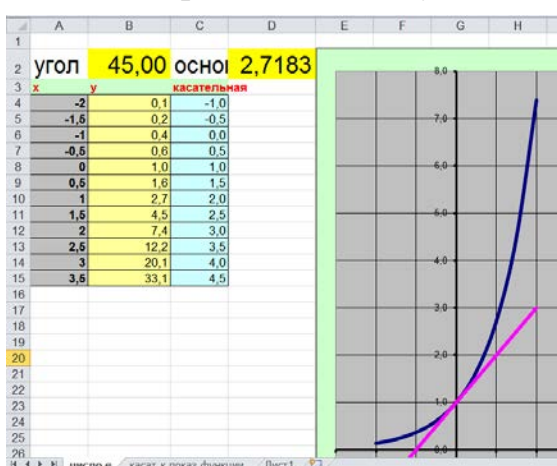
x	y	y	y
-9	-729		0,012346
-8	-512		0,015625
-7	-343		0,020408
-6	-216		0,027778
-5	-125		0,04
-4	-64		0,0625
-3	-27		0,111111
-2	-8		0,25
-1	-1		1
0	0	0	
1	1	1	1
2	8	1 2/5	0,25
3	27	1 3/4	0,111111
4	64	2	0,0625
5	125	2 1/4	0,04
6	216	2 4/9	0,027778
7	343	2 2/3	0,020408
8	512	2 5/6	0,015625
9	729	3	0,012346



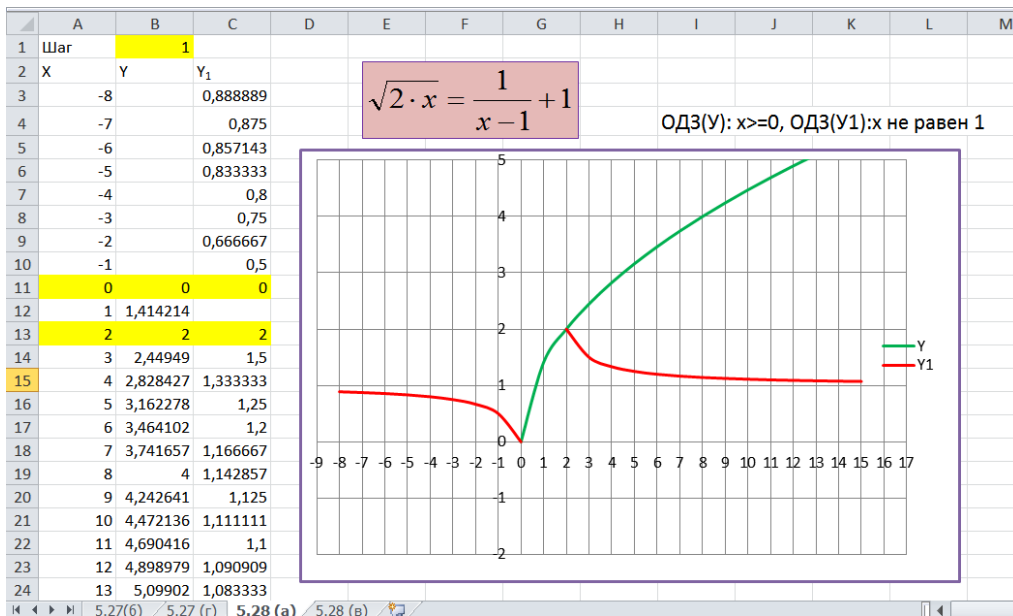
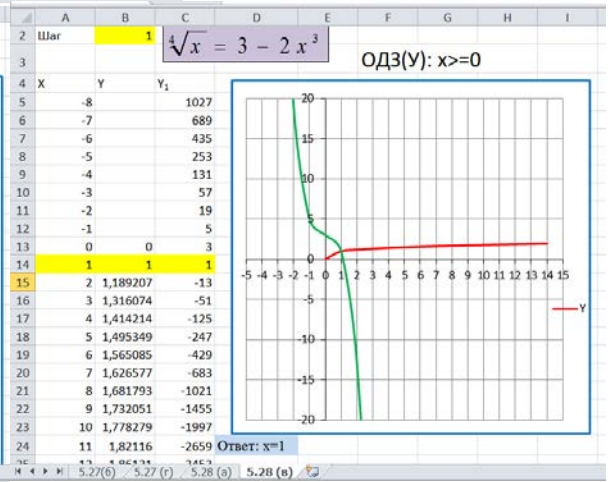
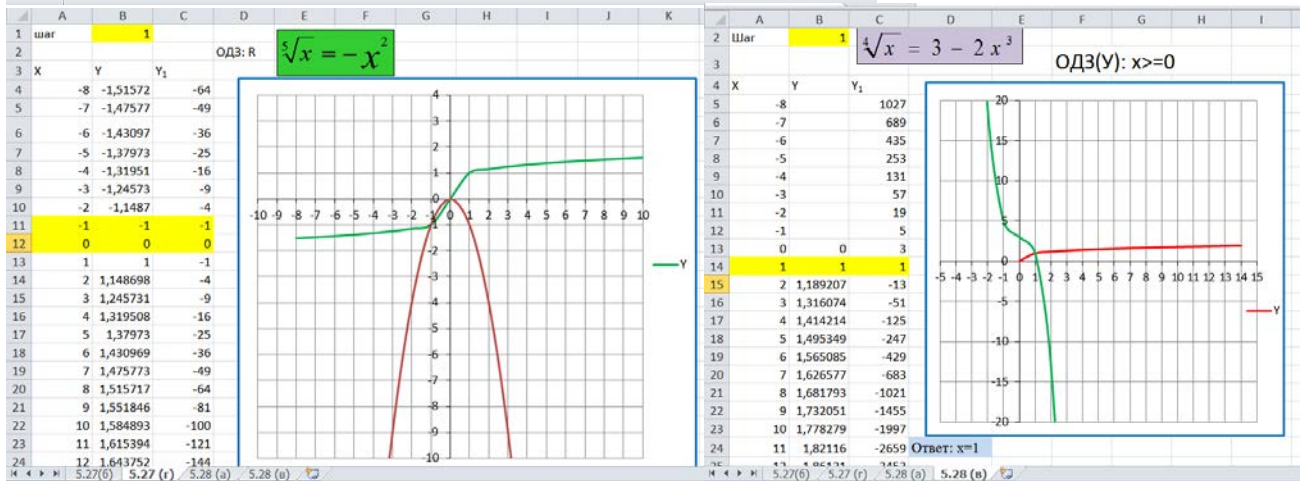
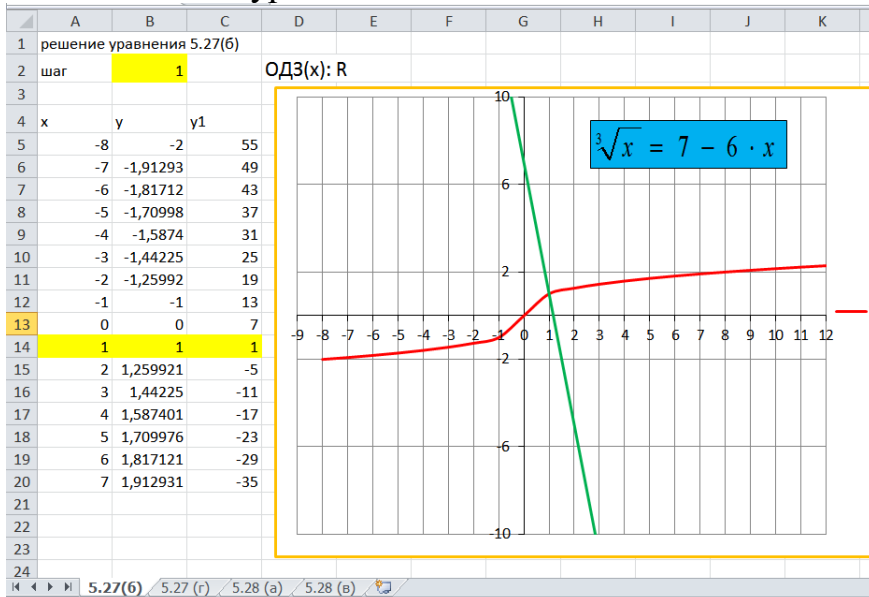
Интерактивный документ для построения графика квадратичной функции



Интерактивный документ для отыскания числа e (экспоненты)



Решение уравнений



Тест в интерактивном режиме

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	P	Q	R
1	Тема: Физический смысл производной.														
2	Автор: Суханов и Щелканов														
3	апр.17 21.04.2017														
4	1. Материальная точка движется прямолинейно по														
5	закону (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t —														
6	время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите														
7	ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.														
8	$x(t) = 6t^2 - 48t + 17$														
9	2. Материальная точка движется прямолинейно по														
10	закону (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t —														
11	время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее														
12	скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.														
13	$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$														
14	3. Материальная точка движется прямолинейно по														
15	закону (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t —														
16	время в секундах, измеренное с начала движения). В какой														
17	момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?														
18	$x(t) = t^2 - 13t + 23$														
19	4. Материальная точка движется прямолинейно по														
20	закону (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t —														
21	время в секундах, измеренное с начала движения). В какой														
22	момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2														
23	м/с?														
24	$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$														
25	5. Материальная точка движется прямолинейно по														
26	закону (где x — расстояние от точки отсчета в метрах,														
27	t — время в секундах, измеренное с начала движения).														
28	Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени с.														
29	$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$														
30	Итог: 3 иди учи														