Всероссийский конкурс учебно-исследовательских работ старшеклассников   
по политехническим дисциплинам для учащихся 9-11 классов

математика

**Практическое решение экономических задач**

Шейпак Инга Михайловна,

11 класс, МАОУ «Ергачинская СОШ»,

Кунгурский МО, п. Ергач

Кучукбаева Татьяна Александровна,

учитель математики

Пермь. 2022.

**Оглавление**

Введение…………………………………………………………………………...…3

Глава 1. Основные понятия

1.1. Простые и сложные проценты…………...…………………………………….5

1.2. Платежи…………………………………………………...……………………..8

1.3. Таблицы………………………………………………………………………….8

1.4. Аннуитетные платежи…………………………………………………………10

1.5. Дифференцированные платежи………………………………………………13

Глава 2. Типы задач с экономическим содержанием…………………………….16

Глава 3. Практическое решение экономических задач

3.1. Кредиты: погашение кредита равными долями (Аннуитетные платежи)…18

3.2. Кредиты: равномерное уменьшение долга по сравнению с предыдущим периодом (Дифференцированные платежи)……………………………………...19

3.3. Кредиты: остаток долга по заданной таблице (Фиксированные платежи)...21

3.4. Вклады: сравнение выгоды……………………………………………………22

3.5. Вклады: изменяющиеся проценты……………………………………………23

Глава 4. Задачи на оптимизацию

4.1. Оптимальный выбор: производительность…………..………………………24

4.2. Оптимальный выбор: окупаемость…………………………………………...27

Заключение………………………………………………………………………….29

Список используемой литературы………………………………………………...31

Приложение. Банк заданий "экономического" типа задач………………………32

**Введение**

В процессе подготовки к ЕГЭ по математике я выяснила, что не все темы мне под силу. В частности, вызывает определенные трудности задание №15 из профильного экзамена.К тому же, я понимаю, что современная жизнь делает задачи на проценты актуальными, так как сфера практического приложения процентных расчетов расширяется. Вопросы инфляции, повышение цен, снижение покупательской способности, платежи, налоги, прибыли, кредиты, начисление зарплаты, депозитные счета в Сбербанке касаются каждого человека в нашем обществе. Планирование семейного бюджета невозможны без умения производить несложные процентные вычисления.

Мне нравятся слова известного мыслителя Д.Пойа “Чтобы научиться решать задачи, надо их решать”. Предлагаемый в работе материал демонстрирует умение применять экономические задачи к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства.

Статистика решения экономической задачи на ЕГЭ объясняется и сложностью задания и просто тем, что такой темы нет в наших учебниках по алгебре.

Поэтому и возникла идея написать исследовательскую работу «Практическое решение экономических задач».

**Актуальность** темы моей работы определяется необходимостью уметь решать экономические задачи при сдаче ЕГЭ. Решение экономических задач очень полезно, так как жизнь современного человека тесно связана с финансовыми операциями.

**Проблема** заключается в отсутствии навыков применения математических и экономических знаний на практике в расчетах платежей банковских кредитов и прочих операций, а также неумение и боязнь решать экономические задачи на ЕГЭ.

**Объект исследования**: задачи с экономическим содержанием, банковские задачи.

**Предмет исследования:** различные подходы к решению задач о кредитах, в зависимости от условия задачи.

**Гипотеза:** в современном мире необходимы знания об экономике и в этом может помочь математика.

**Цель** моей работы - исследование методов решения задач с экономическим содержанием.

Для достижения данной цели я поставил перед собой ряд **задач:**

* изучить теоретический материал по выбранной теме;
* научиться решать задачи с процентами разных видов сложности;
* разобрать основные типы задач с примерами решений;
* создать таблицы для различных видов платежей;
* показать на примерах поиск решения реальной практической задачи

(кредит с разными видами платежей – аннуитетные, фиксированные и

дифференцированные).

**Материалы**: пособия по подготовке к олимпиадам и ЕГЭ.

**Методы исследования** – поиск необходимой информации в сети Интернет, теоретический анализ и синтез научной и учебной литературы, сравнение, систематизация информации, обобщение вывод, подбор и решение задач.

Конечно, на различных сайтах и в математической литературе можно найти

решения таких задач, но зачастую они либо содержат много лишней информации, либо решены непонятным для меня способом. Я же использовала табличный метод, так как считаю его самым наглядным и простым.

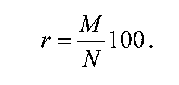
**Глава 1. Основные понятия**

* 1. **Простые и сложные проценты**

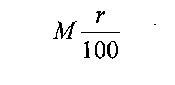
Решение финансовых задач основывается на использовании различных математических моделей: уравнений, неравенств, их систем с привлечением процентов, арифметической и геометрической прогрессий и производной. Приведу основные определения, понятия, таблицы и формулы.

**Процент** - это плата за использование средств (ссуда, кредит), предо­ставляемых одним лицом (кредитором) другому лицу (заемщику). Величина суммы оплаты долга определяется как процент (в математическом смысле) от суммы долга. [2]

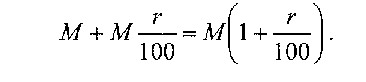
1) Все знают, как вычисляют проценты. По определению величина М составляет r процентов от другой величины N, если



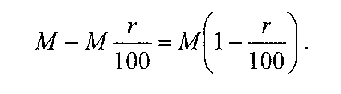
Значит r процентов от любой величины М определяется дробью



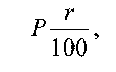
Например, если какая-нибудь величина М увеличивается на *r* процентов, результат такого увеличения будет

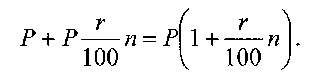


Аналогично при уменьшении величины М на r процентов



Представьте себе, что некоторая сумма денег *Р,* называемая начальным вкладом, помещается в банк. Спрашивается, какова будет сумма денег S, называемая будущей стоимостью вклада, через *n* лет, если годовая процентная ставка составляет r процентов. Ответ зависит от того, с каким процентом мы имеем дело - простым или сложным. В случае простого процента на начальный вклад ежегодно начисляется сумма, равная

 так что сумма вклада через *n* лет составит

[2]

Простые проценты используются преимущественно при краткосрочных финансовых операциях.

**Задача 1.**

Проценты по ссуде в 50 тысяч рублей составляют 1875 руб. Какова годовая процентная ставка?

Решение.

P = 50 тыс. руб., I = 1875 руб., n =

**Задача 2.**

Банк выплачивает 4800 рублей каждые полгода по вкладу, исходя из 10% годовых. Какова величина вклада?

Решение.

P = 4800 руб., r = 10% годовых, n = 0,5 года.

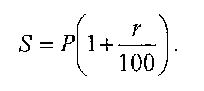
**Задача 3.**

За какой срок вклад в 70 тыс.рублей увеличится вдвое при ставке 10% годовых?

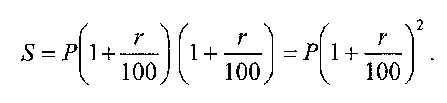
Решение.

P = 70 тыс.руб.,r = 10% годовых, S = 70∙ 2 = 140 тыс.руб.

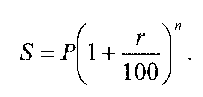
2) Если же при расчетах используются сложные проценты, т.е. «процент от процента», то после первого года будущая стоимость составит



На второй год проценты будут исчисляться уже от этой суммы и величина вклада составит



Значит, через *n* лет стоимость вклада достигнет величины



Это и есть основная формула для вычисления сложных процентов. Расчеты по этой формуле становятся простыми, если имеется калькулятор с клавишей , позволяющий вычислить значение показательной функции.

**Задачи 1.**

100 тысяч рублей инвестированы в банк на полгода по ставке: а) 10% в месяц; б) 10% годовых. Найти сложные проценты на эту сумму к концу срока. [4]

Решение:

а) r = 10% в месяц, n = 6 месяцев.

– P = 100(1 + 0.1)6 – 100 = 77.1561 тыс.руб

б) r = 10% годовых, n = 0,5 года.

Подставляя в формулу получим 4,88089 тыс.руб.

**Задача 2.**

Кредит в размере 80 тысяч рублей выдан под сложные проценты по ставке 8% годовых на 3 года. Вычислить наращенную сумму к концу срока. [4]

Решение:

S = 80(1 + 0,08)3 = 100,77696 тыс.руб.

**Задача 3.**

Определить сумму инвестирования под сложные проценты при ставке 12% годовых, если через 2 года наращенная сумму составила 62720 руб. [5]

Решение:

S = 80 тыс.руб., r = 12% годовых, n = 2 года.

= 50000 руб.

* 1. **Платежи**

В задачах по теме «Кредит» используют три основных вида платежа:

1. *Фиксированные платежи* -платежи, которые чётко оговариваются в

условии задачи.

2. *Аннуитетные платежи* -постоянные ежемесячные или ежегодные

платежи, которые не меняются на протяжении всего периода кредитования.

3. *Дифференцируемые платежи* - ежемесячные или ежегодные платежи,

уменьшающиеся к концу срока кредитования и обеспечивающие

уменьшение суммы долга на одну и ту же величину. [2]

* 1. **Таблицы**

При решении задач, связанных с ***аннуитетными платежами*** мне было очень удобно заполнять следующую таблицу:

S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты

b=1+0,01r – коэффициент

х – ежегодная (ежемесячная) выплата

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-xb2-xb | x | Sb3-xb2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-xb2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Sb4-xb3-xb2-xb-x |
| 5 год | (Sb4-xb3-xb2-xb-x)b=Sb5-xb4-xb3-xb2-xb | x | Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x |
| 6 год | (Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb | x | Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb-x |
| n год | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb | x | Полная выплата, долг равен 0 |

При решении задач, связанных с ***дифференцированными платежами*** я использовала следующую таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| n-1 |  |  |  |
| n |  |  | 0 |

При решении задач по теме **«Вклады»**:

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Вклад с % |
| 0 |  |
| 1 | Sb |
| 2 | Sb2 |
| n | Sbn |

При решении задач, в которых осуществлялись какие-либо действия (пополнение или снятие денег с вклада):

х – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад, % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +х | Sb+x |
| 2 год | b(Sb+x)= Sb2+xb | +х | Sb2+xb+x |
| 3 год | b(Sb2+xb+x)=Sb3\_+хb2+xb | Снял вклад |  |

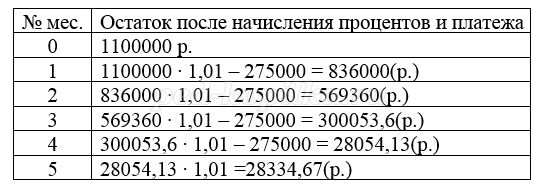
* 1. **Аннуитетные платежи**

Аннуитетный платеж – представляет собой равные ежемесячные транши (платежи), растянутые на весь срок кредитования. В сумму транша включены: часть ссудной задолженности и начисленный процент. При этом, в первые месяцы (или годы) кредита большую часть транша составляют проценты, а меньшую – погашаемая часть основного долга. Ближе к концу кредитования пропорция меняется: большая часть транша идет на погашение «тела» кредита, меньшая – на проценты. При этом общий размер транша всегда остается одинаковым. [1]

**Задача 1.**

1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей? [5]

Решение:



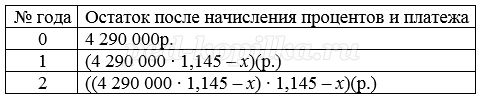
Ответ: 5 месяцев.

**Задача 2.**

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5 годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк х рублей. Какой должна быть сумма х, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)? [1]

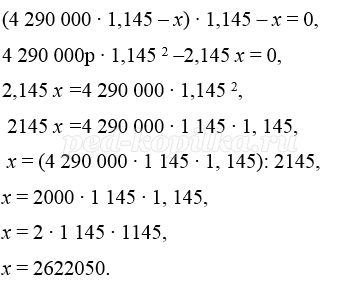
Решение:

Дмитрий взял в банке кредит 4 290 000 рублей.



Дмитрий выплатил кредит за два года, поэтому сумма долга в конце второго года равна 0.

Получим уравнение:



Значит сумма платежа равна 2622050р.

Ответ: 2622050 рублей.

* 1. **Дифференцированные платежи**

Дифференцированный платеж – это такая система выплат, при которой сама сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год (месяц). При этом платежи каждый год разные.   Таким образом, если кредит взят на *n* лет, то это значит, что сумму кредита *а* разделили на *n* равных частей и что каждый год после платежа сумма долга уменьшается на по сравнению с долгом на начало года. [2]

Заметим,

I. что каждая выплата состоит из двух частей: первая часть всегда фиксирована — это та часть, на которую должен уменьшаться долг каждый год (месяц), вторая часть — это сумма “набежавших” процентов на текущий долг.

Действительно, когда клиент выплачивает “набежавшие” проценты, сумма его долга становится равна той, которая была до начисления процентов (например, в первый год становится равна *a*). А далее он еще вносит часть от этого долга. И таким образом, сумма долга уменьшается на часть, что и подразумевает дифференцированная система платежей. [3]

II. переплата по кредиту всегда равна сумме “набежавших” процентов на долг в первый год, во второй год, в третий год и т.д.

При вычислении суммы “набежавших” процентов после вынесения за скобку общего множителя в скобках получается сумма чисел, составляющих арифметическую прогрессию, которую находим по формуле

[3]

При решении экономических задач на дифференцированные платежи примем следующие обозначения величин:

|  |
| --- |
| ***S*** – сумма кредита,  ***х*** – ежегодный (ежемесячный) платёж,  ***r*** – процентная ставка,  ***p =*** .  ***n*** – срок кредитования. |

Решение задач на дифференцированные платежи удобно оформлять в виде таблицы. Рассмотрим примеры решения задач.

**Задача 1.**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн. рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
* в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1, 4 млн. рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн. рублей? [4]

**Решение.**

Пусть ***S = 4,5 млн. рублей***.

***n = 9*** лет.

***r*** – процентная ставка;

***р*** = r/100.

***у*** – сумма, на которую уменьшается долг каждый год.

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов**  **(млн. руб.)** | **Начисленные проценты**  **(млн. руб.)** | **Долг после выплаты (млн. руб.)** | **Выплаты**  **(млн. руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *S – у* | *у + р S = 1,4* |
| **2** | *S – у* | *p (S – у)* | *S – 2у* | *у + p (S – у)* |
| **3** | *S – 2у* | *p (S –2 у)* | *S – 3у* | *у + p (S – 2у)* |
| **…** |  | *…* | *…* | *…* |
| **9** | *S – 8у* | *p (S – 8у)* | *S – 9у = 0* | *у + p (S –8 у) = 0,6* |

1. В выделенной жёлтым цветом ячейке таблицы мы получили уравнение:

*S – 9 у = 0,*

из которой следует, что

*S = 9 у,*

*у = S : 9*

*у = 4,5 : 9,*

*у = 0,5.*

1. Понятно, что наибольший годовой платеж по кредиту будет выплачен в первый год (так как в этот год будут начислены самые большие проценты), а наименьший – в последний год.

По этим двум условиям составим и решим систему уравнений:

Вычтем из первого уравнения второе:

*8 ∙ p y = 0,8*

*p y = 0,1*

*p = 0,1 : у*

*p = 0,1 : 0,5*

*p = 0,2.*

Из последнего получаем, что r = 20 %/

**Ответ: 20 %.**

**Глава 2. Типы задач с экономическим содержанием**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Направление** | **Особенность** | **Пример** |
| Кредиты | Погашение кредита равными долями | 31 декабря 2017 года Сергей взял в банке 2648000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк *x* рублей. Какой должна быть сумма *x*, чтобы Сергей **выплатил долг тремя равными платежами** (то есть за три года)? |
| Кредиты | Равномерное уменьшение долга по сравнению с предыдущим периодом | В январе планируется взять кредит на 5 месяцев. Условия по договору следующие: - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего месяца; - со 2-–го по 14-е число нужно выплатить часть долга; - **15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца**. Сколько процентов от суммы кредита составит общая сумма выплат за весь срок? |
| Кредиты | Остаток долга по заданной таблице | 16 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. руб. По условиям договора: − 1-го числа месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - целое число. − Со 2-го по 15-е число необходимо выплатить часть долга. − 16-го числа каждого месяца долг должен составлять сумму в соответствии с таблицей:   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Месяц | Февраль | Март | Апрель | Май | Июнь | Июль | | Долг | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |    Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн. руб. |
| Вклады | Сравнение выгоды | В начале 2018 года Юрий приобрел ценную бумагу стоимостью 25000 рублей. В конце каждого года цена бумаги увеличивается на 3000 рублей. В начале любого года Юрий может продать бумагу и сразу положить вырученные деньги на банковский счет. В этом случае каждый год сумма на счете будет расти на 10 %. Через сколько лет Юрий должен продать ценную бумагу, чтобы через 5 лет после ее покупки сумма на его банковском счете была наибольшей? |
| Вклады | Изменяющиеся проценты | В январе 2016 года предприниматель положил в банк некоторую сумму под х% годовых. Через год, в январе 2017 года, он снял 1/5 положенных денег, а оставшиеся деньги оставил в банке под у%. Известно, что (х+у)=30%. Каков должен быть х, чтобы в январе 2018 года сумма на счету предпринимателя была максимальной? |
| Оптимальный выбор | Производительность | У фермера есть два одинаковых поля по 10 га каждое. На каждом можно выращивать картофель и кукурузу, причем какую площадь занять под каждую культуру, фермер решает сам. Урожайность картофеля на 1 поле составляет 400 ц/га, а на 2 поле – 300 ц./га. Урожайность кукурузы на 1 поле составляет 300 ц/га, а на 2 поле – 400 ц/га. Картофель фермер продает по 5000 руб./ц, а кукурузу – по 6000 руб./ц. Какой максимальный доход может получить фермер? |
| Оптимальный выбор | Окупаемость | Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны (0,5х2+х+9) млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене р тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит рх – 0,5(х2+х+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. **При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?** |

**Глава 3. Практическое решение экономических задач**

***3.1. Кредиты: погашение кредита равными долями (Аннуитетные платежи)***

***Задача.***

*Максим хочет взять кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?* [1]

***Решение:***

Кредит (S) 1500000 руб.

Ставка (r) 10% годовых. Введём коэффициент b=1+0,01r

Ежегодная выплата (х) ≤350000 руб.

Сколько лет (n)-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | 1500000 |
| 1 год | 1500000•1,1=1650000 | 350000 | 1300000 |
| 2 год | 1300000•1,1=1430000 | 350000 | 1080000 |
| 3 год | 1080000•1,1=1188000 | 350000 | 838000 |
| 4 год | 838000•1,1=921800 | 350000 | 571800 |
| 5 год | 571800•1,1=628980 | 350000 | 278980 |
| 6 год | 278980•1,1=306878 | 306878 | 0 |

***Ответ: 6 лет.***

***3.2. Кредиты: равномерное уменьшение долга по сравнению с предыдущим периодом (Дифференцированные платежи)***

***Задача.***

*15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:*

*- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?* [1]

***Решение:*** Сумма кредита (S)

Ставка (r) -3 %, b=1,03 n=9 Сумма всех выплат =?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  | 0 |

=57,5

5Sb-4S=517,5

S(5b-4)=517,5

S(5\*1,03-4)=517,5

S=450

Sb(1+)-S)=5Sb-4S=

450\*(5\*1,03-4)=450\*1,15=517,5

***Ответ: 517,5 тысяч.***

***3.3. Кредиты: остаток долга по заданной таблице (Фиксированные платежи)***

***Задача.***

*15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| **Долг (в процентах от кредита)** | 100% | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 0% |

*В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?* [1]

***Решение:*** S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты (5%)

b=1+0,01r – коэффициент (1,05)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 15.01 |  |  | S |
| 15.02 | Sb | Sb-0,9S | 0,9S |
| 15.03 | 0,9Sb | 0,9Sb -0,8S | 0,8S |
| 15.04 | 0,8Sb | 0,8Sb -0,7S | 0,7S |
| 15.05 | 0,7Sb | 0,7Sb -0,6S | 0,6S |
| 15.06 | 0,6Sb | 0,6Sb -0,5S | 0,5S |
| 15.07 | 0,5Sb | 0,5Sb | Полная выплата -остаток 0 |

Общая сумма выплат:

(Sb+0,9Sb+0,8Sb+0,7Sb+0,6Sb+0,5Sb)-(0,9S+0,8S+0,7S+0,6S+0,5S)=

4,5Sb-3,5S=S(4,5b-3,5)=S(4,5\*1,05-3,5)=1,225S

***Ответ: 22,5 процента.***

***3.4. Вклады: сравнение выгоды***

***Задача.***

*Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых Однако через год и Саша, и Паша сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег? На сколько рублей?*

***Решение:***

S=50000 – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=3 года, х– действие

Саша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | -0,1Sb | 0,9Sb |
| 2 год | 0,9Sb\*b=0,9Sb2 | -20000 | 0,9Sb2- 20000 |
| 3 год | (0,9Sb2- 20000)\*b= 0,9Sb3\_ 20000b | Снял вклад |  |

0,9Sb3\_ 20000b = 0,9\*50000\*1,331–20000\*1,1 = 59895–22000 = 37895 рублей

Паша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | -0,2Sb | 0,8Sb |
| 2 год | 0,8Sb\*b=0,9Sb2 | -15000 | 0,8Sb2- 15000 |
| 3 год | (0,8Sb2- 15000)\*b = 0,8Sb3\_15000b | Снял вклад |  |

0,8Sb3\_ 15000b = 0,8\*50000\*1,331–15000\*1,1 = 53240–16500 = 36740рублей

37895 – 36740= 1155 рублей

***Ответ: у Саши на 1155 рублей.***

***3.5. Вклады: изменяющиеся проценты***

***Задача.***

*Гражданка Васильева вложила 44 млрд. рублей в два оффшорных банка на 3 года: часть денег в банк А, остальное в банк Б. Известно, что банк А ежегодно начисляет 10% годовых; банк Б в первый год начисляет 5% годовых, во второй – 10%, а в третий – 15%. Сколько рублей было вложено в каждый из банков, если через три года доход гражданки Васильевой от вложения денег составил 14 520 млн. рублей.*

***Решение:***

S=44000млн – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты,

b=1+0,01r – коэффициент,

n=3 года

1 банк

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Проценты | Вклад с процентами |
| 0 |  | S |
| 1 год | 10% | 1,1S |
| 2 год | 10% | 1,12S=1,21S |
| 3 год | 10% | 1,13S=1,331S |

2 банк

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Проценты | Вклад с процентами |
| 0 |  | 44000-S |
| 1 год | 5% | 1,05(44-S) |
| 2 год | 10% | 1,05\*1,1S=1,155(44000-S) |
| 3 год | 15% | 1,05\*1,1\*1,15S=1,32825(44000-S) |

1,331S+1,32825(44000-S)-44000=14520

1,331S-1,32825S=14520-58443+44000

0,00275S=77

S=28000 млн=28 млрд положила в 1 банк

44-28=16 положила во 2 банк

***Ответ: 28 млрд и 16 млрд рублей.***

**Глава 4. Задачи на оптимизацию**

Достаточно часто в вариантах ЕГЭ и диагностических работах стали появляться экономические задачи на оптимизацию. Как правило, решение таких задач сводится к исследованию функции, нахождению точек экстремума и наибольшего (наименьшего) значения функции. Для этого сначала составляется, как принято говорить, математическая модель задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой переменной. Затем выявляют оптимизирующую величину (т.е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и, записав функцию, связывающую независимую переменную с оптимизирующей величиной, исследуют её. Чаще всего это делается с помощью производной. Ниже приведены задачи, которые можно использовать для подготовки к ЕГЭ.

***4.1. Оптимальный выбор: производительность.***

***Задача 1.***

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно 𝑡2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 𝑡 единиц товара. [5]

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе – 300рублей.

Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

**Решение (с использованием производной):**

Допустим, что на заводе в первом городе рабочие трудятся 𝑥2 часов, а на заводе во втором городе 𝑦2 часов. Тогда в неделю будет произведено 𝑥 + 𝑦 единиц товара при затратах на оплату труда 500𝑥2 + 300𝑦2 рублей.

Найдем наибольшее значение выражения 𝑄 = 𝑥 + 𝑦 при условии 500𝑥2 +

300𝑦2 = 1 200 000. Выразив отсюда 𝑦 = √

4000 −

5 𝑥

3

2, получим 𝑄(𝑥) = 𝑥 +

√4000 −

5 𝑥2.

3

Нужно найти наибольшее значение функции 𝑄(𝑥) на отрезке [0; 20√6].

𝑄′(𝑥) = 1 − 5𝑥

√

при 𝑥 ≠ 20√6.

5 2

3∙ 4000−3𝑥

Из уравнения 𝑄′(𝑥) = 0 получаем

3 ∙ √4000 −

5

𝑥2 = 5𝑥

3

𝑥2 = 900

𝑥 = 30.

Точки 𝑥 = 30 – единственная критическая точка функции на отрезке

[0; 20√6]. Сравнивая значения 𝑄(30) = 80, 𝑄(20√6) = 20√6, 𝑄(0) =

20√10, получаем, что наибольшее значение функции 𝑄(𝑥) равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80

Ответ. 80

**Решение (введение параметра):**

Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся 𝑥2 часов, а на заводе во втором городе 𝑦2 часов. Тогда в неделю будет произведено 𝑥 + 𝑦 единиц товара при затратах на оплату труда 500𝑥2 + 300𝑦2 рублей.

Требуется найти наибольшее значение параметра 𝑎, где 𝑎 = 𝑥 + 𝑦, при выполнении условий 500𝑥2 + 300𝑦2 = 1 200 000 (\*), 𝑥 ≥ 0 и 𝑦 ≥ 0.

Выразив 𝑦 = 𝑎 − 𝑥, и, подставив в (\*) 5𝑥2 + 3(𝑎 − 𝑥)2 = 12 000, получим квадратное уравнение

8𝑥2 − 6𝑎𝑥 + 3𝑎2 − 12000 = 0.

Задача сводится к нахождению наибольшего неотрицательного значения параметра, при котором это уравнение имеет решение 𝑥 ≥ 0 и, кроме того, получается 𝑦 ≥ 0. Квадратное уравнение имеет решение, если

𝐷 = 36𝑎2 − 4 ∙ 8 ∙ (3𝑎2 − 12000) = −64𝑎2 + 32 ∙ 12000 ≥ 0 ↔

−80 ≤ 𝑎 ≤ 80.

При 𝑎 = 80 получаем 𝑥 = 30 и 𝑦 = 50. Значит, наибольшее количество единиц товара равно 80

Ответ. 80

***Задача 2.***

*У фермера есть два поля, каждое площадью 100 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?* [5]

***Решение:***

Вся площадь: 100 га

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 400 | x | 400x | 10000 | 4000000x |
| Свекла | 300 | kx | 300kx | 11000 | 3300000kx |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,k) = 4000000x+3300000kx→наиб

Заметим, что x+kx=100, т.е. x=где k

∑(k) = +→наиб

∑(k) = →наиб

Возьмём производную этой функции

= =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при k=0. Это означает, что всё первое поле нужно засадить картофелем, при этом доход будет 4000000рублей

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 300 |  |  | 10000 |  |
| Свекла | 400 |  |  | 11000 |  |

Из второй таблицы видно, что свекла имеет, как большую урожайность, так и большую цену за центнер, следовательно, второе поле нужно засадить свеклой. При этом доход будет 40011000рублей

Полный доход составляет 400 млн + 440 млн = 840 млн рублей.

***Ответ: 840 млн рублей.***

***4.2. Оптимальный выбор: окупаемость.***

***Задача.***

*Строительство нового завода стоит 115млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны0,5 x2+x+9млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит*

*px-(0,5 x2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?*

***Решение***

Составим функцию прибыли:

∑(x,p) =px-(0,5 x2+x+9)→наиб

∑(x,p) =px-0,5 x2-x-9

Возьмём производную этой функции

= p-x-1

Найдём нули производной: p-x-1=0

x = p-1

Функция принимает своё наибольшее значение приx = p-1(точка минимума).

Найдём прибыль:

∑(p) =p(p-1)-0,5 (p-1)2-(p-1)-9 = 0,5p2-p-8,5

По условию строительство завода должно окупиться не более, чем за 5 лет. То есть за 5 лет прибыль должна быть не меньше 115млн рублей.

5(0,5p2-p-8,5115

0,5p2-p-8,5-23=0

p2-2p-63=0

p1=9, p2=-7

***Ответ: 9 тысяч рублей.***

**Заключение**

Таким образом, понимание процентов, и умение производить процентные расчеты в настоящее время необходимы каждому человеку. Проценты затрагивают финансовую, демографическую, экономическую, социологическую и другие стороны нашей жизни. Их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. В настоящее время одной из важной составляющей знаний современного человека – знание банковских процентов. Вопросы инфляции, повышение цен, снижение покупательской способности, платежи, налоги, прибыли, кредиты, начисление зарплаты, депозитные счета в Сбербанке касаются каждого человека в нашем общества. Планирование семейного бюджета невозможны без умения производить несложные процентные вычисления. Изучение банковских процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

В случае возникновения кредитных обязательств, я смогу рассчитать все платежи для уплаты банку вне зависимости от того какую процентную ставку предлагает банк (простые или сложные проценты), смогу рассчитать штрафные санкции в случае просрочки платежа. Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом. Такие задачи позволяют наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствуют более качественному усвоению самого учебного материала и формированию умения решать задачи данного типа

В целом работа по данной теме для меня оказалась полезной, а также она принесла мне необходимые знания финансовой математики в сфере банковских процентов. Я считаю, цели, поставленные в работе, были достигнуты. Изучив специальную литературу, посвящённую простым и сложным процентам, я расширила свои математические навыки, и получила дополнительные теоретические знания не только по теме «Проценты», а еще и по теме «Финансы и кредит», научилась самостоятельно решать задачи на простые и сложные проценты, узнала историю возникновения процентов и банков, а также о влиянии процентов на жизнь человека. Тем самым я подготовилась к решению задач по финансовой математике, которые содержатся в материалах ЕГЭ.

**Список используемой литературы**

1. Гущин Д.Д. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ: математика»
2. Козырев В.М. «Основы современной экономики»
3. Прокофьев А.А., А. Г. Корянов А.Г. «Социально-экономические задачи»
4. https://100ballnik.com/
5. <https://100task.ru/subject/sample_fm.aspx>

**Приложение. Банк заданий «экономического» типа задач**

Задачи из открытого банка заданий ЕГЭ.

***Задача 1.***

*31 декабря 2014 года Борис взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Борис переводит очередной транш. Борис выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 560 тыс. рублей, во второй – 661,1 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Борису?* [1]

**Решение:**

Кредит (S) 1000000 руб.

Введём коэффициентb=1+0,01r

1 год выплата – x1=560000руб.

2 год выплата – x2=644100 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-560000b-644100=0

10000b2-5600b-6441=0

D=56002+4•10000•6441=31360000+257640000=289000000

b1==1,13

b2==-0,57не подходит по условию задачи.

b=1+0,01r

r=13

***Ответ: 13.***

***Задача 2.***

*31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй – 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?* [1]

***Решение:***

Кредит (S) 1000000 руб.

Введём коэффициентb=1+0,01r

1 год выплата – x1=550000руб.

2 год выплата – x2=638400 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-550000b-638400=0

10000b2-5500b-6384=0

D=55002+4•10000•6384=30250000+255360000=285610000

b1==1,12

b2==-0,57 не подходит по условию задачи.

***Ответ: r=12.***

***Задача 3.***

*31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?* [1]

***Решение:***

Ставка (r) - 12% , b=1,12

Ежегодная выплата (х) -3512320 рублей

Количество лет (n)3 года

Сумма кредита (S) -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x)=Sb3\_хb2-xb | х | - |

Sb3\_хb2-xb=x

Sb3-(1+b+b2)x=0

S=

***Ответ: 8436000рублей.***

***Задача 4.***

*31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000рублей в кредит по 10% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами ( то есть за четыре года)?* [1]

***Решение:***

Сумма кредита (S)- 9282000рубля

Ставка (а)=10%, b=1,1

Количество лет (n)4 года

Ежегодная выплата (транш) Х -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-xb2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Полная выплата -остаток 0 |

Sb4-xb3-xb2-xb =x

Sb4-(b+b2+b3)x=x

Sb4-(1+b+b2+b3)x=0

X=

X=

***Ответ: 2928200 рублей.***

***Задача 5****.*

*31 декабря 2014 года Федор взял в банке 6951000рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Федор переводит в банк платеж. Весь долг Федор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?* [1]

***Решение***: Сумма кредита (S) – 6951000 рублей

Ставка (r) -10%, b=1,1

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3-хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За три года: 27951003=8385300

За два года:40051002=8010200

Разница: 8385300-8010200=375100

***Ответ: на 375100 рублей.***

***Задача 6.***

Одной машинистке на перепечатку рукописи требуется на 12 ч больше, чем другой. Если 25% рукописи перепечатает первая машинистка, а затем к ней присоединится вторая машинистка, то на перепечатку рукописи им понадобиться 35 ч, считая от момента начала работы первой машинистки. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая отдельно?

***Решение:*** Пусть на перепечатку рукописи первой машинистке требуется  ч, тогда второй потребуется  ч. На перепечатку 25% рукописи первая машинистка затратит  ч. Выясним теперь, сколько времени потребуется двум машинисткам на перепечатку оставшихся 75% рукописи. Первая машинистка перепечатывает за один час  часть рукописи, вторая –  часть рукописи, а вместе за час они перепечатывают  часть рукописи. На перепечатку  рукописи им потребуется ч, т.е.  ч. Отсюда получаем уравнение: 

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня:  и .

Второй корень не соответствует условию задачи.

Ответ: первой машинистке на перепечатку рукописи требуется 60 ч, а второй – 48 ч.

***Задача 7.***

Положив в банк деньги, вкладчик получил через год прибыль в 240 тысяч рублей. Однако он не стал забирать деньги из банка, а, добавив к ним еще 60 тысяч, снова оставил деньги на год. В результате спустя еще год он получил в банке 1 миллион 100 тысяч рублей. Какая сумма была положена в банк первоначально и какой процент прибыли в год давал банк?

***Решение:*** Допустим, что первоначальный вклад составляет  тысяч рублей. Тогда процент прибыли за год равен . Сумма вклада, положенного в банк через год, составила  тысяч рублей, т.е.  тысяч рублей. Этот вклад принес доход, равный  тысячам рублей. Всего вкладчик получил 1100 тысяч рублей.

Получаем уравнение: 

Решив его, найдем, что это уравнение имеет два корня: ,  Выполнив расчеты, можно убедиться, что оба корня соответствуют условию задачи.

Ответ: задача имеет два решения: вкладчик вложил первоначально 200 тысяч рублей и получил доход 120% в год или вкладчик вложил первоначально 360 тысяч рублей и получил доход  в год.

***Задача 8.***

Имелось два слитка меди. Процент содержания меди в первом слитке был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором. После того как оба слитка сплавили, получили слиток, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в первом и во втором слитках, если в первом слитке было 6 кг меди, а во втором – 12 кг.

***Решение:*** Обозначим за  массу первого слитка в кг, за  массу второго слитка в кг, получим систему уравнений:



В результате получим: х=30, у=20.

Ответ: 30 кг, 20 кг

***Задача 9***.

Для определения оптимального режима снижения цен социологи предложили фирме с 1 января снижать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 10%, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо снижать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

***Решение:*** Пусть  руб. - стоимость товара,  - число процентов. Тогда,

I магазин

Февраль 

Март 

……………………………………

Июль 

II магазин

Март 

Май 

Июль 

По условию задачи через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковые, составляем уравнение:





Ответ: на 21%.

***Задача 10.***

В соответствии с договором фирма с целью компенсации потерь от инфляции была обязана в начале каждого квартала повышать сотруднику зарплату на 3%. Однако в связи с финансовыми затруднениями она смогла повышать ему зарплату только раз в полгода (в начале следующего полугодия). На сколько процентов фирма должна повышать зарплату каждые полгода, чтобы 1 января следующего года зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренной договором.

***Решение:*** Пусть  руб. - зарплата,  - процент повышения зарплаты. Тогда,

По плану: I квартал  руб.

……………………………

IV квартал  руб.

Фактически

I полугодие  руб.

II полугодие  руб.

По условию задачи зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренного договором, составляем уравнение:





Ответ: на 6,09 %.

***Задача 11.***

На заводе было введено рационализаторское предложение. В результате время, необходимое для изготовления рабочими некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда этого рабочего?

***Решение:*** Пусть  - производительность труда, а  - весь объем работы. Тогда работа будет выполнена за время . В результате роста производительности труда время на изготовление детали стало равно , соответственно производительность , или . Соответственно рост производительности труда составил: 

Ответ: 25%

***Задача 12.*** Из жителей города одни говорят только на украинском, другие – только на русском, третьи – на обоих языках. По-украински говорят 85% всех жителей, а по-русски – 75%. Сколько процентов всех жителей этого города говорят на обоих языках?

***Решение:***

100%-85%=15% - не говорят на украинском;

100%-75%=25% - не говорят на русском;

100%-15%-25%=60% - говорят на обоих языках.

Ответ: 60% **.**

***Задача 13.***

*1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?*

***Решение.***

Кредит (S) 1000000 руб.

Ставка (r) 1% годовых.Введём коэффициентb=1+0,01r

Ежемесячная выплата (х) ≤125000 руб.

Сколько лет –(n)-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | 1000000 |
| 1 месяц | 1000000•1,01=1010000 | 125000 | 885000 |
| 2 месяц | 885000•1,01=893850 | 125000 | 768850 |
| 3 месяц | 768850•1,01=776538,5 | 125000 | 651538,5 |
| 4 месяц | 651538,5•1,01=658053,9 | 125000 | 533053,9 |
| 5 месяц | 533053,9•1,01=538384,44 | 125000 | 413384,44 |
| 6 месяц | 413384,44•1,01=417518,28 | 125000 | 292518,28 |
| 7 месяц | 292518,28•1,01=295443,46 | 125000 | 170443,46 |
| 8 месяц | 170443,46•1,01=172147,89 | 125000 | 47147,89 |
| 9 месяцев | 47147,89•1,01=47619,37 | 47619,37 | - |

***Ответ: 9 месяцев.***

***Задача 14.***

*31 декабря 2014 года Арсенийвзял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсенийпереводит очередной транш. Арсентий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй – 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?*

***Решение:***

Кредит (S) 1000000 руб.

Введём коэффициентb=1+0,01r

1 год выплата – x1=550000руб.

2 год выплата – x2=638400 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-550000b-638400=0

10000b2-5500b-6384=0

D=55002+4•10000•6384=30250000+255360000=285610000

b1==1,12

b2==-0,57не подходит по условию задачи.

***Ответ:r=12.***

***Задача 15.***

*31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами( то есть за четыре года)?*

***Решение:***

Ставка (r) - 10%

b=1,1

Ежегодная выплата (х) -2928200 рублей

Количество лет (n)4 года

Сумма кредита (S) -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-xb2-xb | x | Sb3-xb2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-xb2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Полная выплата -остаток 0 |

Sb4-xb3-xb2-xb=x

Sb4-(1+b+b2+b3)x=0

S=

***Ответ: 9282000 рублей.***

***Задача 16***.

*31 декабря 2014 года Павел взял в банке 6327000 рублей в кредит по 12% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Павел переводит в банкХ рублей.Какой должна быть сумма Х, чтобы Павел выплатил долг тремя равными платежами ( то есть за три года)?*

***Решение:***

Сумма кредита (S)- 6327000 рубля

Ставка (а)=12%,b=1,12

Количество лет (n)3 года

Ежегодная выплата ( транш) Х -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3\_ хb2-xb =x

Sb3-(b2-b)x=x

Sb3-(1+b+b2)x=0

X==

***Ответ: 2634240 рублей.***

***Задача 17.***

*31 декабря 2014 года Степан взял в банке 4004000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Степан переводит в банк платеж. Весь долг Степан выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?*

***Решение:***

Сумма кредита (S) – 4004000 рублей

Ставка (r) -20%, b=1,2

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3-хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За 3 года выплатил: 3\*1900800=5702400

За два года: 2\*2620800=5241600

Разница: 5702400-5241600=460800

***Ответ: 460800 рублей.***

***Задача 18.***

*31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 3689000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк платеж. Весь долг Алексей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?*

***Решение:*** Сумма кредита (S) – 3689000 рублей

Ставка (r) -12,5%, b=1,125

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3-хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За три года: 15491253=4647375

За два года:21971252=4394250

Разница: 4647375-4394250=253125

***Ответ: 253125 рублей.***

***Задача 19.***

*В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы*

*− каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;*

*− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;*

*− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 |
| Долг (в тыс. рублей) | S | 0,7S | 0,4S | 0 |

*Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.*

***Решение:*** S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты (15%)

b=1+0,01r – коэффициент (1,15)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 2016 |  |  | S |
| 2017 | Sb | Sb-0,7S | 0,7S |
| 2018 | 0,7Sb | 0,7Sb -0,4S | 0,4S |
| 2019 | 0,4Sb | 0,4Sb | Полная выплата -остаток 0 |

1 выплата 1,15S-0,7S= 0,45S=

2выплата0,7\*1,15S-0,4S= 0,405S=

3выплата0,4\*1,15S= 0,46S=

По условию, все выплаты должны быть целыми. Значит, число *S* должно делиться на 20, 200 и 50. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 200.

***Ответ: 200 тысяч.***

***Задача 20.***

*15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:*

*- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?*

***Решение:*** Сумма кредита (S)

Ставка (r) -3 %,b=1,03n=9Сумма всех выплат =?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  | 0 |

=57,5

5Sb-4S=517,5

S(5b-4)=517,5

S(5\*1,03-4)=517,5

S=450

Sb(1+)-S)=5Sb-4S=

450\*(5\*1,03-4)=450\*1,15=517,5

***Ответ:517,5 тысяч.***

***Задача 21.***

*15-го января планируется взять кредит в банке на несколько месяцев. Условия его возврата таковы:*

*— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;*

*— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*На сколько месяцев можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. (решение с помощью формулы суммы арифметической прогрессии)*

***Решение:*** Сумма кредита (S) , ставка (r) -5 %,b=1,05n=?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| n-1 |  |  |  |
| n |  |  | 0 |

Sb()-S)=1,25S

По формуле суммы арифметической прогрессии получаем

Sb\*-S\*=1,25S /S

b\*-=1,25

1,05\*(n+1)-(n-1)=2,5

1,05n+1,05-n+1=2,5

0,05n=0,45

n=9

***Ответ: 9 месяцев.***

***Задача 22.***

*Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.*

*По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).*

*По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?*

***Решение:*** Сумма кредита (S) – 331000 рублей

Ставка (r) -10%, b=1,1

Аннуитетные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 месяц | Sb | х | Sb-x |
| 2 месяц | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 месяц | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3\_ хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0



3х=399300

Дифференцированные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  | 0 |

Sb(1+)-S)=2Sb-S

2\*331000\*1,1- 331000=331000\*1,2=397200

399300 – 397200= 2100

***Ответ: дифференцированные платежи, выгода 2100 рублей.***

***Задача 23.***

*Петр Иванович взял кредит на несколько лет и выплатил его равными ежегодными платежами по 200000руб. При этом вначале каждого года сумма текущего долга увеличивалась на 10 %, а в конце года производился платёж. Если бы Петр Иванович не делал платежей, то за это время вследствие начисления процентов сумма кредита составила бы 928200 руб. На сколько лет был взят кредит?*

***Решение:***

Кредит (S)

Введём коэффициентb=1+0,01r

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Долг с % |
| 0 |  |
| 1 | Sb |
| 2 | Sb2 |
| 3 | Sb3 |
| n год | Sbn |

Sbn=928200,ставка (r) -10%, b=1,1

х= 200000рублей, аннуитетные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | х | Sb-x |
| 2 | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | Sb3\_ хb2-xb-x |
| n год | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb | x | Полная выплата, долг равен 0 |

Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb-x=0

Sbn-x(bn-1+bn-2+…+b2+b+1)=0

По формуле суммы геометрической прогрессии

bn-1+bn-2 +…+b2+b+1=

Sbn- x =0

928200- 200000 =0

2000000-1)=928200

=1+0,4641, =1,4641

n=4

***Ответ:4 года.***

***Задача 24.***

*Василий кладет в банк 1 000 000 рублей под 10% годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года) на счет фиксированную сумму 133 000 рублей. Какая сумма будет на счете у Василия через 4 года? (Решение с помощью формулы суммы геометрической прогрессии)*

***Решение:***

S=1000000 – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=4 года, х =133000 – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +х | Sb+x |
| 2 год | b(Sb+x)= Sb2+xb | +х | Sb2+xb+x |
| 3 год | b(Sb2+xb+x)=Sb3\_+хb2+xb | +х | Sb3\_+хb2+xb+х |
| 4 год | b(Sb3\_+хb2+xb+х)= Sb4\_+хb3+xb2+хb | Снял вклад |  |

Sb4\_+хb3+xb2+хb=Sb4\_+хb(b2+b+1)=

***Ответ: 1948353 рублей.***

***Задача 25.***

*Миша и Маша положили в один и тот же банк одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?*

***Решение:***

S – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=3 года, х– действие

Миша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | -5000 | Sb - 5000 |
| 2 год | (Sb-5000)\*b=Sb2-5000b | +5000 | Sb2-5000b+5000 |
| 3 год | (Sb2-5000b+5000)\*b = Sb3-5000b2+5000b | Снял вклад |  |

Sb3-5000b2+5000b = 1,331S-5000\*1,21+5000\*1,1=1,331S-6050+5500=1,331S-550

Маша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +5000 | Sb + 5000 |
| 2 год | (Sb+5000)\*b=Sb2+5000b | -5000 | Sb2-5000b-5000 |
| 3 год | (Sb2+5000b-5000)\*b = Sb3+5000b2-5000b | Сняла вклад |  |

Sb3+5000b2-5000b = 1,331S+5000\*1,21-5000\*1,1=1,331S+6050-5500=1,331S+550

***Ответ: у Маши на 1100 рублей.***

***Задача 26.***

*1ноября2017года Николай открыл в банке счёт «Управляй», вложив S тысяч рублей (S–целое число) сроком на 4 года под 10% годовых. По договору с банком проценты по вкладу должны начисляться31 октября каждого последующего года.1 ноября 2019 года и 1 ноября 2020 года Николай планирует снять со счёта 100тысяч и 50 тысяч рублей соответственно.1 ноября 2021 года Николай собирается закрыть счёт в банке и забрать все причитающиеся ему деньги. Найдите наименьшее значение S, при котором доход Николая от вложений в банк заэти 4 года окажется более 70 тысяч рублей.*

***Решение:***

S – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=4 года, х– действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 2017 |  |  | S |
| 2018 | Sb |  | Sb |
| 2019 | Sb2 | -100 | Sb2-100 |
| 2020 | b(Sb2-100)=Sb3\_100b | -50 | Sb3\_100b-50 |
| 2021 | b(Sb3\_100b-50)= Sb4\_100b2-50b | Снял вклад |  |

Sb4\_100b2-50b –S+15070

S(b4\_1)-100b2-50b +15070

S(1,14\_1)70-150+55+121

0,4641S96

S206,9

S=207

***Ответ: 207тысяч рублей.***

***Задача 27.***

*За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом 11  и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на 104 %. Определите срок хранения вклада.*

***Решение:***

S – сумма вклада

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | % | Вклад с % |
| 0 |  | S |
| n | 5%, | 1,05nS |
| m | 12%, | 1,12m1,05nS |
| k | 11 % | k 1,12m 1,05nS |
| p | 12,5% | 1,125p×k 1,12m 1,05nS |

Пусть n месяцев лежал вклад под 5%, m месяцев – под12%, k месяцев – под11 , p месяцев – под 12,5 %.

1,125pk 1,12m 1,05nS = S

1,125p = p = p= =

k= =

1,12m = m = m= =

1,05n = n = n= =

= =

= -2n+2m+k-3p=-3 n=1

= n-2k+2p = -1 m=1

= -n+k-2m = 0 k=3

= m+ n = 2p=2

1+1+3+2 = 7

***Ответ: 7 месяцев.***

***Задача 28***.

*Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?*

***Решение:***

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Стоимость ценной бумаги |
| 0 | 7000 |
| 1 | 7000+2000 |
| 2 | 7000+22000 |
| 3 | 7000+32000 |
| n-1 | 7000+(n-1)2000 |

На банковском счёте:

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Стоимость ценной бумаги |
| n | b(7000+(n-1)2000) |
| n+1 | 7000+(n-1)2000) |
| 15 | 7000+(n-1)2000) |

Чтобы сумма на банковском счёте была наибольшей необходимо, чтобы процент (r) от стоимости ценной бумаги в n-ом году был больше, чем 2000 рублей

r(7000+(n-1)2000)2000

0,1(7000+2000n-2000)2000

500+200n2000

200n

n

n=8

***Ответ: 8года.***

***Задача 29.***

*Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?*

***Решение:***

Общая площадь: 981

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь одного номера | Кол-во номеров | Полная площадь | Цена заодин номер | Полный доход |
| Стандартные номера | 27 | x | 27x | 2000 | 2000x |
| Люкс | 45 | y | 45y | 4000 | 4000y |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,y) = 2000x+4000y→наиб

Заметим, что 27x+45y981, т.е. x где y , т.е.y

∑(y) = +4000y→наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

=

Значит функция возрастает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=21. Это означает, что номеров люкс будет 21. Проверим общую площадь: 45ер. При этом полный доход будет рублей.

***Ответ: 86000 рублей.***

***Задача 30.***

*Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в стуки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?*

***Решение:*** Общая площадь : 940

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь одного номера | Кол-во номеров | Полная площадь | Цена за один номер | Полный доход |
| Стандартные номера | 30 | x | 30x | 4000 | 4000x |
| Люкс | 40 | y | 40y | 5000 | 5000y |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,y) = 4000x+5000y→наиб

Заметим, что 30x+40y940, т.е. x где y , т.е.y

∑(y) = +5000y→наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

=

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=0. Это означает, что стандартных номеров будет 940. Проверим общую площадь: 30ер на номер люкс. При этом полный доход будет рублей.

***Ответ: 125000 рублей.***

***Задача 31.***

*Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе,Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?*

***Решение:*** Оплата труда в неделю : 900000рублей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | x | 250 | 250 |
| 2 завод | y2 | y | 200 | 200 |

Составим функцию количества единиц товара:

∑(x,y) = x+y→наиб

Заметим, что 250+200900000, т.е. x где y

∑(y) = +y→наиб

Возьмём производную этой функции

= +1 =

Найдём нули производной: =0

=0

0,64=(3600-)

1,44=3600

y=50

Функция принимает своё наибольшее значение при y=50 (точка максимума).

x==40

Найдём количество единиц товара :+50 = 90

***Ответ: 90 единиц товара.***

***Задача 32.***

*Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 3t единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 4t единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?*

***Решение:*** Оплата труда в неделю: 5000000рублей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | 3x | 500 | 500 |
| 2 завод | y2 | 4y | 500 | 500 |

Составим функцию количества единиц товара:

∑(x,y) = 3x+4y→наиб

Заметим, что 500+5005000000, т.е. x где y

∑(y) =3 +4y→наиб

Возьмём производную этой функции

= 3+4 =

Найдём нули производной: =0

=0

9=16(10000-)

25=1600000

y=80

Функция принимает своё наибольшее значение при y=80 (точка максимума).

x==60

Найдём количество единиц товара: 3+480 = 180+320 = 500

***Ответ: 500 единиц товара.***

***Задача 33.***

*Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t 2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?*

***Решение:*** 70 единиц товара

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | x | 500 | 500 |
| 2 завод | y2 | y | 200 | 200 |

Составим функцию еженедельной оплаты труда:

∑(x,y) = 500→наим

Заметим, что x+y70, т.е. x где y

∑(y) =500→наим

∑(y) =500 =700-70000y+2450000

Возьмём производную этой функции

= 1400y-70000

Найдём нули производной: 1400y-70000=0

y=50

Функция принимает своё наименьшее значение при y=50 (точка минимума).

x

Найдём еженедельную оплату труда:+200 = 500+200500000=700000

***Ответ: 700тысяч рублей.***

***Задача 34.***

*Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном в первом городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно 3t2часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно 4t2 часов в неделю, они производят tприборов.За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 1тысячу руб., чтобы за неделю суммарно производилось 30приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?*

***Решение:*** 30 единиц товара

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | 3x2 | x | 1000 | 3000 |
| 2 завод | 4y2 | y | 1000 | 4000 |

Составим функцию еженедельной оплаты труда:

∑(x,y) = 3000→наим

Заметим, что x+y30, т.е. x где y

∑(y) =3000→наим

∑(y) =3000 =7000-180000y+2700000

Возьмём производную этой функции

= 14000y-180000

Найдём нули производной: 14000y-180000=0

y==12

Функция принимает своё наименьшее значение при y=12 (точка минимума).

Пусть y=12, тогда x=18

Найдём еженедельную оплату труда:+400 = 3000+4000000=1548000

Пусть y=13, тогда x=17

Найдём еженедельную оплату труда:+400 = 30004000000=1543000

***Ответ: 1543000 рублей.***

***Задача 35.***

*В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x2 человеко-часов труда, а для добычи у кг никеля в день требуется у2 человеко-часов труда.*

*Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?*

***Решение:***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | x | 5 | 0,1 | 0,5x |
| никель | y | 5 | 0,1 | 0,5y |

Из таблицы видно, что в первой области совершенно одинаковые условия добывания алюминия и никеля. Это означает, что в первой области алюминия и никеля будут добывать поровну по = 40 кг. Всего 80 кг.

Во второй области: x2 +y2=160

x2 +y2=800

x=20, y=20. Всего 40 кг. ***Ответ: 120кг.***

***Задача 36.***

*В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.*

*Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

***Решение:*** 60 человек по 5 часов в день

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | x | 5 | 2 | 10x |
| никель | 60-x | 5 | 3 | 15(60-x) |

260 человек по 5 часов в день

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | y | 5 | 3 | 15y |
| никель | 260-y | 5 | 2 | 10(260-y) |

Получаем, что всего алюминия производят 10x+15y

никеля:15(60-x)+ 10(260-y)=3500-15x-10y

Так как для сплаванеобходимо , чтобы на2 кг алюминия приходился 1 кг никеля, то: 10x+15y=2(3500-15x-10y)

10x+15y=7000-30x-20y

40x=7000-35y

x = =

Составим функцию массы сплава:

∑(x,y) = 10x+15y+3500-15x-10y→наиб

∑(x,y) = 3500-5x+5y →наиб

∑(y) = 3500-5 +5y →наиб

∑(y) = 3500-5 +5y →наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

=

Значит функция возрастает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при наибольшем значенииy.

Так как x = то 1400-7y0 , y.

Проверим значение у=200, тогда x=0.

Масса сплава: 3500-5+5=4500

***Ответ: 4500 кг.***

***Задача 37.***

*Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид начинки | Себестоимость (за 1 тонну) | Отпускная цена (за 1 тонну) | Производственные возможности |
| ягоды | 70 тыс. руб. | 100 тыс. руб. | 90 (тонн в мес.) |
| творог | 100 тыс. руб. | 135 тыс. руб. | 75 (тонн в мес.) |

*Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц*

***Решение:*** Пусть xтонн выпускает фабрика блинчиков с ягодами, а y тонн – с творогом. Тогда по условию имеем :x

Составим функцию прибыли:

∑(x,y) = 30x+35y→наиб

Пусть производственная возможность равна 1, тогда + = 1

75x + 90y = 6750

x = 90 – 1,2y

∑(y) = 30(90 – 1,2y)+35y→наиб

∑(y) = 2700 - y→наиб

Возьмём производную этой функции

=

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=15. Тогда x = 90-1,2

При этом максимальная прибыль будет рублей.

***Ответ: 2685000 рублей.***

***Задача 38.***

*Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Себестоимость,1 ц.** | **Отпускная цена,1 ц.** |
| стеклянная | 1500 руб. | 2100 руб. |
| жестяная | 1100 руб. | 1750 руб. |

*Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукциии её себестоимостью).*

***Решение:*** Пусть xцентнеров выпускает фабрика в стеклянной таре, а y центнеров – в жестяной. Тогда по условию имеем :x

Составим функцию прибыли:

∑(x,y) = 600x+650y→наиб

Пусть производственная возможность равна 1, тогда + = 1

80x + 90y = 7200

x = 90 – 1,125y

∑(y) = 600(90 – 1,125y)+650y→наиб

∑(y) = 54000 - 25y→наиб

Возьмём производную этой функции

=

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=20. Тогда x = 90-1,12

При этом максимальная прибыль будет рублей.

***Ответ: 53500 рублей.***

***Задача 39***.

*В одной стране в обращении находились 1000000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая нехорошая структура стала ввозить в страну по 100000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это время другая структура стала вывозить из страны 50000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержания фальшивых долларов в стране составит 5%?*

***Решение:***

n-количество месяцев

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Было | Стали ввозить | Стали вывозить | Всего стало |
| Всего | 1000000 | 100000n | 50000n | 1000000+50000n |
| Фальшивые | 200000 | 10000n | 15000n | 200000-5000n |

200000-5000n =0,05(1000000+50000n )

200000-5000n =50000+2500n

-7500n = -150000

n=20

***Ответ: 20 месяцев***

***Задача 40.***

*Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 рублей. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 рублей. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй – 80%. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% больше суммы первого. На сколько процентов возросла цена одной акции?*

***Решение:***

k- первоначальная цена 1 акции

x – штук купил первый брокер

y – штук купил второй

z – конечная цена 1 акции

Составим систему уравнений:

3)

y = = 2,25x

1. k(x+y)=3640

k(x+2.25x)=3640

k = = =

1. z(0,75x+0,8y)=3927

z(0,75х+1,8x)=3927

z2,55x=3927

z= = =

4)Найдём, на сколько процентов возросла цена одной акции

k= - 100%

z = - a%

a= 137,5%

***Ответ: на 37,5%***