Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

М. Л. Лурье

ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ПРОФИЛЬНЫХ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.8
ББК 22.14/Я 72-6
Т 28

Рецензенты:
Н.С. Ананьева (канд. физ.-мат. наук, доцент Пермского государственного гуманитарного педагогического университета),
Л.Р. Банк (канд. филолог. наук, учитель Лицея № 1 г. Перми)

М. Л. Лурье

Т 28 ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ПРОФИЛЬНЫХ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: Учебное пособие / М.Л. Лурье. – Пермь: Издательство «Пушка», 2015. – 62 с.

Приведены сведения по дополнительным главам математики и физики. Предложены творческие задания интегративного характера по моделированию колебательных процессов для учащихся профильных физико-химических и физико-математических классов. Для развития языковой компетенции старшеклассников часть теоретического материала и практические работы даны на иностранном (английском) языке.

УДК 372.8

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация программного комплекса творческих и исследовательских заданий по математическим и естественнонаучным дисциплинам для профильных школ и классов с углублённым изучением предметов».

ISBN 978-5-98799-142-8

Оглавление

Введение

Теория колебаний относится к фундаментальным направлениям науки. Спустя годы, она сохраняет свое ядро, связывая в единое целое достижения математики, механики, теорию электромагнитных волн, оптики и других научных направлений. В современном мире стремительно меняются приоритеты исследований, находятся другие смысловые акценты в понимании явлений действительности. Становятся другими и технологии обучения. Учебники по теории колебаний прошлых лет служат не только свидетельством методологических подходов к ее преподаванию, но и позволяют судить о веяниях культурной жизни и уровня технического прогресса на том или ином этапе общественного развития. Колебания настолько привычны в представлениях нашей жизни, что многие эффекты, связанные с их проявлениями, кажутся очевидными. Но только наука может дать их численные характеристики и пространственные формы, так, чтобы стать основанием для совершенствования различных конструкций.

Оставаясь единой в своей сущности, теория колебаний имеет множество интерпретаций, связанных не только со спецификой изучаемых объектов, но и с точки зрения основ преподавания, свойственных тем или иным языковым и социокультурным традициям. Складывающееся единое образовательное пространство Европы и всего мира предполагает органичное соединение различных языковых и узкопрофессиональных культур, относящихся к той или иной сфере деятельности. Учебно-исследовательские задания «Периодические колебания» ориентированы на формирование общенаучных и языковых компетенций, складывающихся в системе обучения «школа-вуз».

Проблемы, рассмотренные в методическом пособии, ориентированы на достижение навыков языковой подготовки в сфере математического моделирования систем и процессов, организацию самостоятельной учебно-исследовательской работы учащихся и студентов под руководством преподавателя. Интеграция предметных знаний сочетается с достижением преемственности на довузовском и вузовском этапах образования.

В инженерных вузах России на современном этапе развивается дуальное образование. Оно основано на новом понимании не только образовательного пространства, но и рынка интеллектуального труда, в котором способность применять свои знания к реальным социокультурным условиям, становится ведущей общеобразовательной и профессиональной компетенцией. Требуется понимать, как применяется математика, но не на уровне рецептурных действий, а в логике математического мышления, требующего убедительности и доказательности всех подходов к математизации естественнонаучных и общетехнических знаний.

Математика как язык науки и иностранные языки требуют достижения единства в обнаружении смыслов построения научного знания, представленного в различных образовательных традициях, языковых формах, социально-экономических формах их применения. Поэтому выполнение предложенных заданий требует творческого подхода, обращенного не только к достижениям науки, но и научной культуры.

Учебно-исследовательские задания «Периодические колебания» требуют нового, более высокого, уровня, как в понимании культуры математического мышления, так и лингвистических особенностей построения изучаемого материала.

В пособии знакомство с теорией колебаний сочетается с достижением связи ее основных понятий, представленных в различных языковых культурах. Многие задания имеют интегративный характер, объединяя в целое, казалось бы, разнородные составляющие учебных знаний, их единство обнаруживается в культуре – универсальном механизме обнаружения новых смыслов и проектирования новых идей развития науки. Данное пособие представляет учебный материал, ориентированный на выполнение исследовательских заданий. Они связаны с развитием универсальных способностей соединять сведения из различных наук в целостную систему приближенного описания предмета или явления – математическую модель. Детские качели и колебательный контур приемника, подвеска автомобиля и волны в оптически активных средах подчиняются законам, единство понимания которых обнаруживается математикой.

Выполнение заданий может осуществляться при достижении разного уровня качества получаемого результата, в зависимости от тех моделей, которые используются для приближенного описания процессов или же явлений.

Проблемы теории колебаний присутствуют в курсах математики, физики, теоретических основах электротехники, многих других общенаучных и общетехнических дисциплинах. Они охватывают широчайший спектр задач, возникающих в практической деятельности, и определяют пространство творческих инициатив, необходимых для открытия новых технологий и достижения глубинного понимания действительности.

Данное пособие ориентировано на содержание довузовского образования по математике и физике уровня A Level.

1. Основы теории колебаний в российской и зарубежной литературе

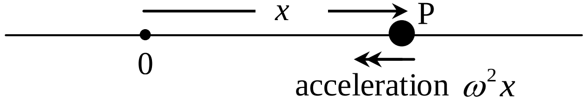
В системе довузовского образования учебная литература разнообразна. Мы укажем публикации некоторых российских и зарубежных авторов. Более того, в ряде публикаций представлены наши соотечественники, которые стали классиками в данной науке за рубежом.

Рассмотрим на английском языке интерпретацию данной проблемы

Simple harmonic motion

Any motion, which satisfies a differential equation of the form, $\ddot{x} = -\omega^2 x$, *where* ω *is constant, is described as simple harmonic motion or S.H.M.*

For a particle moving in a straight line, the variable x is the displacement of the particle from a fixed point on the line. However, x may also be a displacement measured along a curved path. In the case of circular motion or the rotation of a rigid body x could represent an angle.



The diagram shows a particle P executing simple harmonic motion along a straight line. If x is the displacement of P from a fixed point 0 and $\ddot{x} = -\omega^2 x$, *then the magnitude of the acceleration* *of P is a constant multiple of the distance OP. Since when* $x>0, \ddot{x}<0$ *and when* $x<0, \ddot{x}>0$, *the acceleration is always directed towards 0. This leads to an alternative definition of simple harmonic motion.*

When a particle moves in a straight line with acceleration always directed towards a fixed point of the line and proportional to its distance from that point, the particle is said to be executing simple harmonic motion.

The differential equation $\ddot{x}=-\omega^2 x$, *i.e.* $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$. *In this case the method of solution can be simplified by expressing the acceleration of the particle in the form v dv/dx, where v is the velocity at time t, to give:*

$$v\frac{dv}{dt}=-\omega^2 x;$$

$$\int 2v dv=-\int 2\omega^2 x dx;$$

$$v^2=-\omega^2 x^2+c.$$

If v = 0 when x = a, we find that

$$v^2=\omega^2\left(a^2-x^2\right). \qquad (1)$$

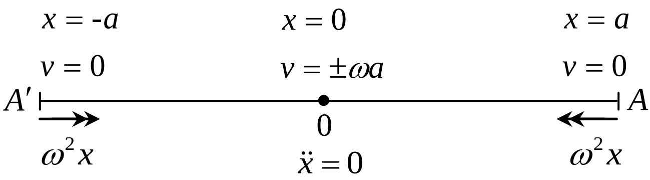
The general solution will be:

$$x=a\sin\left(\omega t+\varepsilon\right) \qquad (2)$$

or the equivalent form:

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t. \qquad (3)$$

From equations (1) and (2) we deduce that the particle is oscillating between points A and A', which lie on opposite sides of 0 at a distance a from 0. The point 0 is called the centre or central point of the oscillation and a is the amplitude.



From equation (1) we see that the particle is momentarily at rest when it reaches A or A', and achieves its maximum speed ωa *when passing through 0.*

Since $$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
and $$v = -A\sin\omega t + B\cos\omega t$$
when ωt *is increased to* $\omega t + 2\pi$ *the same values of x and v are obtained. This means that at times t and* $t + 2\pi/\omega$ *the particle passes through the same point with the same velocity. Hence* $2\pi/\omega$ *is the time taken to perform a complete oscillation and is called the period of the motion. In particular,* $2\pi/\omega$ *is the time taken by the particle to move from A to A' and back again to A.*

The frequency, i.e. the number of complete oscillations per unit time, is $2\pi/\omega$*. Summarizing the properties of S.H.M. we have:*

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$*, where a is the amplitude,*

$x = a\sin\left(\omega t + \varepsilon\right)$*, or*

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$T = 2\pi/\omega$*, where* T *is the period of oscillations.*

When solving problems involving S.H.M. standard formulae may be quoted without proof. It is usually best to begin be determining a and ω*.*

Example 1 *A particle is performing simple harmonic oscillations between points A and A' which are 6 m apart. When the particle is*

at a distance $\sqrt{5}$ *m from the midpoint 0 of A A' its speed is 10* ms^{-1}. *Find (a) the period of the motion, (b) the maximum speed of the particle, (c) its maximum acceleration.*
Let the equation of motion of the particle be
$\ddot{x} = -\omega^2 x$
then $v^2 = \omega^2 \left(a^2 - x^2\right)$

where x m is the displacement of the particle from O, v ms^{-1} *is its speed and a m is the amplitude of the motion.*
But AA' = 6m = 2a m which gives a = 3
$v^2 = \omega^2 \left(a^2 - x^2\right)$

Since v = 10 when x= $\sqrt{5}$, $100 = \omega^2 \left(9-5\right),\ \omega = 5$

(a) The period of the motion $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ *seconds* $= \dfrac{2\pi}{5}$ *seconds.*

(b) The speed of the particle is greatest when x = 0
the maximum speed $= \omega a \ \mathrm{ms}^{-1} = 15\mathrm{ms}^{-1}$.
(c) The acceleration of the particle is greatest when the magnitude of $\omega^2 x$ *is greatest,*
the maximum acceleration $= \omega^2 a \ \mathrm{ms}^{-2} = 75\mathrm{ms}^{-2}$

In S.H.M. problems involving time we need to find suitable expressions for x and v in terms of t. The forms of these expressions depend on the starting point chosen for the motion. One way of approaching such problems is to write:
$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$v = -A\sin\omega t + B\cos\omega t$
then to use any given conditions to determine A and B. We first apply this method to two important special cases.
Case I: x = a when t = 0.
Substituting in (3): a = A

Since v = 0 when x = a, from (4): B = 0

$\boxed{x = a \text{ when } t = 0 \Rightarrow x = a\cos\omega t}$

Case II: x = 0, v > 0 when t = 0.

Substituting in (3): 0 = A

$$x = B\sin\omega t\,.$$

Since the amplitude of the motion is a and v > 0 when t = 0, we must have B = a.

$\boxed{x=0, v>0 \text{ when } t=0 \Rightarrow x = a\sin\omega t}$

Example 2 *A particle moving in a straight line performs simple harmonic oscillations about a point 0 with amplitude 2 m and maximum speed 1 ms^{-1}. If P and Q are the two points on the line which lie at a distance $\sqrt{2}$ m from 0, find the time taken by the particle to move directly from P to Q.*

Let the equation of motion be $\ddot{x} = -\omega^2 x$, *then, assuming that x = a when t = 0,* $x = a\cos\omega t$.

Since the amplitude of the motion is 2 m, a = 2.

The maximum speed of the particle $= \omega a \text{ ms}^{-1} = 1 \text{ ms}^{-1}$

$$\omega = \frac{1}{2}.$$

Thus $x = 2\cos\frac{1}{2}t$.

Let P and Q be the points at which $x = \sqrt{2}$ *and* $x = -\sqrt{2}$ *respectively.*

For $x = \sqrt{2}$ *:* $\sqrt{2} = 2\cos\frac{1}{2}t$

i.e. $\cos\frac{1}{2}t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

the particle first passes through P when $\frac{1}{2}t = \frac{\pi}{4}$ *i.e. when* $t = \frac{\pi}{2}$.

For $x = -\sqrt{2}$ *:* $-\sqrt{2} = 2\cos\frac{1}{2}t$

i.e. $\cos\frac{1}{2}t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

the particle first passes through Q when $\frac{1}{2}t = \frac{3\pi}{4}$ *i.e. when* $t = \frac{3\pi}{2}$.

Hence the particle moves directly from P to Q in a time of π *seconds.*

Example 3 *A particle is performing simple harmonic motion about a point 0 with amplitude 5 m and period* $\frac{\pi}{2}$ *seconds. If P is the point at which the speed of the particle is 10* ms^{-1}*, find the time taken by the particle to move directly from 0 to P.*

Let the equation of motion of the particle be $\ddot{x} = -\omega^2 x$*, and let* $x = a\sin\omega t$*, so that the particle is at 0 when t = 0.*

Since the amplitude of the motion is 5 m, a = 5.

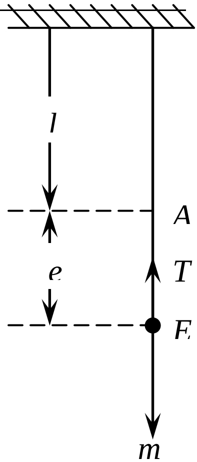
The period of oscillation $= \frac{2\pi}{\omega}\text{s} = \frac{\pi}{2}\text{s}$, $\omega = 4$

Thus $x = 5\sin 4t$ *and* $v = 20\cos 4t$

Substituting v = 10: $10 = 20\cos 4t$

$$\cos 4t = \frac{1}{2}$$

the particle first passes through P when $4t = \frac{\pi}{3}$*. Hence the particle moves directly from O to P in a time of* $\frac{\pi}{12}$ *seconds.*



Example 4. *A particle moves on a straight line through a fixed point O so that at time t seconds its displacement from O is x metres and its equation of motion is* $\ddot{x} = -9x$. *Given that x = 5 and* $\dot{x} = 6$ *when* $t = \frac{\pi}{6}$, *find the position and speed of the particle when* $t = \frac{2\pi}{3}$.

The general solution of the equation of motion is

$$x = A\cos 3t + B\sin 3t$$

$$\dot{x} = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t$$

Since x = 5 and $\dot{x} = 6$ *when* $t = \frac{\pi}{6}$,

$$5 = A\cos\frac{1}{2}\pi + B\sin\frac{1}{2}\pi$$

i.e. $5 = B$

and $-6 = -3A\sin\frac{\pi}{2} + 3B\cos\frac{\pi}{2}$

i.e. $-6 = -3A$

$A = 2$ *and* $B = 5$

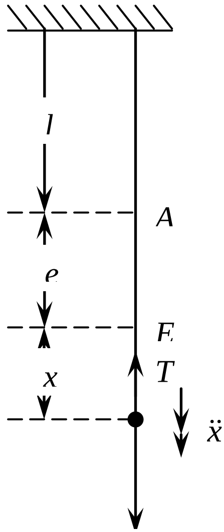
Thus $x = 2\cos 3t + 5\sin 3t$

$$\dot{x} = -6s\sin 3t + 15\cos 3t$$

when $t = \frac{2\pi}{3}$ $\quad x = 2\cos 2\pi + 5\sin 2\pi = 2$

and $\dot{x} = -6\sin 2\pi + 15\cos 2\pi = 15$

i.e. the particle is 2 m from 0 moving at 15 ms^{-1}.



Exercise

1. A particle moves in a straight line with simple harmonic motion of amplitude 2.5 m. If the period of oscillation is π *seconds, find the* *maximum speed of the particle and its maximum acceleration.*

2. A particle moves in a straight line with simple harmonic motion about the point 0 as centre. The maximum speed of the particle is 6 $\mathrm{ms^{-1}}$ *and its maximum acceleration is*

3. 18 $\mathrm{ms^{-2}}$*. Find (a) the amplitude of the motion, (b) the period of the motion, (c) the speed of the particle when it is 1 m from 0.*

4. A particle of mass 3 kg moves in a straight line with simple harmonic motion between two points A and A' which are 15 m apart. Given that when the particle is at a distance of 3 m from A its speed is 2 $\mathrm{ms^{-1}}$*, find the period of the motion. Find also the greatest force exerted on the particle during the motion.*

5. A mass of 10 kg moves with simple harmonic motion. When it is 2 m from the centre of the oscillation, the velocity and acceleration of the body are 12 $\mathrm{ms^{-1}}$ *and 162* $\mathrm{ms^{-2}}$ *respectively. Calculate (i) the number of oscillations per minute; (ii) the amplitude of the motion; (iii) the force being applied to the body when it is at the extremities of its motion.*

6. A particle P moves in a straight line so that its acceleration is always directed towards a point 0 in its path and is of magnitude proportional to the distance OP. When P is at the point A, where OA = 1 m, its speed is $3\sqrt{3}$ *m/s and when P is at the point B, where OB =* $\sqrt{3}$ *m, its speed is 3 m/s. Calculate the maximum speed attained by P and the maximum value of OP. Show that P takes* $\frac{\pi}{18}$ *seconds to move directly from A to B. Find, in m/s correct to 2 significant figures, the speed of P one second after it passes 0.*

7. A particle, A, is performing simple harmonic oscillations about a point 0 with amplitude 2 m and period 12π *s. Find the least time from the instant when A passes through 0 until the instant when (i) its displacement is 1 m, (ii) its velocity is half that at 0, (iii) its kinetic* *energy is half that at 0.*

8. A particle P is describing simple harmonic motion in the horizontal line ADCB, where AD = DC = 1/2CB. The speed of P as it passes through C is 5 m/s and P is instantaneously at rest at A and B. Given that P performs 3 complete oscillations per second, calculate (i) the distance AB, (ii) the speed of P as it passes through D, (iii) the distance of P from C at an instant when the acceleration of P is 18π *m/s*^{2}*, (iv) the time taken by P to go directly from D to A.*

9. A particle P moves in a straight line with simple harmonic motion of period 2 seconds and maximum speed 4 m/s. Find the speed of P when it is at the point A which is $2/\pi$ *metres from 0, the centre of the path. Find also the time taken by P to move directly from 0 to A. When P is passing through 0 it strikes and adheres to a stationary particle which is free to move. If each particle is of mass 2 kg, find the kinetic energy lost in the collision.*

10. A particle moves in a straight line so that at time t its displacement from a fixed point on the line is x and its equation of motion is $\ddot{x} = -4x$*. Given that x = 3 and* $\dot{x} = -6$ *when* $t = \pi/4$*, find (a) x in terms of t, (b) the values of x and x when* $t = 3\pi/4$*, (c) the least positive value of t for which x=0.*

11. A particle moves in a straight line so that at time t its displacement from a fixed point on the line is x and its equation of motion is $\ddot{x} = -16x$*. Given that x = 3 and* $\dot{x} = 4\sqrt{3}$ *when t = 0, find (a) x in terms of t, (b) the least positive value of t for which* $\dot{x} = 0$*, (c) the amplitude of the oscillation.*

12. A particle P moves round a circle, diameter AB, with constant angular speed ω*. A second particle Q moves along AB so that PQ is always perpendicular to AB, i.e. Q is the projection of P on AB. Show that the motion of Q is simple harmonic.*

Forces producing simple harmonic motion

To show that a given set of forces acting on a particle produce simple harmonic motion we must prove that the equation of motion of the particle can be expressed in the form $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Since the tension in an elastic string is proportional to the extension in the string, it may be possible for a particle attached to an elastic string or a spring to perform simple harmonic motion.

Let us suppose that a light elastic string of natural length l and modulus of elasticity λ *has one end fastened to a fixed point 0. A particle of mass m is attached to the other end. Let e be the extension in the string and* T_0 *the tension when the particle hangs in equilibrium at the point E.*

By Hooke's law, $T_0 = \frac{\lambda e}{l}$

Since the particle is in equilibrium,

$$T_0 - mg = 0$$

$$\frac{\lambda e}{l} = mg$$

Consider now the forces on the particle when its displacement from E is x vertically downwards.

By Hooke's law, $T = \frac{\lambda(x+e)}{l}$

where T is the tension in the string. Applying Newton's second law vertically downwards:

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$\frac{\lambda e}{l} - \frac{\lambda(x+e)}{l} = m\ddot{x}$$

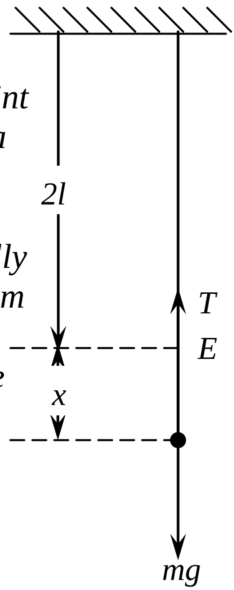
$$-\frac{\lambda x}{l} = m\ddot{x}.$$

Hence the equation of motion of the particle is $\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{ml}$. *Since this equation is of the form* $\ddot{x} = -\omega^2 x$, *where* $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{lm}}$, *the particle can perform simple harmonic motion with centre E and period* $2\pi\sqrt{\frac{lm}{\lambda}}$.

The amplitude a of the motion is the maximum distance below E reached by the particle.

Provided that a < e the string will remain taut throughout the motion and complete simple harmonic oscillations will be possible. However, if a > e the particle will perform simple harmonic motion when it is below A, but move freely under gravity when the string becomes slack.

[Note that in the case of a particle suspended from a spring of natural length l, complete S.H.M. involving both extension and compression of the spring is theoretically possible when a > e.]



Example 1 *A light elastic string of natural length l and modulus mg has one end fastened to a fixed point 0. The other end of the string is attached to a particle of mass m which hangs in equilibrium at a point E. Find the distance OE. The particle is now pulled down to a point A at a distance 5l/2 vertically below 0. If at time t = 0 the particle is released from rest at A, show that the subsequent motion is simple harmonic and find the speed of the particle as it passes through E. Find also the time at which the particle first passes through the point B which lies at a distance 7l/4 vertically below 0.*

When the particle is at E let the tension in the string be T_0 and the extension e.

By Hooke's law: $T_0 = \frac{mg \times e}{l}$

But since the particle is in equilibrium, $T_0 = mg$

$$\frac{mg \times e}{l} = mg$$

e = l.

Hence OE = l + e = 21.

Let T be the tension in the string when the displacement of the particle from E is x vertically downwards.

By Hooke's law: $T = \frac{mg(x+l)}{l}.$

Applying Newton's second law vertically downwards: $mg - T = m\ddot{x}$

$$mg - \frac{mg(x+l)}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

Since this equation is of the form $\ddot{x} = -\omega^2 x$*, where* $\omega = \sqrt{g/l}$*, the particle performs simple harmonic motion with centre E.*

The speed v of the particle is given by the formula $v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right).$

When the particle is at A, $x = \frac{1}{2}l$ *and v = 0*

$$a = \frac{1}{2}l.$$

Hence $v^2 = \frac{g}{l}\left(\frac{1}{4}l^2 - x^2\right)$

when x = 0, $v^2 = \frac{g}{l} \times \frac{1}{4} l^2 = \frac{gl}{4}$.

Hence as the particle passes through E its speed is $\frac{1}{2}\sqrt{gl}$.

Since $x = \frac{1}{2} l$ *and v = 0 when t = 0,*

$x = \frac{1}{2} l \cos \omega t$, *where* $\omega = \sqrt{g / l}$.

When $x = -\frac{1}{4} l$, $-\frac{1}{4} l = \frac{1}{2} l \cos \omega t$

i.e. $\cos \omega t = -\frac{1}{2}$

the particle first passes through B when $\omega t = \frac{2\pi}{3}$

i.e. when $t = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}}$.

We include the following example as a reminder that many problems involving particles attached to elastic strings can be solved using energy considerations rather than the theory of simple harmonic motion.

Example 2 *An elastic string of natural length / and modulus 4mg has one end fastened to a fixed point 0. The other end of the string is attached to a particle of mass m. If the particle is released from rest at 0, find the distance it falls before coming instantaneously to rest at a point A.*

Let x be the extension in the string when the particle reaches A. The kinetic energy of the particle is zero when it is released from 0 and when it comes to rest at A.

Since $OA = l + x$, the loss in gravitational potential energy is mg(l + x). The energy stored in the elastic string as it is stretched to the length $(l + x)$ is $4mgx^2/2l$ i.e. $2mgx^2/l$.

Thus, using the principle of conservation of mechanical energy,

$$\frac{2mgx^2}{l} = mg\left(l + x\right)$$

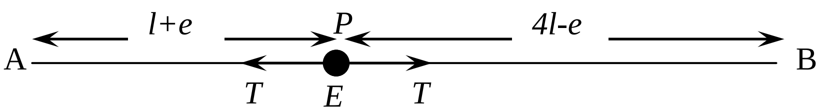
$$2x^2 = l\left(l + x\right)$$

$$2x^2 - lx - l^2 = 0$$

$$\left(x - l\right)\left(2x + l\right) = 0.$$

Since $x > 0$, we must have $x = l$.
Hence the particle falls a distance 2l before coming to rest.
In the next example we consider oscillations in a horizontal plane.

Example 3 *A particle P of mass m lies on a smooth horizontal table and is attached to two fixed points A, B on the table by two elastic strings each of natural length /. The strings AP, PB have module 2mg and mg respectively and AB = 5l. If E is the equilibrium position of the particle, find AE. Given that the particle is released from rest at the point C on AB such that AC = l, show that it performs simple harmonic motion, stating the period and the amplitude of the oscillations.*



Let T be the tension in both strings when the particle is in equilibrium at E.
If AE = l + e, then the extensions in the strings AP and PB are e and 3l – e respectively.

By Hooke's law for AP: $T = \frac{2mge}{l}$

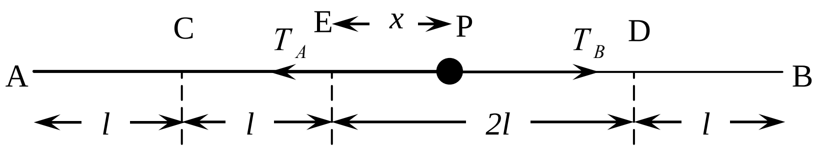
By Hooke's law for BP: $T = \frac{mg(3l-e)}{l}$

$$\frac{2mge}{l} = \frac{mg(3l-e)}{l}$$

$2e = 3l - e$

e=l.

Hence AE = l + e = 2l.



Suppose now that the displacement of the particle P from E is x, as shown in the diagram.

Assuming that both strings are taut, i.e. that P lies between the points C and D, the extension in AP is (l + x) and the extension in PB is (2l — x).

Let T_A *and* T_B *be the tensions in the strings AP and PB respectively, then applying Hooke's law,*

$$T_A = \frac{2mg(l+x)}{l}, \; T_B = \frac{mg(2l+x)}{l}$$

Using Newton's second law in the direction AB,

$$T_B - T_A = m\ddot{x}$$

$$\frac{mg(2l+x)}{l} - \frac{2mg(l+x)}{l} = m\ddot{x}$$

$$-\frac{3mgx}{l} = m\ddot{x}$$

$\ddot{x} = -\frac{3g}{l}x$.

Thus the equation of motion of the particle is of the form $\ddot{x} = -\omega^2 x$*, where* $\omega = \sqrt{3g/l}$*. Hence when both strings are taut the particle performs simple harmonic motion with centre E and period* $2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

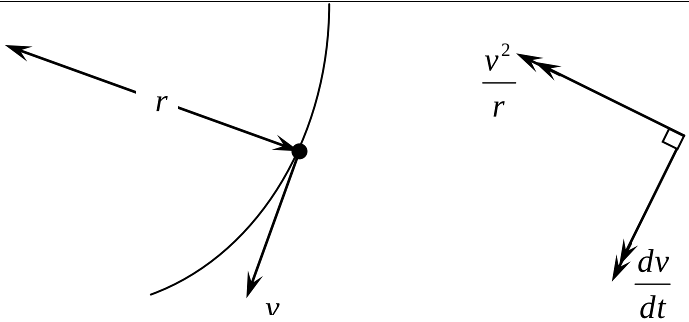
Since the particle starts from rest at C, where CE = l, the amplitude of the simple harmonic motion is l.

The diagram shows that complete oscillations of this amplitude are possible with both strings taut. Thus when the particle is released at C it performs simple harmonic motion of period $2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$ *and amplitude l.*

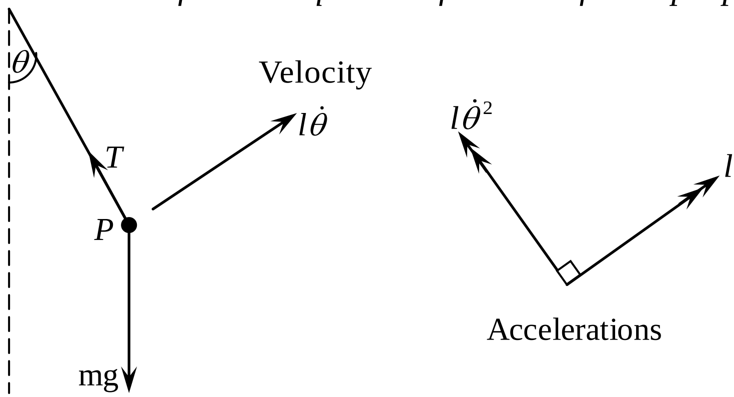
These examples illustrate the fact that in simple harmonic motion the centre of oscillation is an equilibrium position. If a displacement x from this equilibrium position is considered, then the equation of motion is obtained in the standard form $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

However, if a displacement from a point which is not an equilibrium position is used, then the simple harmonic motion equation takes the more general form $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{constant}$

Finally, we show that the motion of a simple pendulum is approximately simple harmonic. A simple pendulum consists of a particle, known as the "bob", suspended from a fixed point by a light inextensible string. When the particle swings in a vertical plane with the string taut, the bob moves along a circular arc.



If a particle moves in a circle with variable speed v, then the acceleration of the particle has components v^2/r towards the centre of the circle and dv/dt in the direction of motion. These results can now be used to find the equation of motion of a simple pendulum.



Let the bob of the pendulum be a particle P of mass m and let the length of the string be l. At the instant when the string makes an angle θ with the downward vertical, P is moving perpendicular to the string with velocity $l\dot{\theta}$. Hence the acceleration of P has components $l\dot{\theta}^2$ and $l\ddot{\theta}$ along and perpendicular to the string. Applying Newton's second law perpendicular to the string,

$$mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta}.$$

Hence $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$.

However, if θ is small, $\sin\theta \approx \theta$.

$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta$.

Thus small oscillations of a simple pendulum are approximately simple harmonic. The period of complete oscillations is $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

A pendulum which beats seconds is called a seconds pendulum. Such a pendulum swings through its equilibrium position once every second and therefore each complete oscillation takes 2 seconds. Hence the length of a seconds pendulum is found by writing: $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$.

Exercise

1. A particle of mass m is attached to one end of a light elastic string of length a and modulus $\frac{3}{2}mg$. The other end of the string is attached to a fixed point 0 and the particle hangs in equilibrium under gravity at the point E. Find the distance OE. If the particle is a further distance x below E show that the resultant force acting on the particle is proportional to x. The particle is pulled down to the point at a distance a below E and released from rest. Show that, in the subsequent motion and while the string is taut, the particle executes Simple Harmonic Motion and that its distance below E at time t after being released is $a\cos\left\{\left(\frac{3g}{2a}\right)^{1/2} t\right\}$.

2. A light elastic string of natural length l has one end fastened to a fixed point 0. The other end of the string is attached to a particle of mass m. When the particle hangs in equilibrium the length of the

string is $\frac{7}{4}l$. The particle is displaced from equilibrium so that it moves vertically with the string taut. Show that the motion is simple harmonic with period $\pi\sqrt{(3l/g)}$.

At time t = 0 the particle is released from rest at a point A at a distance $\frac{3}{2}l$ vertically below 0. Find (i) the depth below 0 of the lowest point L of the motion, (ii) the time taken to move from A to L, (iii) the depth below 0 of the particle at time $t = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{3l}{g}}$.

3. A particle of mass m is attached to one end of a light elastic string of natural length and modulus 2mg. The other end of the string is fixed at a point A. The particle rests on a support B vertically below A, with AB = 5l/4. Find the tension in the string and the reaction exerted on the particle by the support B. The support B is suddenly removed. Show that the particle will execute simple harmonic motion and find (i) the depth below A of the centre of oscillation, (ii) the period of the motion.

4. A light elastic spring AB of natural length l has the end A attached to a fixed point and hangs vertically under gravity with a particle of mass m attached at B. The system is set in motion and performs small vertical oscillations. Show that the motion is simple harmonic. The particle of mass m at B is replaced by a particle of mass αm, and it is found that the period of oscillation is doubled. Find the value of α.

5. One end of an elastic string of modulus mg and natural length a is attached to a fixed point 0. To the other end A are attached two particles P and Q, P having mass 2m and Q having mass m. The particles hang down in equilibrium under gravity. If Q falls off, show that P subsequently performs simple harmonic motion and state the period and amplitude of this motion. If on the other hand P falls off, *find the distance from 0 of the highest point reached by Q.)*

6. An elastic string of natural length 2a and modulus λ has its ends attached to two points A, B on a smooth horizontal table. The distance AB is 4a and C is the midpoint of AB. A particle of mass m is attached to the mid-point of the string. The particle is released from rest at D, the mid-point of CB. Denoting by x the displacement of the particle from C, show that the equation of motion of the particle is $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2\lambda}{ma}x=0$. Find the maximum speed of the particle and show that the time taken for the particle to move from D directly to the mid-point of CD is $\frac{\pi}{3}\left(\frac{ma}{2\lambda}\right)^{1/2}$.

7. A particle P of mass m is attached by two light elastic strings to two fixed points A and Bona smooth horizontal table. Each string is of natural length / and AB = 4l. If the strings AP and PB have moduli of elasticity λ and 3A respectively, find the length of AP when the particle is in equilibrium. If the particle is given a small displacement from the equilibrium position along the line AB, show that while both strings are taut the particle executes simple harmonic motion. Find the period of the oscillations. Given that the string PB just becomes slack in the ensuing motion, find the maximum speed of the particle.

8. Two fixed points A and B on a smooth horizontal table are at a distance 5l apart. A particle of mass m lies between A and B. It is attached to A by means of a light elastic string of modulus mg and natural length / and to B by means of a light elastic string of modulus 2mg and natural length 2l. If 0 is the point at which the particle would rest in equilibrium, find the distance OA. The particle is projected towards 0 from the mid-point of AB with speed u. Show that while both strings remain taut the particle performs *simple harmonic motion. Find the period and the amplitude of this motion. Show that the particle will perform complete simple harmonic oscillations if* $2u^2 \le 3gl$ *.*

9. A particle of mass m moving on a smooth horizontal plane is attached to a point 0 of the plane by an elastic string of natural length l and modulus X. Initially the particle is at the point A which lies at a distance l from 0 and is moving away from 0 at speed u. If the particle first comes to rest at the point B, use energy considerations to find the distance AB. Show that when the particle is moving in the line AB its equation of motion is of the form $\ddot{x} = -\omega^2 x$*, where x is its displacement from A. Find the time taken by the particle to move directly from A to B. Find also the further time which elapses before the particle next comes to rest.*

10.A particle of mass m is attached to two elastic strings each of natural length a. The first string has modulus 3mg and its other end is attached to a fixed point A. The second string has modulus 6mg and its other end is attached to a fixed point B which is at a distance 3a vertically below A. Show that the particle can rest in equilibrium at a point 0 between A and B with both strings taut. Find the distance y of 0 from A. The particle is in motion in the line AB with both strings taut. At time t, the particle is at P where OP = x. Prove that $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9g}{a}x$ *.*

The particle is projected vertically upwards from the point at a distance 2a below A with speed u. Find the maximum value of u for which the upper string does not become slack in the subsequent motion. For this maximum value of u find the time taken for the particle to travel from 0 to its highest point.)

11.Find, to the nearest millimeter, the length of a seconds pendulum, (a) at Greenwich, where $g \approx 9{,}81$*, (b) at the equator,* *where* $g \approx 9{,}78$*, (c) at the North Pole, where* $g \approx 9{,}83$*, (d) on the surface of the moon, where* $g \approx 1{,}62$.

12.A musician wishes to use a simple pendulum as a makeshift metronome. Regarding a complete oscillation as two "beats", find, to the nearest centimetre, the length of pendulum required to produce (a) 50 beats per minute, (b) 80 beats per minute, (c) 100 beats per minute, (d) 160 beats per minute. [Take g as 9.8ms^{-2}*.]*

Задания

1. Выделите основные понятия теории колебаний, расширяющие известные Вам сведения из курсов математики и физики.

2. Выделите в англоязычном тексте ключевые слова, характерные для теории колебаний.

3. Какие различия в структуре данных курсов вы обнаружили?

4. Решите задания, представленные в англоязычном тексте, и представьте решение на английском языке.

5. Дополните список заданий англоязычного текста собственными задачами, отражающими содержание текста. Представьте их формулировку и решение на английском языке.

Общие сведения из теории колебаний

Наши соотечественники А.А. Андронов А.А. Витт и С.Э. Хайкин в свое время создали курс[1] и его авторский перевод на английский язык[2], которые и по сей день считаются классическими в теории колебаний. На их основе создано

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгаз, 1959, (М.: Наука, 1981).

[2] Andronov A.A., Chaikin C.E. Theory of oscillation. New Jersey. Princeton: Princeton university press. 1949. 381p.

множество самых разнообразных учебников.

Для выполнения исследовательских заданий, представленных в главе 2, изучите первую главу этого учебника на русском и английском языках (стр. 35–94).

Задания

1. Дополните русскоязычный (англоязычный) текст некоторыми деталями, фактами, информацией о событиях и явлениях, относящихся к развитию технического прогресса в России (Европы), возникшего под влиянием теории колебаний.

2. Укажите, какие математические и физические идеи используют авторы в построении курса?

3. Какие математические и физические абстракции присутствуют в теории колебаний?

4. ***Составьте глоссарий ключевых терминов и понятий по теории колебаний на русском и английском языках.***

5. ***Составьте аннотации к русскоязычному (англоязычному) тексту на английском (русском) языке.***

Теория колебаний: история и современность

В начале XX века, как и в настоящее время, теория колебаний находится в центре внимания ученых и специалистов. Фрагменты классического учебника R.D. Bangay The oscillation value[1], изданного в 1919 году в крупнейших мировых центрах науки и техники того времени, представляют собой наследие научных культур и проблем развития техники конца XIX – начала XX века.

[1] Bangay R.D. The oscillation value. London: The wireless press, LTD. 1919. 215p.

Задание

Переведите главу I на русский язык и укажите, какие усовершенствования получили указанные в ней конструкции.

Современные представления о теории колебаний отражены в учебном пособии А.А. Яблонского и С. Норейко «Курс теории колебаний»[1]. В этой книге особое внимание уделяется проблеме математического моделирования колебательных систем. В аннотации к курсу отмечается, что в учебное пособие «включена глава, посвященная электромеханическим аналогиям и их применению к исследованию колебаний, в которой рассмотрено построение электрических моделей – аналогов механических систем. Рассмотрены принципы электрического моделирования механических систем»[2]. В оглавлении обозначены те же проблемы, что и в предыдущих курсах, однако математическое моделирование колебательных систем дает возможность активно использовать информационные технологии и аналоговые системы, которые позволяют не только глубже понять теоретические основы колебательных процессов, но и ощутить их связь с практикой.

Задание

Переведите оглавление книги на английский язык и составьте по тексту учебного пособия аннотации к главам 1, 2, 3.

1 Яблонский А.А., Норейко С. Курс теории колебаний. СПб: BHV-СПб. 2007. 336 с.

2 Режим доступа: http://www.books.ru/shop/books/527823

Многие российские ученые и педагоги органично вошли в исследовательские коллективы Европы и стали ведущими специалистами по важнейшим направлениям развития математики.

Задания

1. Структура книги “Frequency methods in oscillation theory”[1] позволяет получить представление о современном курсе по теории колебаний. Переведите ее оглавление на русский язык, найдите другие учебные материалы в российской литературе по данной проблеме и составьте аннотацию этих курсов для англоязычного читателя.

2. Составьте историю развития теории колебаний в России на английском языке; в Европе на русском языке.

3. Какие наиболее значимые события в развитии общества, науки и техники происходили в период становления теории колебаний в Европе и России? Адресуйте данный обзор русскоязычному (англоязычному) читателю.

Некоторые сведения из теории вынужденных колебаний

Многие эффекты, возникающие в колебательных системах, казались необъяснимыми, а иногда, даже мистическими. Например, явление резонанса. В некоторых ситуациях механические системы начинали исключительно вибрировать и разрушаться. Теория колебаний, основанная на изучении дифференциальных уравнений, дает объяснения

[1] G.A. Leonov, I.M. Burkin, A.I. Shepeljavyi, Frequency Methods in Oscillation Theory, Kluwer Academic Publishers, 1996.

многим явлениям. Вот почему самостоятельное значение получила проблема изучения вынужденных колебаний.

Для выполнения комплексной исследовательской работы, представленной в следующей главе, изучите в тексте учебного пособия Я.Г. Пановко «Введение в теорию колебаний»[1] параграфы 3 и 5.

2. Математические модели изучения вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы под действием периодической возмущающей силы

2.1. Универсальность теории дифференциальных уравнений к описанию различных колебательных систем

Рассмотрим развитие идей математического моделирования на примере постановки задачи о колебаниях одномассовой системы под воздействием периодической внешней силы. Дифференциальные уравнения – это удивительный мир самых разнообразных проблем, волнующих человечество, продолжающий и сейчас удивлять нас своими открытиями. Универсальное значение этой теории определяется широтой, а порой и неожиданностью интерпретации ее понятий в реальной жизни. Это наука, поражающая начинающего исследователя простотой постановки и, вместе с тем, нерешенностью некоторых своих задач. Вы, конечно, знаете, что квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0.$$

легко решается при любых значениях коэффициентов. Однако же решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$a(t)y''(t)+b(t)y'(t)+c(t)y(t)=0 \quad (1)$$

[1] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 272 с.

далеко не всегда удается найти достаточно просто. Но мы знаем об этом уравнении очень многое: и то, что его общее решение при произвольных коэффициентах $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ получить в квадратурах нельзя, и отдельные свойства этих ненайденных решений, определяемые свойствами функций $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$, а также начальными или же граничными условиями. Известны очень эффективные методы его приближенного решения, но и в настоящее время проблемы, связанные с ним, далеко не исчерпали себя.

Уравнение (1) занимает особое место в теории обыкновенных дифференциальных уравнений еще и потому, что в нем отражены свойства объектов самой разнообразной природы: механических, электрических, оптических и многих других. Более века тому назад Максвелл установил аналогию между механическими и электрическими колебательными системами. Оказывается, дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

вынужденных колебаний механической одномассовой системы (рис. 1) описывает одновременно и электрические колебания. На рис. 2 и 3 приведены две электрические цепи-аналога. Соответствие между механическими и электрическими параметрами указано в таблице.

Механическая система (рис. 1)	Электрическая цепь (рис. 2)	Электрическая цепь (рис. 3)
Сила F Масса m Коэффициент вязкости трения b Податливость i/c Перемещение x Скорость $\dot{x}$	Напряжение U Индуктивность L Сопротивление R Емкость C Заряд Ток I	Ток I Емкость C Проводимость Индуктивность L Потокосцепление Напряжение U

Мы рассмотрим это дифференциальное уравнение, когда $m = const$, $b = 0$, $c = const$, $F(t)$ – периодическая негармоническая функция. Даже при таких упрощениях оно таит в себе множество проблем, требующих серьезного математического анализа.

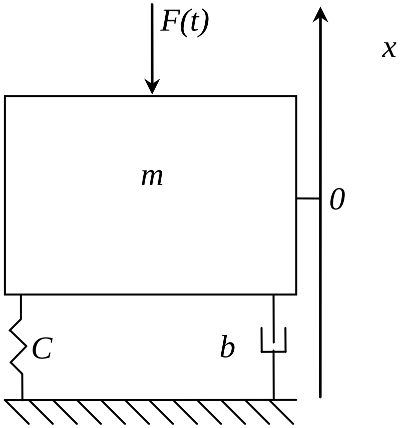


Рис. 1

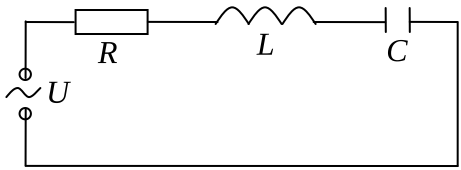


Рис. 2

Рис. 3

Уравнение

$$m\ddot{x} + cx = F(t) \tag{2}$$

чаще всего описывает лишь малые колебания, при которых оказывается допустима линеаризация восстанавливающей силы. Однако, к примеру, большие колебания математического маятника имеют уже нелинейную восстанавливающую силу $R(x) = \sin x$ и приводят нас к принципиально более сложному уравнению

$$m\ddot{x} + c\sin x = F(t). \tag{3}$$

Исследование уравнения (3), ввиду его нелинейности, представляется задачей чрезвычайно трудной. Упрощая его до линейного, мы вместе с тем существенно сужаем диапазон рассматриваемых амплитуд, для которых оно будет адекватно отражать исследуемую колебательную систему. Иногда уравнение (3) упрощают до вида

$$m\ddot{x} + cx - c\frac{x^3}{6} = F(t), \tag{4}$$

выделяя линейную и нелинейную составляющие упругой связи. Однако и дифференциальное уравнение (4) немногим проще уравнения (3). В общем случае уравнение типа

$$m\ddot{x} + cR(x) = F(t), \tag{5}$$

описывает колебания многих технических систем. Его отличительная особенность – нелинейность – является основной трудностью решения. Понимание свойств решений уравнений (1) и (5) во многом определяет успех изучения актуальных проблем научно-технического прогресса. Сосредоточив свое внимание на дифференцированном уравнении (2), мы должны представлять его как начало пути, ведущего к решению более сложных вопросов.

При изучении колебательных систем на практике чаще всего ставится задача отыскания периодических режимов с периодом возмущающего воздействия. Эту задачу поставим перед собой и мы. В реальных колебательных системах возбуждение редко бывает гармоническим, поэтому будем считать $F(t)$ периодической, но негармонической функцией, допуская у нее возможность разрывов 1-го рода. Для решения уравнения (2) разработаны различные методы. Рассмотрим некоторые из них, оценивая преимущества и недостатки каждого, а также анализируя возможности их реализации на ЭВМ.

2.2. Применение метода вариации произвольных постоянных для поиска периодических решений уравнения движения

На практике, столкнувшись с дифференциальным уравнением, мы обычно спешим воспользоваться методом Рунге-Кутта, который обладает хорошей точностью, легко алгоритмизируется, да и имеется в программном обеспечении почти каждой ЭВМ. Однако он не позволит сразу решить поставленную задачу, так как неизвестны начальные условия, обеспечивающие периодический режим колебаний с периодом возмущающего воздействия.

Начнем исследование задачи с отыскания общего решения уравнения (3), используя для этого метод вариации произвольных постоянных.

Для нахождения общего решения уравнения (2) достаточно найти его частное решение и сложить с общим решением соответствующего однородного уравнения; т. е.

$$x(t) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + U(t),$$

где $U(t)$ – частное решение уравнения (2), которое будем искать в виде

$$U(t) = v_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + v_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\,, \tag{6}$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – искомые функции от t.

$$\begin{cases} \dot{v}_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \dot{v}_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t = 0 \\ \dot{v}_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \dot{v}_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t = \frac{1}{\sqrt{cm}} \cdot F(t) \end{cases}$$

Функции $\dot{v}_1(t)$ и $\dot{v}_2(t)$ определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t)\cdot x_1 + \dot{v}_2(t)\cdot x_2 = 0 \\ \dot{v}_1(t)\cdot x_1 + \dot{v}_2(t)\cdot x_2 = \dfrac{F(t)}{m} \end{cases}.$$

или

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t)\cdot\cos\sqrt{\dfrac{c}{m}}t + \dot{v}_2(t)\cdot\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t = 0 \\ \dot{v}_1(t)\cdot\cos\sqrt{\dfrac{c}{m}}t + \dot{v}_2(t)\cdot\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t = \dfrac{1}{\sqrt{cm}}\cdot F(t) \end{cases}.$$

Решая ее, определим

$$\dot{v}_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot F(t)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t,$$

$$\dot{v}_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot F(t)\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

или

$$v_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot\int_0^t F(\zeta)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta,$$

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot\int_0^t F(\zeta)\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta.$$

Подставляя $v_1(t)$ и $v_2(t)$ в (6), получим частное решение

$$U(t) = -\frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\int_0^t F(\zeta)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta + \frac{1}{\sqrt{cm}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\int_0^t F(\zeta)\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta$$

или, внося множители, не зависящие от переменной интегрирования, под знак интеграла:

$$U(t)=\frac{1}{\sqrt{cm}}\int_0^t F(\zeta)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta\ .$$

Общее решение уравнения (2) будет следующим:

$$x(t)=C_1\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+C_2\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{\sqrt{cm}}\int_0^t F(\zeta)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta\ . \quad (7)$$

Переменная t входит в правую часть этой формулы двояко. Во-первых, t является верхним пределом интеграла и, во-вторых, под знаком интеграла она выступает как параметр, который считается постоянным при интегрировании.

Рассматривая действие периодического возбуждения $F(t)=(t+T)$, будем искать решение $x=x(t)$ с таким же периодом. Это означает, что $x_0=x(0)=x(T)$,

$$\dot{x}_0=\dot{x}(0)=\dot{x}(T), \quad (8)$$

Движение в промежутке от $[0;T]$, с учетом (7) и (8) описывается уравнением

$$x(t)=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\dot{x}_0\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{\sqrt{cm}}\int_0^t F(\zeta)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta\ . \quad (9)$$

Для дальнейших рассуждений необходимо выражение производной по времени $\dot{x}(t)$. При дифференцировании по параметру t интеграла, входящего в (9), воспользуемся следующей формулой:

$$\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(\xi,t)\,d\xi\right)'_t=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(\xi,t)\,d\xi+\beta'(t)\cdot f(\beta(t),t)-\alpha'(t)\,f(\alpha(t),t)\,.$$

Таким образом

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{1}{m}\int_0^t F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta\,. \quad (10)$$

Для момента времени $t = T$ выражения (9) и (10) дают

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T + \frac{1}{\sqrt{mc}}\int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}(T-\zeta)\,d\zeta; \\ \dot{x}(t) = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T + \frac{1}{m}\int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}(T-\zeta)\,d\zeta. \end{gathered} \quad (11)$$

Но

$$\int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}(T-\zeta)\,d\zeta = \int_0^T F(\zeta) \cdot \left(\sin\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta - \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta \right) d\zeta =$$

$$= \sin\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta - \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta$$

$$\int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}(T-\zeta)\,d\zeta = \int_0^T F(\zeta) \cdot \left(\cos\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta + \sin\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta \right) d\zeta =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta + \sin\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot T \int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta$$

Теперь введем сокращенные обозначения для постоянных величин:

$$\int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = S_0, \quad \int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = C_0. \quad (12)$$

И перепишем выражение (11) в виде

$$x(t) = x_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T + \frac{1}{\sqrt{cm}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}T \cdot C_0 - \frac{1}{\sqrt{cm}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}T \cdot S_0,$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T + \frac{1}{m} \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T \cdot C_0 + \frac{1}{m} \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T \cdot S_0 .$$

В левых частях этих соотношений заменено $x(T)$ на x_0 и $\dot{x}(T)$ на $\dot{x}_0$, как это следует из условия периодичности решений.

Эти соотношения представляют собой простую систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных x_0 и $\dot{x}_0$, Решив ее, найдем:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2\sqrt{mc}} \cdot \left(C_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T + S_0 \right); \\ \dot{x}_0 &= \frac{1}{2m} \cdot \left(S_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T - C_0 \right). \end{aligned} \qquad (13)$$

Теперь с помощью (9) можно окончательно получить

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{mc}} \cdot [\left(C_0 \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T + S_0 \right) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}T + \left(S_0 \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T - C_0 \right) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}T + T \cdot S_0 +$$

$$+2\int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}(T-\zeta)\, d\zeta]$$

Найденное решение описывает движение в промежутке $[0;T]$, для него нельзя формально подставить $t > T$. Однако, имея график $x(t)$ для $0 \le t < T$, можно вследствие периодичности решения без всяких изменений сместить построенную кривую на соседние промежутки: $[T;2T],[2T;3T],\ldots$

Получив это решение, мы только сейчас подходим к необходимости применения ЭВМ. Для его табулирования на промежутке $[0;T]$ вовсе не следует найденные значения

S_0, C_0, x_0, $\dot{x}_0$ подставлять в формулу (14), чрезмерно усложняя ее. Разумно ввести отдельные идентификаторы для вычисления этих величин, подставив их потом в рабочую формулу. Данное решение является точным, поэтому шаг, с которым осуществляется табулирование, не влияет на точность результата.

2.3. Приближенное решение уравнения движения методом Фурье

Рассмотрим еще один метод решения поставленной задачи – метод Фурье. Этот метод основан на разложении функции $F(t) = F(t+T)$ в ряд Фурье, где T – период:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right),$$

коэффициенты которого определяются формулами:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt, \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt, \quad n = 1,2,3,...$$

Записав уравнение (2) в виде:

$$m\ddot{x} + cx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right), \tag{15}$$

учтем, что рассматриваемая система линейна, это значит, что можно оценивать по отдельности действие каждого из слагаемых вынуждающей силы и найти установившиеся вынужденные колебания, а затем сложить полученные результаты. Пусть

$$U(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + B_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

частное решение уравнения (15). Найдем коэффициенты $A_0,\ A_n, B_0,\ B_n$. Для этого определим $\ddot{U}(t)$:

$$\dot{U}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{2\pi n}{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}+B_n\frac{2\pi n}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right),$$

$$\ddot{U}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{4\pi^2n^2}{T^2}\cos\frac{2\pi nt}{T}-B_n\frac{4\pi^2n^2}{T^2}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Найденные выражения $\dot{U}(t)$ и $\ddot{U}(t)$ подставим в уравнение (15):

$$m\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{4\pi^2n^2}{T^2}\cos\frac{2\pi nt}{T}-B_n\frac{4\pi^2n^2}{T^2}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)+$$

$$+c\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+B_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Из полученного равенства имеем:

$$c\cdot A_0=\frac{a_0}{2}$$

$$-m\cdot A_n\cdot n^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}+c\cdot A_n=a_n$$

$$-m\cdot B_n\cdot n^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}+c\cdot B_n=b_n.$$

Отсюда

$$A_0=\frac{1}{c}\frac{a_0}{2},$$

$$A_n = \frac{1}{c}\frac{a_n}{1 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}\frac{m}{c}},$$

$$B_n = \frac{1}{c}\frac{b_n}{1 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}\frac{m}{c}}.$$

Следовательно

$$x(t) = \frac{1}{c}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}}{1 - n^2\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{m}{c}}\right).$$

Таким образом, наличие негармонического возбуждения $F(t)$ привело к появлению в решении $x(t)$ бесконечного числа гармоник. И даже те из них, которые при разложении функции $F(t)$ в ряд Фурье имели сравнительно небольшую амплитуду, могут вызвать в колебании $x(t)$ амплитуду неограниченно большой величины, если только масса m и жесткость c при определенном n окажутся соответствующими равенству

$$\frac{2\pi n}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Наличие бесконечного числа резонансных режимов роднит данную систему с многомассовой колебательной системой и системой с распределенными параметрами. Метод Фурье позволяет эти режимы достаточно просто определить, что сложнее сделать способом, изложенным выше, или путем численного решения уравнения. К числу его достоинств, если речь заходит об интересующих нас периодических режимах, следует отнести также возможность получения этих режимов без предварительного вычисления соответствующих начальных условий. Эти начальные условия вычисляются автоматически по мере суммирования решения. В качестве недостатка метода Фурье можно отметить его слабую сходимость. Однако в отдельных случаях эта трудность может быть преодолена за счет возможностей ЭВМ. Тем не менее, располагая современными ЭВМ и стремясь взять число слагаемых ряда Фурье исключительно большим в определенных (и вполне реальных на практике) ситуациях, мы можем лишь существенно снизить точность результата.

2.4. Операционный метод нахождения периодических колебаний

Еще один метод, позволяющий эффективно решить задачу о нахождении периодических колебаний с периодом возмущающего воздействия, – операционный. Он получил свое обоснованное развитие лишь в нашем столетии. Если функция $F(t)$ в промежутке одного периода состоит из большого числа звеньев, которые задаются разными аналитическими выражениями, то применение этого метода позволяет без излишних усложнений осуществить решение задачи и в компактном виде записать окончательный результат. С помощью преобразования Лапласа перейдем от данного уравнения (2) к операторному уравнению:

$$m\left(p^2\overline{x} - x_0 p - \dot{x}_0\right) + c\overline{x} = \frac{\psi(p)}{1 - e^{-T \cdot p}},$$

где $\bar{x}(p) \doteqdot x(t)$, $x_0 = x(0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_0(0)$,

$$\psi(p) \doteq Q(t) = \begin{cases} F(t), & 0 < t < T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{1-e^{-T\cdot p}}\left[\frac{\psi(p)}{mp^2+c} + \frac{mx_0 p + m\dot{x}_0}{mp^2+c}\left(1-e^{-T\cdot p}\right)\right]$$

или

$$\bar{x}(p) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-T\cdot p}}, \qquad (16)$$

где

$$\Phi(p) = \frac{\psi(p)}{mp^2+c} + \frac{mx_0 p + m\dot{x}_0}{mp^2+c}\left(1-e^{-T\cdot p}\right) \doteq \varphi(t).$$

Оригинал $x(t)$, соответствующий изображению (16), будет периодической функцией с периодом T только тогда, когда

$$\varphi(t) \equiv t \text{ при } t > T, \qquad (17)$$

причем $x(t) = \varphi(t)$ в интервале $0 < t < T$. Значит, для определения периодического решения $x(t)$ в промежутке $0 < t < T$ нужно из (16) найти $\varphi(t)$ дважды: при $t < T$ и при $t > T$, а затем из тождества (17) определить методом неопределенных коэффициентов x_0 и $\dot{x}_0$ (те начальные условия, при которых уравнение (2) имеет периодическое решение).

При $t<T$ имеем:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{mc}}\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta+x_0\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\dot{x}_0\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\,. \quad (18)$$

При $t>T$ имеем:

$$\vartheta\equiv\frac{1}{\sqrt{mc}}\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta+x_0\left[\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-T)\right]+$$
$$+\sqrt{\frac{c}{m}}\dot{x}_0\left[\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t-\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-T)\right] \quad (19)$$

или

$$\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\int_0^t F(\zeta)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta d-\zeta\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta+x_0\sqrt{mc}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}T\right)-$$
$$-x_0\sqrt{mc}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\sin\sqrt{\frac{c}{m}}T+\dot{x}_0 m\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}T\right)+\dot{x}_0 m\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\sin\sqrt{\frac{c}{m}}T\equiv 0$$

Из этого тождества следует, что

$$\begin{cases} x_0\sqrt{mc}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}T\right)+\dot{x}_0 m\sin\sqrt{\frac{c}{m}}T=\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta, \\ x_0\sqrt{mc}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}T-\dot{x}_0 m\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}T\right)=\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta. \end{cases}$$

Отсюда, если $T \neq \dfrac{2\pi n}{\sqrt{\dfrac{c}{m}}}$, получим:

$$x_0 = \frac{1}{2\sqrt{mc}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T}\int_0^t F(\zeta)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\left(\zeta - \frac{T}{2}\right)d\zeta,$$

$$\sqrt{\frac{m}{c}}\dot{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{mc}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T}\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\left(\zeta - \frac{T}{2}\right)d\zeta.$$

Подставляя найденные значения x_0 и $\sqrt{\dfrac{m}{c}}\dot{x}_0$ в выражение (18), получим искомое периодическое решение в промежутке $0 < t < T$:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{mc}}\left[\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T} + \int_0^t F(\zeta)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\left(t-\zeta+\frac{T}{2}\right)d\zeta.\right]$$

Если $T = \dfrac{2\pi n}{\sqrt{\dfrac{c}{m}}}$, то тождество (19) примет вид

$$\int_0^{\frac{2\pi m}{\sqrt{\frac{c}{m}}}} F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\xi)\,d\xi \equiv 0.$$

Следовательно, если $F(t)$ удовлетворяет последнему тождеству, то при любых начальных условиях уравнение (2) будет иметь периодическое решение:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{mc}}\int_0^t F(\zeta)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta+x_0\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\dot{x}_0\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t,$$

причем $0<t<\dfrac{2\pi n}{\sqrt{\frac{c}{m}}}$.

Рассматривая различные методы решения одного и того же уравнения, мы убеждаемся в том, что среди них нет исключительного, универсального, способного разрешить все вопросы, интересующие инженера. Вот почему, приступая к анализу задачи, надо уметь предвидеть результат, который может быть достигнут тем или иным методом. Для этого нужно владеть математической интуицией, обладать математическим кругозором. Сейчас уже недостаточно знать о принципиальной разрешимости задачи, важно представлять, как математическое решение может быть использовано на практике. Математическое мышление инженера должно быть адаптировано к возможностям ЭВМ.

2.5. Отыскание периодических режимов свободных нелинейных колебаний

Рассмотрим дополнительно дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x}+cR(x)=0. \tag{20}$$

Оно определяет свободные колебания одномассовой механической системы с нелинейной характеристикой. Возможность его решения очевидна.

Действительно,

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}.$$

Тогда уравнение (20) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + cR(x) = 0$$

или

$$m \cdot \dot{x} \cdot d\dot{x} = -c \cdot R(x)$$

Предположим, что в начальный момент времени достигается наибольшее отклонение системы от положения равновесия $x_0 = A$, при этом $\dot{x}_0 = 0$. Получим:

$$m\int_0^{\dot{x}} \dot{x} \cdot d\dot{x} = -c\int_A^x R(x)\,dx$$

или

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} = c\int_x^A R(x)\,dx \qquad (21)$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии. Из выражения (21) получим:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2c}{m}\int_x^A R(x)\,dx}$$

Знак «минус» выбран потому, что в рассматриваемом интервале движения (первый полупериод колебания) скорость $\dot{x}(t)$ отрицательна. Дальнейшее интегрирование дает следующее решение: $t = -\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2c}{m}\int_x^A R(x)\,dx}} = \int_x^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2c}{m}\int_x^A R(x)\,dx}}$

Однако польза от такого решения для практики призрачна. Едва ли кого-то из исследователей заинтересует функция времени t от перемещения x, интерес представляет обратная функция. В лучшем случае, аналитическими методами удается еще найти период колебаний одномассовой системы: если характеристика восстанавливающей силы является нечетной функцией, то время перехода системы из крайнего положения $x_{\max} = A$ к положению равновесия составит четверть периода. Следовательно,

$$\frac{T}{4} = \int_x^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2c}{m}\int_x^A R(x)\,dx}}.$$

В отдельных случаях интегралы такого вида сводятся к эллиптическим. Однако, чаще всего, для их вычисления требуются численные методы. Основная трудность расчетов состоит в том, что такие интегралы являются несобственными второго рода. При достаточно жестких характеристиках упругой связи трудно добиться необходимой степени точности приближенных вычислений (ЭВМ, как правило, быстро достигает «переполнения» при вычислении подынтегральной функции). В прикладных расчетах оказываются очень эффективными методы улучшения сходимости несобственных интегралов. Один из них состоит в следующем: функция, стоящая под знаком корня в данном интеграле, при $x = A$, равна нулю. Обычно этот нуль является простым, поэтому функцию

$$f(x) \equiv \frac{2c}{m}\int_x^A R(x)\,dx$$

можно представить в виде

$$f(x) = (x - A)\,g(x),$$

где

$$g(A) \neq 0.$$

Тогда

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^{A_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{A_1}^A \frac{dx}{\sqrt{(x-A)g(x)}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{A_1}^A \frac{dx}{\sqrt{(x-A)g(x)}} + \int_{A_1}^A \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-A)g(A)}} \right) dx$$

где A_1 достаточно близко к A.

В полученном равенстве первый интеграл является определенным и может быть вычислен с применением приближенных методов, второй – несобственный. Его вычисление не вызовет труда. Третьим слагаемым пренебрегаем.

И, теперь, наконец, зная период колебаний T, можно приступить к численному решению уравнения (20) при начальных условиях $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$. Это и позволит получить необходимую функцию $x(t)$.

Сравнительный анализ способов реализации математической модели на конкретном примере периодического негармонического воздействия.

2.6. Указания к выполнению заданий

Пусть

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F(t)$$

и $F(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad T = 2$

Решим это дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

Из вышеизложенного следует, что при начальных условиях

$$x_0 = \frac{1}{2\sqrt{mc}}\left[C_0 \mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T + S_0\right],$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2m}\left[S_0 \mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}T - C_0\right]$$

уравнение имеет периодическое решение с периодом T:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \dot{x}_0 \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{1}{\sqrt{mc}} \cdot \int_0^t F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)\,d\zeta.$$

Найдем начальные условия x_0, $\dot{x}_0$ и периодическое решение $x(t)$ рассматриваемого уравнения (2) при заданной функции $F(t)$. Предварительно вычислим C_0 и S_0:

$$C_0 = \int_0^T F(\zeta) \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = \int_0^1 \zeta \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta + \int_1^2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = \frac{m}{c} \cdot \cos\sqrt{\frac{c}{m}} - \frac{m}{c} + \sqrt{\frac{m}{c}}\sin 2\sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$S_0 = \int_0^T F(\zeta) \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = \int_0^1 \zeta \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta + \int_1^2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\zeta\,d\zeta = \frac{m}{c} \cdot \sin\sqrt{\frac{c}{m}} - \sqrt{\frac{m}{c}}\cos 2\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Тогда

$$x_0 = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}},$$
$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2c} - \frac{1}{2\sqrt{mc}} \cdot \mathrm{ctg}\sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (22)$$

При найденных начальных условиях решение $x(t)$ для $0<t<1$ будет иметь вид:

$$x(t)=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\dot{x}_0\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{\sqrt{mc}}\int\limits_0^t\varsigma\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\varsigma)d\varsigma=$$

$$=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}t,$$

а для $1<t<2$:

$$x(t)=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\dot{x}_0\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{\sqrt{mc}}\left[\int\limits_0^1\zeta\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)d\zeta+\int\limits_1^t 1\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\zeta)d\zeta\right]=$$

$$=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}\left[1+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)\right].$$

Таким образом, при начальных условиях (22) имеется решение с периодом $T=2$:

$$x(t)=\begin{cases}x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}t, & 0<t<1\\ x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}\left[1+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)\right], & 1<t<2.\end{cases}$$

Воспользуемся теперь разложением правой части в ряд Фурье. Коэффициенты разложения $F(t)$ имеют вид:

$$a_0=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T F(t)dt=\int\limits_0^1 t\cdot dt+\int\limits_1^2 1\cdot dt=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T F(t)\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}dt=\int\limits_0^1 t\cos\pi ntdt+\int\limits_1^2 1\cdot\cos\pi ntdt=\frac{1}{\pi^2n^2}\left[(-1)^n-1\right],$$

$$b_n=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T F(t)\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}dt=\int\limits_0^1 t\sin\pi ntdt+\int\limits_1^2 1\cdot\sin\pi ntdt=\frac{1}{\pi n}$$

Следовательно,

$$x(t)=\frac{1}{c}\cdot\left[\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n-1}{\pi^2n^2}\cdot\cos\pi nt-\frac{1}{\pi n}\sin\pi nt}{1-\pi^2n^2\frac{m}{c}}\right].$$

Решим теперь данное уравнение операционным методом. Функцию

$$F(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1,\\ 1, & 1<t<2,\end{cases}\quad T=2$$

можно представить в виде

$$F(t)=t\cdot\eta(t)-(t-1)\cdot\eta(t-1)-\eta(t-2);\quad 0\le t\le T.$$

Эта функция с учетом периода $T=2$ имеет следующее изображение:

$$F(t)\risingdotseq\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-2p}\right).$$

Операторное уравнение здесь запишется так:

$$m\cdot\left(p^2\cdot\overline{x}(p)-x_0\cdot p-\dot{x}(p)\right)+c\cdot\overline{x}(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-2p}\right).$$

Решение операторного уравнения можно представить в следующем виде:

$$\overline{x}(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\Bigg(\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{m}{c}\cdot\frac{1}{mp^2+c}-e^{-p}\cdot\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{m}{c}\cdot\frac{1}{mp^2+c}\right)-\frac{1}{m}\cdot e^{-2p}\cdot\frac{1}{p\left(p^2+\frac{c}{m}\right)}+$$

$$+x_0\cdot\frac{p}{p^2+\frac{c}{m}}+\dot{x}_0\frac{1}{p^2+\frac{c}{m}}-x_0\cdot e^{-2p}\frac{p}{p^2+\frac{c}{m}}-\dot{x}_0\cdot e^{-2p}\frac{p}{p^2+\frac{c}{m}}\Bigg)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\Phi(p)$$

Пусть $\Phi(p) \doteqdot \varphi(t)$, тогда

$$\varphi(t)=\frac{1}{c}\cdot t\cdot\eta(t)-\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\cdot\eta(t)-\frac{1}{c}(t-1)\cdot\eta(t-1)+\frac{1}{c}\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)\cdot\eta(t-1)-$$

$$-\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{c}\cdot\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2)\right)\cdot\eta(t-2)+x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\cdot\eta(t)+\dot{x}_0\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\cdot\eta(t)-$$

$$-x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2)\cdot\eta(t-2)-\dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2)\cdot\eta(t-2).$$

Для $0<t<2$ $\quad \varphi(t)=x(t)$, а при $t>2$ $\quad \varphi(t)\equiv 0$.

Таким образом, при $0<t<1$

$$x(t)=\frac{1}{c}\cdot t-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t=$$

$$x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}\cdot t.$$

При $1<t<2$

$$x(t)=\frac{1}{2}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t-\frac{1}{c}(t-1)+\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)+x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+$$

$$+\dot{x}_0\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t=x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}\left[1+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)\right].$$

При $t>2$

$$\varphi(t)\equiv 0=\frac{1}{c}\cdot t-\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t-\frac{1}{c}(t-1)+\frac{1}{c}\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)+\frac{1}{c}\cdot\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2)\right)+$$

$$+x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\dot{x}_0\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t-x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2)-\dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-2).$$

Определяя из последнего тождества значения x_0 и $\dot{x}_0$, получим, если $\pi n\neq\sqrt{\frac{c}{m}}$, выражение (22).

Таким образом, получается, что заданное уравнение имеет периодическое решение с периодом $T=2$ при начальных условиях (22).

Это решение имеет вид:

$$x(t)=\begin{cases} x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}t, & 0<t<1 \\ x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\left(\dot{x}_0-\frac{1}{c}\right)\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t+\frac{1}{c}\left[1+\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t-1)\right], & 1<t<2. \end{cases}$$

Как следует из анализа решения, получаемого любым из трех описанных методов, при $\pi n=\sqrt{\frac{c}{m}}$ наступает резонанс.

Вывод

Таким образом, рассмотрены различные математические модели задачи о периодических колебаниях и определены пути их решения. Каждая из указанных моделей обладает своими преимуществами и недостатками. Как правило, усложнение модели позволяет добиться более высокой точности, получаемых результатов. Но эта более высокая точность не всегда бывает востребована. Специалисту по применению математических методов необходимо каждый раз находить оптимальное соотношение между сложностью модели и достигаемой точностью результата. При этом следует учитывать, что погрешности при решении задачи возникают не только при посредственной реализации модели, но и сам процесс моделирования вносит огрубление при описании технической системы или процесса. Математическое моделирование изначально требует высоко уровня математической и естественнонаучной культуры, т. к. процесс моделирования решения задачи постоянно требует сопоставлений и совмещений представлений об объекте исследования на уровне технических, общенаучных и математических знаний. Все это приводит к необходимости разработки дидактических основ курса математического моделирования на всем периоде обучения, начиная с профильной школы до окончания вуза и при последующих этапах самообразования.

2.7 Задания

1. Привести пример реальной механической конструкции и электрической системы, для которых, соответственно механические и электрические колебания могли бы быть описаны уравнением типа $m\ddot{x} + cx = F(t)$***. Указать, как технически может быть реализовано механическое и электрическое возбуждение по закону*** $F(t)$***. Задать механические и электрические параметры колебательных систем так, чтобы происходящие колебания были малы.***

2. Найти периодические колебания с периодом T при возбуждении $F(t)$, соответствующем Вашему варианту, следующими методами:

а) методом вариации произвольных постоянных;

б) методом Фурье;

в) операционным методом;

г) каким-либо численным методом.

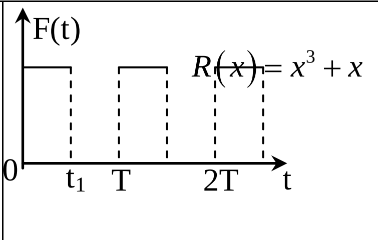
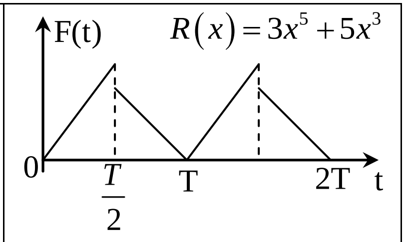
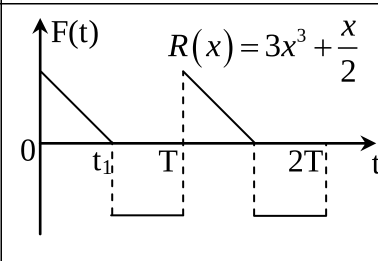
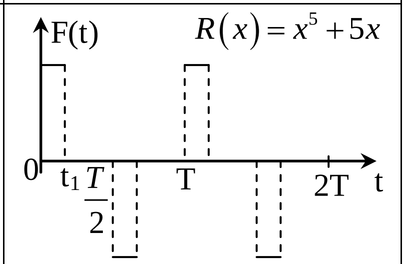
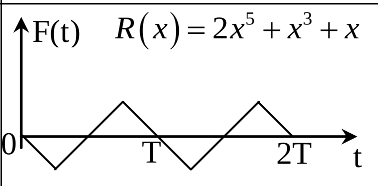
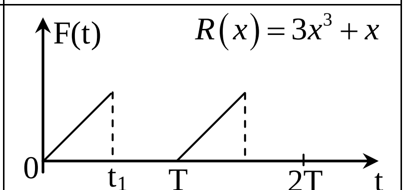
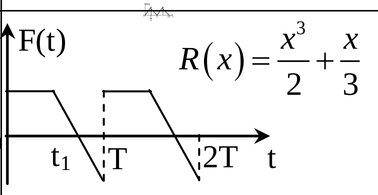
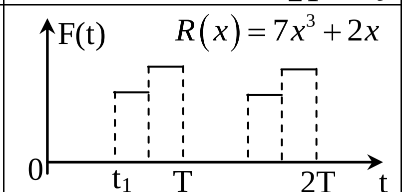
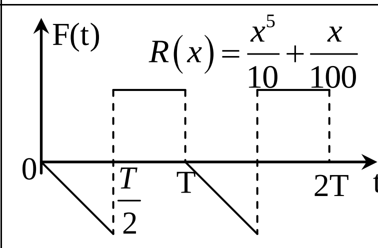
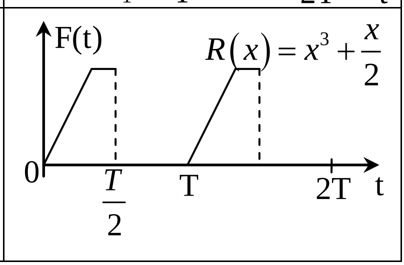
Результаты расчетов всеми методами представить в виде графиков функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ на промежутке времени $[0;T]$.

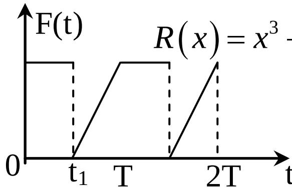
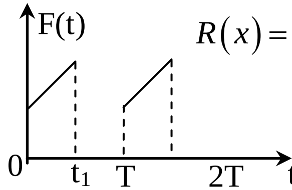
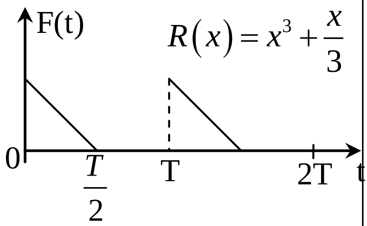
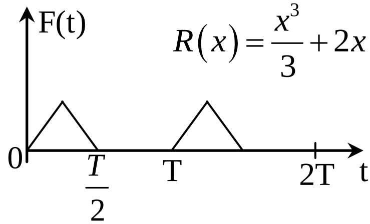
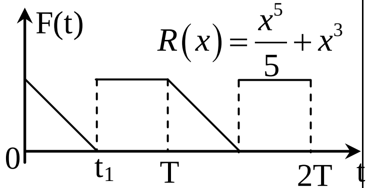
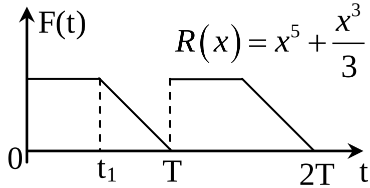
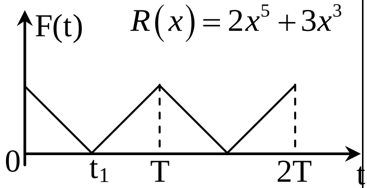
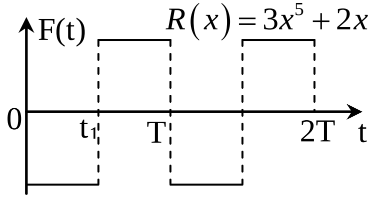
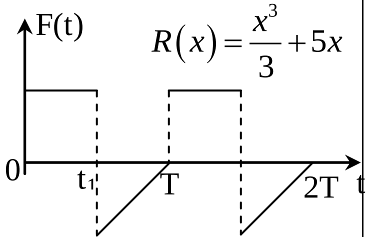
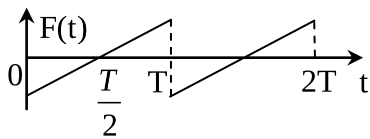
3. Определить режимы резонанса и «биений». Исследовать влияние параметров колебательной системы на амплитудно-частотные характеристики $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. Полученные результаты представить графически и в виде интерполяционного многочлена Лагранжа.

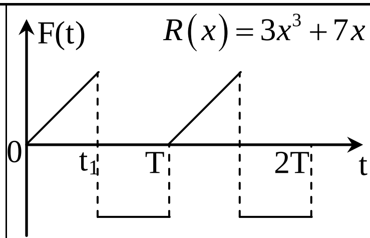
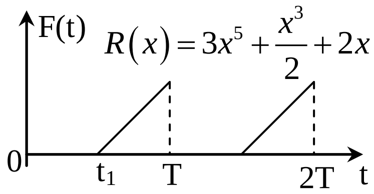
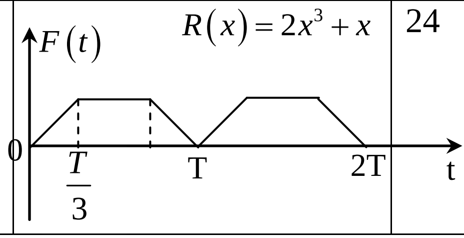
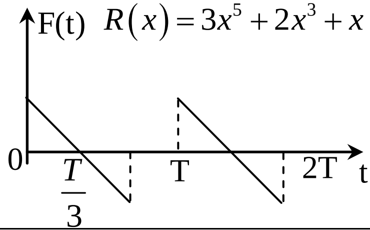
4. Найти период свободных нелинейных колебаний при характеристике $R(x)$, соответствующей Вашему варианту. Найти $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ на промежутке в один период каким-либо численным методом. Исследовать влияние начальных условий на период свободных колебаний. Результаты представить графически и в виде интерполяционного многочлена Лагранжа.

5. Сформулировать возможные практические рекомендации на осязании проведенных исследований колебательного процесса. Результаты расчетов допускают погрешность не более 1%.

Варианты заданий

1	 $R(x)=x^3+x$	2	 $R(x)=3x^5+5x^3$
3	 $R(x)=3x^3+\frac{x}{2}$	4	 $R(x)=x^5+5x$
5	 $R(x)=2x^5+x^3+x$	6	 $R(x)=3x^3+x$
7	 $R(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x}{3}$	8	 $R(x)=7x^3+2x$
9	 $R(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{x}{100}$	10	 $R(x)=x^3+\frac{x}{2}$

11	$R(x)=x^3+\frac{x}{10}$ 	12	$R(x)=\frac{x^3}{3}+x$ 
13	$R(x)=x^3+\frac{x}{3}$ 	14	$R(x)=\frac{x^3}{3}+2x$ 
15	$R(x)=\frac{x^5}{5}+x^3$ 	16	$R(x)=x^5+\frac{x^3}{3}$ 
17	$R(x)=2x^5+3x^3$ 	18	$R(x)=3x^5+2x$ 
19	$R(x)=\frac{x^3}{3}+5x$ 	20	$R(x)=x^5+x^3+x$ 

21	$R(x)=3x^3+7x$ 	22	$R(x)=3x^5+\frac{x^3}{2}+2x$ 
23	$R(x)=2x^3+x$ 	24	$R(x)=3x^5+2x^3+x$ 

3. Список литературы

1. *Андронов А. А., Витт А. А. Хайкин С. Э.* Теория Колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физ.-мат. литература. 1959. – 916 с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний: учебное пособие / И. М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
3. *Кабардин О. Ф.* Физика: учеб.-справ. Пособие / О. Ф. Кабардин. – М.: АСТ: Астрель, 2008. – 573 с.
4. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. 3-е изд. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
5. *Brian Jefferson*. A Level Mathematics for Edexcel: Mechanics M1. OUP Oxford. 2008. – 192 p.
6. Pat Bryden. MEI Mechanics 1 3rd Edition: Bk. 1 (MEI Structured Mathematics (A+AS Level)). Hodder Education; 3 edition. 2004. – 208 p.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Михаил Леонидович Лурье

Творческие задания для учащихся профильных естественно-математических классов по моделированию колебательных процессов

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 23.11.2015. Формат 60х90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 3,75. Тираж 300 экз. Заказ № 96738
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86