Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

В. Г. Рисберг

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ (ЧАСТЬ I)

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.85
ББК 22.1я721
И 89

Рецензенты:
А. П. Иванов (канд. физ.-мат. наук, профессор НИУ ВШЭ)
И. Н. Глинкина (учитель Лицея № 1 г. Перми)

Рисберг В. Г.

И 89 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ (ЧАСТЬ I): Учебное пособие под общей ред. И.Ю. Черниковой; ФГБОУ ВПО ПНИПУ/ В.Г. Рисберг; – Пермь: Издательство «Пушка», 2015. – 56 с.

Рассмотрены вопросы математики по теории элементарных функций. Приводятся многоуровневые задания по построению цепочек преобразований графиков функций и примеры построения самих графиков. Рассматривается использование преобразований графиков при решении некоторых задач из курса физики.

Предназначено для слушателей курсов повышения квалификации по направлению подготовки: методика обучения математике и физике; специалистов системы общего образования, студентов педагогических вузов, ориентированных на работу в классах с углубленным изучением математики, физики, информатики.

УДК 372.85

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация интегрированной программы элективных курсов по подготовке одарённых школьников, ориентированных на продолжение образования по математическим, естественнонаучным и инженерным дисциплинам».

ISBN 978-5-98799-143-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данное пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основные теоретические положения, касающиеся данной темы, приводятся примеры построения цепочек преобразований графиков функций и примеры построения самих графиков. Кроме того, разбирается большое количество заданий, непосредственно связанных с преобразованием графиков различных функций и с композицией разных модулей, рассматривается использование преобразований графиков при решении некоторых задач из курса физики.

Вторая часть посвящена построению графиков функций с модулем и использованию преобразований графиков и функционально-графического метода при решении заданий высокого уровня сложности из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Весь курс представляет учебное пособие, которое призвано углубить и систематизировать те разрозненные знания по теме, которыми владеют на том или ином уровне ученики в школах, студенты и учителя математики.

Учителя математики могут использовать этот спецкурс при составлении предпрофильных и профильных курсов в классах физико-математического профиля, учащиеся предпрофильных и профильных классов, где математика и физика преподаются на повышенном уровне, – при итоговом повторении материала по математике и подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

В рамках этого курса рассматриваются основные преобразования графиков функций и приводятся примеры их использования при решении уравнений и неравенств, при построении графиков для функций, содержащих модули. В этом пособии приведены примеры использования данной темы при решении отдельных видов задач из курса физики и других дисциплин, в которых рассматриваются различные функциональные зависимости, изучаемые в рамках программ по алгебре 7–9-х классов и по алгебре и началам анализа в 10–11-х классах средней школы.

Введение

Учебники алгебры 7–9-х классов и учебники алгебры и начал анализа 10–11-х классов изобилуют заданиям, связанными с решением различных уравнений, неравенств и их систем, причем большинство этих заданий предполагает решение стандартным путем с использованием общепринятых алгоритмов. В то же время в курсе алгебры есть очень много заданий, связанных с решением уравнений, неравенств и их систем, которые можно выполнять с использованием преобразований графиков известных учащимся функций.

Кроме того, в курсе физики и других учебных предметов нередко встречаются задания, решаемые математическими методами, в том числе и с помощью графиков. Не обладая достаточными навыками в использовании преобразований графиков, ученики пытаются решить такие задания традиционными, с точки зрения программы по алгебре, способами, что значительно усложняет их решение и удлиняет сам процесс решения. Особенно большие проблемы возникают при построении графиков функций, содержащих модули.

Следует заметить, что большинство авторов учебников математики сознательно обходят задания, которые традиционными способами решить не удается, но зато хорошо можно решить графическим путем с помощью преобразований графиков. В результате круг решаемых заданий основательно сужается. Данная программа значительно расширяет круг решаемых заданий.

Тема «Преобразование графиков функций» как самостоятельная в учебниках математики основной и полной средней школы отсутствует, хотя вопросы, связанные с ней, частично рассматриваются в учебных пособиях, но, на наш взгляд, очень поверхностно. Им уделяется недостаточно времени, поэтому требовать от учащихся твердых знаний преобразований графиков функций невозможно. В то же время сама эта тема считается по праву одной из наиболее сложных в курсе алгебры. А поскольку на ее изучение, а главное, на ее закрепление специального времени в девятом классе программой не предусмотрено, то у выпускников основной школы умения по этой теме, как правило, бывают не сформированными. В результате в десятый класс большинство учеников приходит практически не подготовленным к работе с графиками, что отражается и при решении алгебраических задач и при решении физических задач, в которых графическая составляющая занимает не последнее место.

Еще хуже обстоит вопрос о работе с графиками функций, заданных аналитическими выражениями, содержащими модуль. Имея слабое представление о том, что делать с модулями вообще, ученик не в состоянии сделать что-либо с такими функциями, построение графиков которых требует, кроме того, еще и преобразований. Поэтому сначала особое внимание уделим самим преобразованиям графиков функций (без модуля) и только потом обратимся к более сложным графикам функций (с модулем).

В программе по алгебре и началам анализа в 10–11-х классах соотношение между содержательными линиями по сравнению с программой основной школы меняется. В старшей школе наиболее важной и востребованной в курсе алгебры и начал анализа является функционально-графическая содержательная линия, поэтому вопросы, связанные с преобразованием графиков, и с графиками функций, заданных аналитическим выражением, содержащим модуль, становятся на старшей ступени средней школы значительно более актуальными.

Следует отметить, что в последние годы на итоговой аттестации за курс основной и полной средней школы в форме основного и единого государственных экзаменов (ОГЭ и ЕГЭ) авторы активно используют задания (как в явном, так и в неявном виде), связанные с работой с графиками. В частности в каждом варианте КИМ в последние годы во второй части ОГЭ (задание №23) и во второй части ЕГЭ (задании №20 или С5) постоянно присутствуют задания, которые без необходимых глубоких знаний и прочных навыков работы с графиками решить невозможно.

В связи с этим перед учителем математики в десятом классе встает целый ряд вопросов. Во-первых, как заставить учащихся разобраться в основных преобразованиях графиков функций. Во-вторых, как научить их ориентироваться в многообразии преобразований. В-третьих, где найти качественное и удобное пособие, которое познакомит с системой работы с графиками функций и поможет освоению этой системы. В-четвертых, где можно познакомиться с алгоритмами использования преобразований графиков при решении уравнений, неравенств и их систем и при решении заданий с модулями. В-пятых, где взять материал о решении уравнений, неравенств и их систем функционально-графическом методом и о том, в чем он заключается. В-шестых, как, наконец, научить детей использовать функционально-графический метод при решении заданий из алгебры и физики.

Объем материала, представленного в курсе «Использование преобразований графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модули», вполне достаточный для овладения соответствующими приемами при решении различных заданий. Это касается заданий как из курса алгебры основной школы и курса алгебры и начал анализа полной средней школы, так и заданий из курса физики, связанных с данной темой.

Материал курса можно использовать в двух уровнях: для проведения предпрофильного курса по выбору в 9-м классе (в несколько сокращенном варианте) и в 10–11-х классах (в частично сокращенном или полном объеме). Следует отметить, что значительно больше он востребован именно в 10–11-х классах, где его можно продуктивно использовать в качестве профильного элективного курса. В этом случае класс рассматриваемых функций может быть значительно расширен за счет тех, которые изучаются в 10–11-х классах, а следовательно, будет расширен и круг решаемых задач из курсов алгебры и физики.

В рамках нашего курса приведено большое количество различных упражнений. Они практически во всех частях курса даны в порядке усложнения. Их вполне достаточно. Однако при необходимости или при наличии соответствующих возможностей количество заданий можно увеличить, дополнив их набор по желанию учителя. В случае если учитель сочтет целесообразным давать учащимся задание на дом в большем объеме, то он сможет дополнить набор упражнений, которые приведены в главах №№3, 4 и 5, аналогичными.

Что касается уровней сложности заданий, то можно выделить три уровня: базовый, повышенный и высокий. Задания, которые рекомендуется отнести к повышенному и углубленному уровням сложности, отмечены знаками «*» или «**» соответственно. Как правило, задания приведены парами – по два однотипных. Это сделано по нескольким причинам. Во-первых, можно без труда выделить задания, которые целесообразно рассматривать в классах того или иного уровня преподавания математики (базового, повышенного или углубленного). Во-вторых, одно из заданий каждого типа разбирается совместно с учениками, второе либо осваивается учащимися самостоятельно, либо дается в качестве домашнего задания.

В каждой главе приведено достаточное количество заданий. Учителю будет нетрудно выбрать задания, которые следует разобрать в классе, и задания, которые можно использовать для самостоятельных и контрольных работ и для домашнего задания. В главе № 5 мы приведем примеры такого разбиения. Думаем, что учителям будет нетрудно произвести аналогичное разбиение и в остальных главах курса.

Понятно, что такое разбиение заданий по уровням весьма условно; учитель сам может определять, какое задание, на его взгляд, целесообразно рассматривать в каком классе. Условным является и количество самостоятельных и контрольных работ, отмеченное в тематическом планировании.

Если этот курс проводить в рамках предпрофильной подготовки, то делать это целесообразно в 9-м классе после прохождения темы «Квадратичная функция», когда учащиеся уже познакомились практически со всеми функциями, рассматриваемыми в курсе алгебры основной школы, и у них уже сформированы первичные навыки работы с функциями и их графиками. При этом ту часть материала нашего курса, которая связана с функциями, изучаемыми в 10–11-х классах, следует опустить и брать лишь те, которые изучаются в 7–9-х классах.

На старшей ступени обучения в рамках профильного обучения курс наиболее целесообразно проводить в десятом классе. В зависимости от выбора времени проведения он будет иметь разный содержательный объем. Например, если проводить курс в начале десятого класса, то из его содержательной части придется исключить упражнения, связанные с показательной, логарифмической и тригонометрическими функциями. Это, конечно, серьезно обеднит курс и сузит сферу применения рассматриваемого теоретического материала, но зато сделает курс приемлемым для изучения.

Пожалуй, наиболее удачным будет вариант, при котором изучение темы «Показательная и логарифмическая функции» будет перенесено в десятый класс. Тогда рассматриваемый курс можно проводить во второй половине года после прохождения этой темы. Это расширит содержательные рамки материала курса, поскольку круг рассматриваемых функций станет значительно более обширным, и даст достаточно времени для закрепления и использования материала курса в течение оставшегося времени обучения в школе.

Если эту тему не переносить, оставив ее в 11-м классе, то данный курс следует проводить после ее изучении. Но тогда времени, оставшегося на серьезное закрепление материала, может оказаться недостаточно. Поэтому следует начать проведение данного курса, не дожидаясь окончания прохождения темы «Показательная и логарифмическая функции», параллельно с ее изучением, но начать его с некоторым отставанием.

Материал курса можно использовать как в классах, где математика изучается на базовом уровне, так и в классах, где математика изучается на повышенном уровне, то есть в расширенном варианте, или на углубленном уровне по программе углубленного изучения предмета. В последнем случае теоретический материал можно расширить за счет рассмотрения симметрий относительно произвольной точки, произвольной прямой, а в 10–11-х классах даже относительно координатной плоскости, произвольной плоскости, а также некоторых других преобразований. Если проводить данный курс в классе физико-математического профиля, то его расширения можно добиться за счет увеличения задач с физическим содержанием.

Важную положительную роль может впоследствии сыграть курс при итоговом повторении материала и подготовке к итоговой аттестации как курс основной школы (ОГЭ), так и за курс полной средней школы (ЕГЭ), на которых в последние годы, как уже было сказано, функционально-графическая составляющая является одной из приоритетных для учащихся, претендующих на высокие баллы.

Следует отметить и роль данного курса в выборе дальнейшей профессии старшеклассников. Он может оказать неоценимую помощь в формировании будущего ученого, высококвалифицированного специалиста по межпредметным вопросам науки и техники, инженера-исследователя. Обладая признаками одаренности в сфере математического и естественнонаучного образования, старшеклассник, освоивший данный курс, сможет самостоятельно или с помощью тьютора, консультанта сформировать структуру проектируемой профессии.

Структура курса (Часть I)

Курс состоит из семи глав, пять из которых включены в первую часть:

1. Основные преобразования графиков функций.

2. Методические рекомендации по использованию таблицы основных преобразований графиков функций.

3. Планирование и выполнение последовательности преобразований графиков функций. Примеры использование графической составляющей при решении задач из курса физики.

4. Выполнение последовательности преобразований графиков функций и построение графиков на базе графиков основных функций.

5. Преобразование графиков различных функций с помощью композиции разных модулей.

В соответствии с построением курса тематическое планирование первой части должно выглядеть приблизительно следующим образом.

Тематическое планирование

№ темы	*Название темы*	*Кол-во часов*	*Виды контроля*
1.	Основные преобразования графиков функций и их использование. (Главы 1, 2).	2	
2.	Планирование последовательности преобразований графиков функций. Примеры использование графической составляющей при решении задач из курса физики. (Глава 3).	2	Самостоятельная работа (малая)
3.	Построение графиков функций на базе графиков основных функций. (Глава 4)	4	Самостоятельная работа, домашняя самостоятельная работа
4.	Композиции разных преобразований модулей. (Глава 5).	8	Две самостоятельные работы, контрольная работа
	Всего	16	

Весь курс (обе части) рассчитан на различную продолжительность: от 28 до 44 часов, а первая часть, соответственно, от 12 до 16 часов. Он содержит довольно большое количество различных упражнений, как чисто математического характера, так и заданий с физическим содержанием. Поэтому в зависимости от глубины рассмотрения каждой из его глав его можно использовать по-разному:

- в 9-м классе он может быть взят как предпрофильный курс и включать не все представленные в нем главы;
- в 10–11-х классах его можно использовать как самостоятельный элективный курс для физико-математических классов, в которых преподавание математики ведется на повышенном уровне, включив в него несколько или все главы;
- в 10–11-х классах его можно использовать как часть более крупного элективного курса, где математика ведется на углубленном уровне.

В первом и втором случаях некоторые из составных частей (глав) курса могут быть сокращены или пропущены вовсе (в частности можно ограничиться только первыми четырьмя главами, дополнив их любой из остальных трех глав, так как пятая, шестая и седьмая главы курса являются в принципе самостоятельными; в случае необходимости сокращения курса учитель может пожертвовать любой из них), однако это значительно понизит уровень овладения учениками данной темой и сузит возможности ее использования в дальнейшем при решении уравнений и неравенств. Это зависит от времени, отпущенного на его проведение и от совокупности проблем при рассмотрении данной темы в конкретном классе конкретной школы. При этом в классах, где математика изучается на повышенном уровне, физика – на базовом уровне, материал курса можно сократить за счет задач с физическим содержанием, которые есть в главе 3 и (в основном) последних главах курса.

Следует отметить, что в классе с углубленным изучением математики курс следует рассмотреть в полном объеме. При этом учитель может самостоятельно сокращать или расширять материал каждой из его глав или расширить сам курс за счет дополнительных вопросов, продумать систему дополнительных упражнений для самостоятельных и контрольных работ (по аналогии с представленной системой работ в главе 5), для домашних работ с целью закрепления материала по данной теме.

Кроме того, если курс брать в полном объеме, то для удобства использования целесообразно весь его дидактический материал распечатать на отдельных листах и раздать учащимся в виде приложения к курсу (смотри приложения к курсу в конце). Это, во-первых, сэкономит время на занятиях и, во-вторых, даст возможность те задания, которые будут выведены учителем за пределы классной работы, решать дома самостоятельно.

Содержание курса

Глава 1. Основные преобразования графиков функций

Пусть дан график некоторой функции $y=f(x)$. Рассмотрим четыре основные группы преобразований графиков функций.

1. <u>Сдвиги вдоль осей координат</u>

Какая функция получится, если над графиком функции $y=f(x)$ произвести следующее преобразование:

1) сдвиг вдоль оси абсцисс вправо на *a* единиц, где $a>0$: $y=f(x-a)$;

2) сдвиг вдоль оси абсцисс влево на *a* единиц, где $a>0$: $y=f(x+a)$;

3) сдвиг вдоль оси ординат вверх на *c* единиц, где $c>0$: $y=f(x)+c$;

4) сдвиг вдоль оси ординат вниз на *c* единиц, где $c>0$ $y=f(x)-c$.

2. <u>Сжатия (растяжения) вдоль осей координат</u>

Какая функция получится, если над графиком функции $y = f(x)$ произвести следующее преобразование:

1) сжатие вдоль оси абсцисс к оси ординат в k раз, где $k > 1$: $y = f(kx)$;

2) растяжение вдоль оси абсцисс от оси ординат в k раз, где $k > 1$: $y = f\left(\frac{k}{x}\right)$;

3) растяжение вдоль оси ординат от оси абсцисс в k раз, где $k > 1$: $y = k \cdot f(x)$;

4) сжатие вдоль оси ординат к оси абсцисс в k раз, где $k > 1$: $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$.

3. <u>Симметрии</u>

Какая функция получится, если над графиком функции $y = f(x)$ произвести следующее преобразование:

1) симметрия относительно оси абсцисс: $y = -f(x)$;

2) симметрия относительно оси ординат: $y = f(-x)$;

3) симметрия относительно начала координат: $y = -f(-x)$.

4. <u>Модули</u>

Какая функция получится, если над графиком функции $y = f(x)$ произвести следующее преобразование:

1) часть графика, расположенная выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика,

расположенная ниже оси абсцисс, отображается симметрично относительно нее: $y = |f(x)|$;

2) часть графика, расположенная правее оси ординат (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная левее оси ординат, ***заменяется*** на симметричную правой части: $y = f(|x|)$.

Для удобства введем обозначения преобразований графиков функций по следующей схеме: арабской цифрой прописывается номер основного преобразования, индексом уточняется характер преобразования.

Глава 2. Методические рекомендации по использованию таблицы основных преобразований графиков функций

1. Сдвиги вдоль осей координат

Понятно, что можно было не разбивать первые два (как и последующие два) преобразования на отдельные. Однако учащиеся, как правило, воспринимают всегда число (выражение) именно с тем знаком, который указан и поэтому постоянно путаются при выяснении вопроса, в какую сторону следует перенести график: в первых двух преобразованиях вправо или влево, в остальных вверх или вниз. Опыт показывает, что в случае, когда преобразование – сдвиг вдоль оси абсцисс – разбивают на два отдельных, ошибок бывает значительно меньше. В большинстве справочников это разбиение отсутствует: они даны как единое преобразование – сдвиг вдоль оси абсцисс (оси ординат).

Честно говоря, иногда все эти четыре преобразования заменяют одним – обычным параллельным переносом на вектор $\vec{m}\ \{a;c\}$. В результате получим функцию $y = f(x-a)+c$, которая может быть получена с помощью последовательного выполнения сдвигов вдоль осей.

Эта группа преобразований играет важную роль при решении задач из курса физики, связанных с гармоническими и электромагнитными колебаниями и с векторами из раздела «механика».

2. Сжатия-растяжения вдоль осей координат

Как и в первой группе преобразований, здесь можно объединить первые два преобразования в одно – сжатие-растяжение вдоль оси абсцисс, а остальные два – вдоль оси ординат, но значительно лучше развести эти преобразования, поскольку название преобразования должно быть по возможности конкретным и соответствовать реальному процессу. Кроме того, называть преобразование (2) сжатием, а преобразование (4) растяжением довольно противоестественно, хотя практически во всех справочниках это так и сделано.

Это терминологическое единообразие ведет к тому, что требования к студентам вузов автоматически переносятся на учащихся школ, которые в большинстве своем не способны на теоретическом уровне абстрактно воспринимать математические знания. Отсюда непонимание материала и как следствие неумение использовать его. На наш взгляд, целесообразно разбить два преобразования этой группы преобразований на четыре отдельных, как это сделано выше. При этом естественно следует использовать слова «сжатие» и «растяжение» в соответствии с их общепринятым бытовым смыслом.

Большую проблему для учащихся составляет правильное понимание сути первых двух преобразований. Сжатие к оси (например, к оси ординат в 3 раза) означает то, что каждая точка становится ближе (приближается) к этой оси в 3 раза, то есть расстояние между ними уменьшается втрое; при этом точки на самой оси остаются на месте. Аналогично при растяжении от оси ординат точки удаляются от нее в соответствующее число раз. В общеобразовательном классе, где преподавание математики идет на базовом уровне, не следует требовать их запоминания от каждого ученика. Эти преобразования в качестве обязательных следует отнести к повышенному и углубленному курсам.

Значительно меньше проблем задают остальные два преобразования. Они не являются очень сложными для понимания и хорошо усваиваются большинством учащихся даже на базовом уровне.

Что же касается обобщенного для всей этой группы преобразований случая ($y = a \cdot f(cx)$), то это преобразование не является по сути самостоятельным. Оно состоит из двух независимых друг от друга преобразований, которые должны выполняться последовательно. При этом можно заметить, что порядок выполнения этих преобразований можно менять, то есть данная композиция преобразований коммутативна. Следует отметить, что преобразование $y = a \cdot f(kx)$ рассматривать как обязательное и включать в число основных преобразований ни на базовом, ни даже на повышенном уровне нецелесообразно.

Эта группа преобразований, как и предыдущая, играет важную роль при решении задач из курса физики, с которыми мы встретимся в 3 и в последних главах данного курса. Эти задачи в основном будут связаны с гармоническими и электромагнитными колебаниями и с векторами из раздела «механика».

3. Симметрии

Из трех преобразований симметрии ученики более или менее хорошо могут овладеть только первым, тем более что оно напрямую связано с определением модуля, которое вводится в восьмом классе, и хорошо соотносится с ним. Что касается второго и особенно третьего преобразования, то их как правило, знают очень немногие, причем последнее, по сути, является композицией первых двух преобразований. В то же время его можно рассматривать как самостоятельное, поскольку его довольно часто применяют на практике (в некоторых ситуациях его использование очень удобно).

Преобразования $y=-f(x)$ можно в принципе рассмотреть и в классе, где математика изучается на базовом уровне. Что касается преобразований $y=f(-x)$ и $y=-f(-x)$, то их следует рассматривать как обязательные только на повышенном уровне.

4. <u>Преобразования модуля</u>

Конечно, преобразования этой группы лучше сформулировать в обратном порядке: что происходит с графиком функции $y=f(x)$ в результате преобразования $y=|f(x)|$ или $y=f(|x|)$. Но для единообразия формы представления всех групп преобразований в первой части нашего курса формулировка в этой группе такая же, как и в остальных. Первое преобразование (4_1) знакомо большинству учащихся и в нем легко заметить иллюстрацию к определению модуля, знакомого с 8-го класса. Что касается второго преобразования (4_2), то в общеобразовательных классах, где математика изучается на базовом уровне, с ним не знаком практически никто. Причин для этого несколько.

Начать можно с того, что это преобразование менее значимо для программы и поэтому значительно реже встречается. Кроме того, оно является менее понятным по смыслу и более сложным в использовании. Чтобы хорошо понимать его смысл и правильно сформулировать алгоритм его выполнения, достаточно только грамотно использовать определение модуля за 8-й класс.

Действительно, если $x \geq 0$, то по определению имеем $f(|x|) = f(x)$. Переведя эту фразу на графический (геометрический) язык, получим: часть графика функции справа от оси ординат и точки на самой оси остаются на месте, то есть сохраняются. Аналогично при $x < 0$ по определению модуля имеем: $f(|x|) = f(-x)$. Это значит: часть графика функции слева от оси ординат заменяется на симметричную правой относительно этой оси части графика. Точнее: та часть графика, которая была расположена слева от оси ординат, убирается (стирается), а на ее месте появляется график, симметричный той части графика исходной функции, которая была справа от оси ординат.

Соотнесем уровень сложности этих преобразований с уровнем программ по математике. Преобразование 4_1 может быть введено на всех трех уровнях программ, однако требовать его понимания и запоминания следует только на повышенном и углубленном уровнях. Что касается преобразования 4_2, то, поскольку оно является значительно более сложным, то на базовом уровне его даже вводить не рекомендуется. На повышенном уровне его можно ввести, но вряд ли следует требовать от учащихся его обязательного понимания и использования. Требовать это можно только на углубленном уровне.

Рассуждения, которые были приведены в этом пункте выше относительно преобразований 4_1 и 4_2, можно совершенно аналогично провести и в случае более сложных преобразований графиков функций с использованием модулей. В частности при построении графика $|y| = f(x)$ и при использовании композиций этих трех преобразований. Эти преобразования будут рассмотрены позднее в главе 5.

Глава 3. Планирование и выполнение последовательности преобразований графиков функций. Примеры использование графической составляющей при решении задач из курса физики

3.1. Задание. Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$. Записать цепочку преобразований, с помощью которой можно из этого графика получить график следующей функции:

1) $y = f(x-4)+1$;

2) $y = -2f(x+2)+6$;

3) $y = f(3x)$;

4) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)-7$;

5*) $y = f(2x-8)$;

6*) $y = f(4-x)-2$;

7*) $y = -2f\left(\frac{x}{4}\right)-3$;

8*) $y = -1{,}5f\left(1-\frac{x}{3}\right)-4$;

9*) $y = \frac{2}{5}f\left(-\frac{1}{3}-\frac{x}{6}\right)+2$;

10*) $y = -4\cdot\left|2-f(4x+6)\right|+3$.

3.2. В этом перечне нет совершенно одинаковых или однотипных упражнений. Каждый следующий пример дает что-то новое. Порядок упражнений здесь «от простого к сложному».

Особое внимание следует обратить на примеры № 5 и № 6, поскольку используемое преобразование, наиболее сложно для понимания и быстро забывается; поэтому она присутствует во всех остальных примерах.

Дело в том, что если выполнить сначала преобразование «сжатие к оси ординат в 2 раза», а затем «сдвиг на 6 единиц вправо», то результат окажется неверным. В этом можно легко убедиться, заменив абстрактную функцию $f(x)$ на конкретную функцию, например, функцию квадратного корня. Тогда имеем $y=\sqrt{2x-8}$. Действительно при выполнении выше указанных преобразований получим неправильный график (стоит только проследить, например, за начальной точкой графика). В результате наших преобразований она перейдет в точку с координатами $(8;0)$, которая не принадлежит графику данной функции, так как при $x=4$ $y=\sqrt{8}$.

Можно попробовать другой вариант: вынести число 2 за скобки, то есть привести функцию к виду $y=f(2(x-4))$ и выполнить преобразования. Тогда кажется верным выполнение следующей цепочки действий: «сдвиг вправо на 4 единицы» и «сжатие к оси ординат в 2 раза». Однако и в этом случае результат оказывается неверным. Это опять же легко увидеть с помощью функции $y=\sqrt{2x-8}$, поскольку после ее преобразования к виду $y=\sqrt{2(x-4)}$ в результате получим точку с координатами $(2;0)$, которая также не удовлетворяет функции.

Возникают вопросы: в чем причина; что мы делаем неправильно; может быть, закралась ошибка в исходную таблицу основных преобразований графиков функций. На самом деле причина в том, что оба раза мы использовали преобразования, которых нет в таблице. В обоих случаях это было преобразование № 2.

Как же следует поступать в таких случаях и почему? Необходимо поступить следующим образом:

1) вынести число 2 за скобку (то есть необходимо сделать так, чтобы коэффициент перед переменной *x* был равен 1);

2) сделать естественное при этом преобразование «сдвиг вправо на 4 единицы»;

3) произвести сжатие в 2 раза, но не к оси ординат, а к прямой $x=4$, поскольку после сдвига на 4 единицы вправо роль оси ординат, уравнение которой $x=0$, берет на себя прямая $x=4$, уравнение которой можно записать в виде $x-4=0$, откуда и получим $x=4$.

При этом следует помнить, что все последующие преобразования (до тех пор, пока мы не выйдем за пределы аргумента самой функции $f(x)$, в данном случае функции $y=\sqrt{x}$) выполняются относительно прямой $x=4$. Более подробно об этом в следующем примере.

3.3. Рассмотрим запись при выполнении задания № 9*.

Преобразуем заданную функцию, приведем ее к виду, который удобен для составления цепочки преобразований ее графика:

$$y=2\cdot\frac{1}{5}\cdot f\left(-\frac{1}{6}\cdot(x+2)\right)+2.$$

В такой записи видны все шесть преобразований.

Тогда цепочка преобразований графиков функции (вместе с соответствующей расшифровкой преобразований) примет вид:

$y_0 = f(x)$ – исходная функция,

$y_1 = f(x+2)$ – сдвиг влево на 2,

$y_2 = f\left(\frac{1}{6}\cdot(x+2)\right)$ – растяжение от прямой $x=-2$ (а не от оси ординат) в 6 раз,

$y_3 = f\left(-\frac{1}{6}\cdot(x+2)\right)$ – симметрия относительно прямой $x=-2$ (а не оси ординат),

$y_4 = \frac{1}{5} \cdot y_3$ – сжатие к оси абсцисс в 5 раз,

$y_5 = 2y_4$ – растяжение от оси абсцисс в 2 раза,

$y_6 = y_5 + 2$ – сдвиг вверх на 2.

<u>Примечание</u>. При расшифровке преобразований сознательно берутся (за редким исключением) упрощенные фразы, пропускаются слова «вдоль оси абсцисс» и т.п.

Обозначения y_0, y_1 и т.д. введены, во-первых, для учета количества преобразований, а во-вторых, для удобства обозначений при построении графиков в системе координат в дальнейшем.

3.4. Рассмотрим № 10*.

$$y = -4 \cdot |2 - f(4x + 6)| + 3.$$

Сначала преобразуем функцию к нужному нам для удобства виду: $y = -4 \cdot |f(4(x + 1{,}5)) - 2| + 3$, затем выстроим цепочку преобразований.

$y_0 = f(x)$ – исходная функция,

$y_1 = f(x + 1{,}5)$ – сдвиг влево на 1,5,

$y_2 = f(4 \cdot (x + 1{,}5))$ – сжатие к прямой $x = -1{,}5$ (а не к оси ординат) в 4 раза,

$y_3 = y_2 - 2$ – сдвиг на 2 вниз,

$y_4 = |y_3|$ – преобразование 4_1, то есть верхняя относительно оси абсцисс часть графика сохраняется, а нижняя симметрично отображается симметрично относительно оси абсцисс,

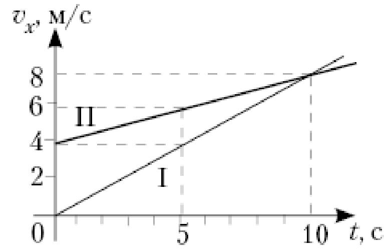
$y_5 = 4y_4$ – растяжение от оси абсцисс в 4 раза,

$y_6 = -y_5$ – симметрия относительно оси абсцисс,

$y_7 = y_6 + 3$ – сдвиг вверх на 3.

3.5. Рассмотрим несколько заданий из курса физики.

***Задача 1*.**



По графикам зависимости проекции скорости прямолинейного движения от времени для двух тел определите:

1) характер зависимости скорости от времени для тела I и тела II;

2) характер движения этих тел;

3) начальные скорости тела I и тела II;

4) скорость тела II через 5 секунд с момента начала отсчёта времени;

5) промежуток времени от момента начала движения тела I до момента, когда его скорость стала 4 м/с;

6) ускорение каждого тела;

7) пути, пройденные каждым телом за 5 секунд;

8) промежуток времени, за который тела пройдут равный путь;

9) промежуток времени от начала движения тела I до момента, когда скорости тел сравняются; сравните пути, пройденные телами за это время;

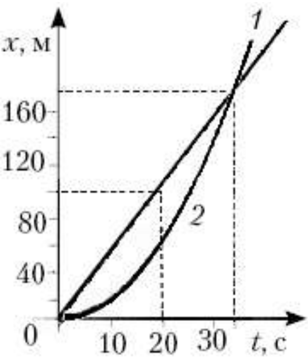
10) силы, действующие на тела, если масса I тела 2 кг, масса II тела 3 кг;

11) какое тело движется с бóльшим большим ускорением;

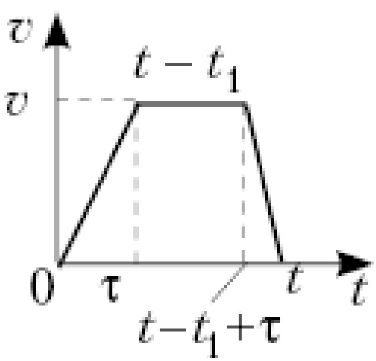
12) для каких объектов могут быть построены эти графики?

Эта задача касается не столько вопросов преобразований графиков функций, сколько установления связей между её физическим и графическим аспектами.

Задача 2. В тот момент, когда мимо станции со скоростью 5 м/с проходил товарный состав, от платформы в том же направлении отошёл пассажирский поезд. Через какое время пассажирский поезд догнал товарный, если пассажирский двигался с ускорением 0,3 м/с^2, а товарный – равномерно?



В такой редакции задача решается довольно просто. Очевидно: $x_1 = v_1 t = 5t$, $x_2 = \frac{at^2}{2} = 0{,}15t^2$.
Построив соответствующие графики, видим, что они пересеклись в точке, координаты которой $\left(33\frac{1}{3}; 166\frac{2}{3}\right)$, а это значит, что пассажирский поезд догнал товарный через $33\frac{1}{3}$ секунд на расстоянии $166\frac{2}{3}$ метра от точки в начальный момент времени. Учитывая, что содержание этой задачи чисто физическое, полученные значения можно взять округлённо. В результате получим приблизительные значения величин: 33 секунды и 170 метров.



Задача 3. Поезд прошёл расстояние $S = 17$ км между двумя станциями со скоростью $v_{cp} = 60$ км/ч. При этом на разгон вначале и торможение перед остановкой ушло в общей сложности $t_1 = 4$ мин, а остальное время поезд двигался с постоянной скоростью. Чему равна эта скорость?

Пусть τ – время разгона поезда, t – общее время в пути. Тогда $S = \frac{v}{2}\tau + v(t - t_1) + \frac{v}{2}(t_1 - \tau) = \frac{v}{2}(2t - t_1)$.

При этом $v_{cp} = \frac{S}{t} \Rightarrow t = \frac{S}{v_{cp}}$.

С другой стороны $S = \frac{v}{2}\left(\frac{2S}{v_{cp}} - t_1\right)$. Отсюда $v = \frac{2S}{\frac{2S}{v_{cp}} - t_1} = \frac{2Sv_{cp}}{2S - v_{cp} \cdot t_1} = 68$ км/ч.

Глава 4. Выполнение последовательности преобразований графиков функций и построение графиков на базе графиков основных функций

4.1. Задание. Для каждой функции выполнить следующие действия:

1) записать функцию в виде, удобном для преобразования графика;

2) составить цепочку преобразований графика исходной функции (x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{k}{x}$, $\sin x$, $\log_a x$ и других)**;**

3) построить график функции, оставляя следы.

Итак, даны функции:

1) $y = (x - 5)^2 - 2$;

2) $y = -2\sqrt{x - 3} + 1$;

3) $y = \frac{6}{x+2} - 3$;

4) $y = 2\sin\frac{x}{2} - 1$;

5) $y = \log_2(2x) + 1$;

6*) $y = (2x - 6)^2$;

7*) $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2$;

8*) $y=-2\cdot\sqrt{3-3x}+2$;

9*) $y=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-1$;

10*) $y=\frac{4}{4-2x}+1$;

11*) $y=\left|3-\frac{1}{2}\log_{0,5}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)\right|-2$;

12**) $y=-1{,}5\cdot(3-|4-2x|)^2+3$;

13**) $y=\left|\sin\left(|x|-\frac{\pi}{2}\right)-0{,}5\right|$;

14**) $y=\left|-\sqrt{3-|x|}+1\right|+5$;

15**) $y=\left|\sqrt{2|x|+2}-2\right|-4$;

16**) $y=\left|\frac{4}{3-|x|}-1\right|-2$.

4.2. Поскольку наиболее неприятным является преобразование сдвига и растяжения (сжатия) графиков, в аналитическом выражении которых коэффициент при *x* отличен от единицы, то для начала разберем задание № 8* и №№ 7*, 10*, причем задание № 8* оформим полностью с построением графиков, а остальные два – без построения графиков.

Построим график функции $y=-2\cdot\sqrt{3-3x}+2$ (8*). Преобразуем заданную функцию, приведем ее к виду, удобному для составления цепочки преобразований ее графика. Функция примет вид: $y=-1\cdot 2\cdot\sqrt{-1\cdot 3\cdot(x-1)}+2$. Таким образом, сразу видно количество преобразований: их шесть.

Выполним эти преобразования и построим график функции, сохраняя следы:

$y_0=\sqrt{x}$,

$y_1 = \sqrt{x-1}$ – сдвиг на единицу вправо, получим (рис. 1):

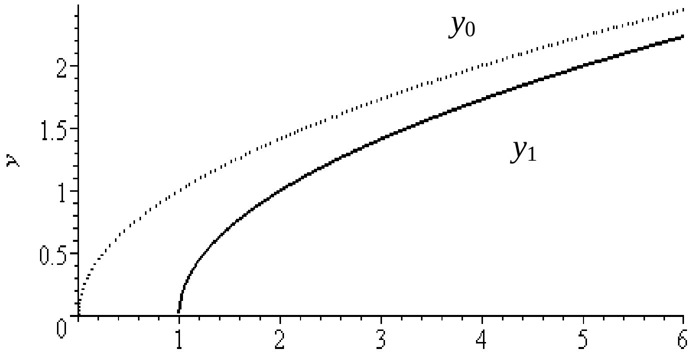


Рис. 1. Графики функций y_0 и y_1.

$y_2 = \sqrt{3(x-1)}$ – сжатие к прямой $x=1$ в 3 раза,

$y_3 = \sqrt{-3(x-1)}$ – симметрия относительно прямой $x=1$, получим (рис. 2):

$y_4 = 2 \cdot y_3$ – растяжение от оси абсцисс в 2 раза,

$y_5 = -y_5$ – симметрия относительно оси абсцисс, $y_6 = y_5 + 2$ – сдвиг вверх на 2.

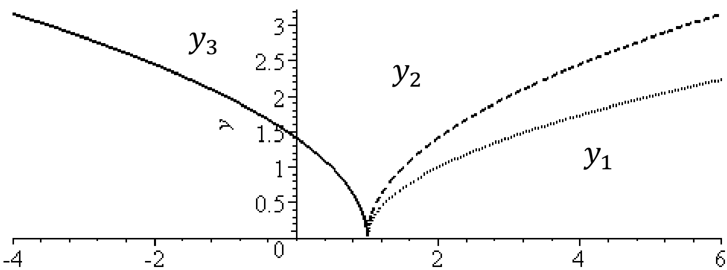


Рис. 2. Графики функций y_1, y_2 и y_3.

В результате получим окончательный график (рис. 3).

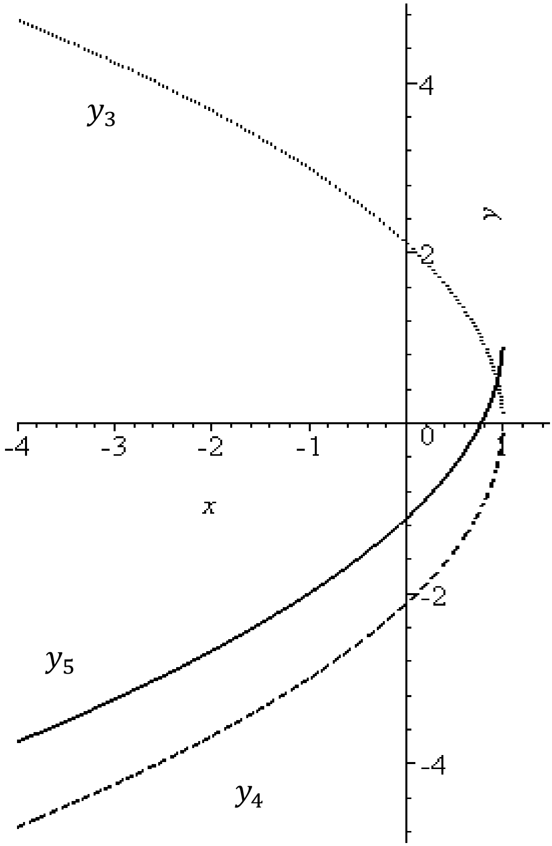


Рис. 3. Графики функций y_3, y_4 и y_5.

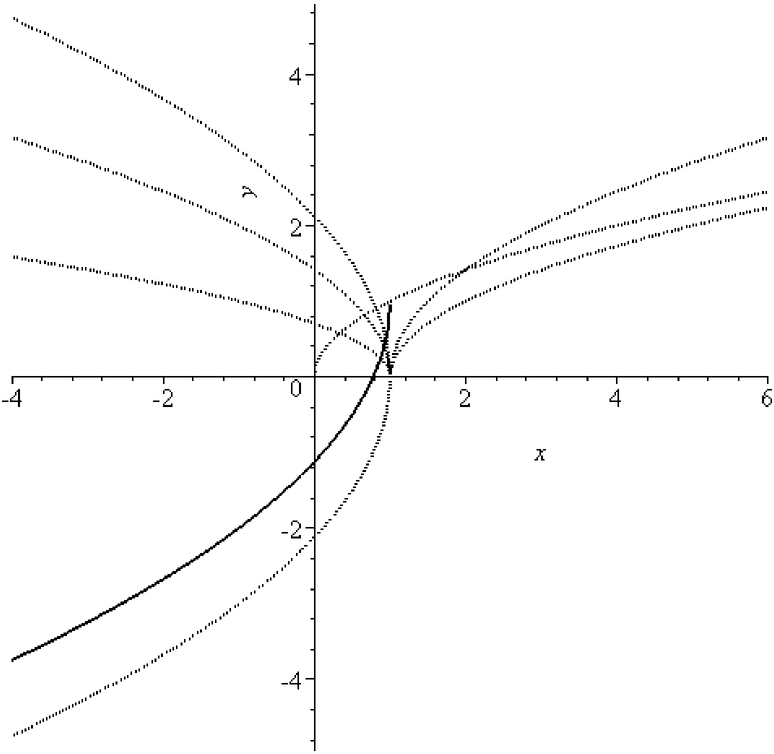


Рис. 4. График функции $f(x)$ (со всеми следами).

4.3. Теперь разберем выполнение задания № 7* для функции $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2$. Оно связано с преобразованием графика тригонометрической функции, что всегда проблематично, но, в то же время, часто бывает необходимым при решении задач, связанных с гармоническими или электромагнитными колебаниями из курса физики.

Сначала приведем функцию к стандартному, то есть к наиболее удобному для выполнения преобразований графиков, виду. Для этого сначала заменим коэффициент

0,5 на обыкновенную дробь и вынесем коэффициент –1 в аргументе. Получим: $y = \frac{1}{2}\cos\left(-1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 2.$

Тогда цепочка преобразований будет состоять из четырех шагов, и их последовательность будет иметь следующий вид:

$y_0 = \cos x,$

$y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ – сдвиг на $\frac{\pi}{3}$ вправо,

$y_2 = \cos\left(-1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ – симметрия относительно прямой $x = \frac{\pi}{3}$,

$y_3 = \frac{1}{2} y_2$ – сжатие к оси абсцисс в 2 раза,

$y_4 = y_3 + 1$ – сдвиг на 1 вверх.

4.4. При работе с заданиями №№ 3, 10*,16** есть две проблемы. Первая заключается в преобразовании самого аналитического выражения к стандартному виду, а вторая – в том, что гипербола (в отличие от предыдущих графиков) имеет разрыв и асимптоты.

Приведем функцию (задание № 10*) $y = \frac{4}{4-2x} + 1$ к стандартному виду, получим: $y = \frac{-2}{x-2} + 1$. Графиком является гипербола вида $y = \frac{-2}{x}$, которая с помощью параллельного переноса на вектор с координатами $\{2; 1\}$ перейдет в график исходной функции.

Что касается асимптот, то в этом смысле более интересным выглядит работа с заданием № 11*.

4.5. Построим график функции (задание № 11*)

$$y = \left|3 - 2\log_{0,5}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)\right| - 2.$$

Преобразуем заданную функцию, приведем ее к виду, удобному для составления цепочки преобразований ее графика. Функция примет вид:

$$y = \left|2\log_{0,5}\left(-1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\right)-3\right|-2.$$

Таким образом, сразу видно количество преобразований: их семь.

Выполним эти преобразования и построим график функции, сохраняя следы:

$y_0 = \log_{0,5} x$,

$y_1 = \log_{0,5}(x-1)$ – сдвиг на 1 вправо,

$y_2 = \log_{0,5}\left(\dfrac{1}{2}(x-1)\right)$ – растяжение от прямой $x=1$ в 2 раза,

$y_3 = \log_{0,5}\left(-\dfrac{1}{2}(x-1)\right)$ – симметрия относительно прямой $x=1$,

$y_4 = 2\cdot y_3$ – растяжение от оси абсцисс в 2 раза,

$y_5 = y_4 - 3$ – вниз на 3,

$y_6 = \left|y_5\right|$ – преобразование 4_1, то есть та часть графика, которая расположена выше оси абсцисс, сохраняется, а та, которая ниже, – симметрично отображается относительно оси абсцисс,

$y_7 = y_6 - 2$ – сдвиг вниз на 2.

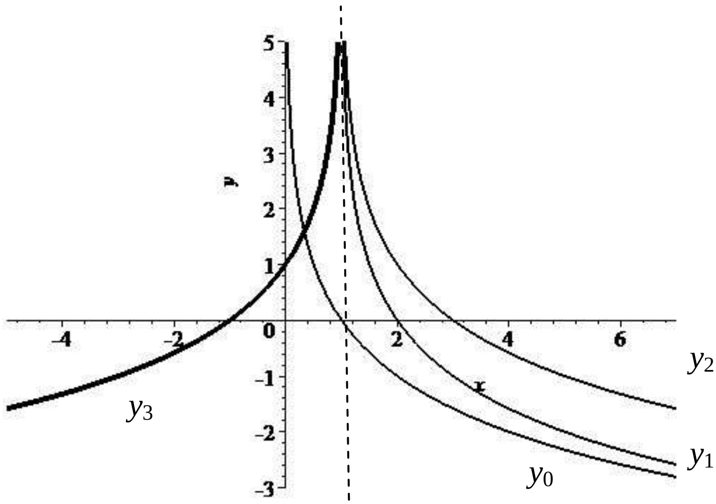


Рис. 5.Графики y_0, y_1, y_2 и y_3.

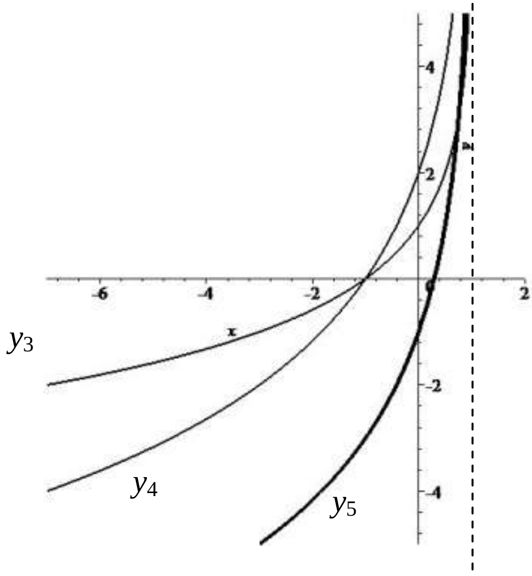


Рис. 6. Графики y_3, y_4, и y_5.

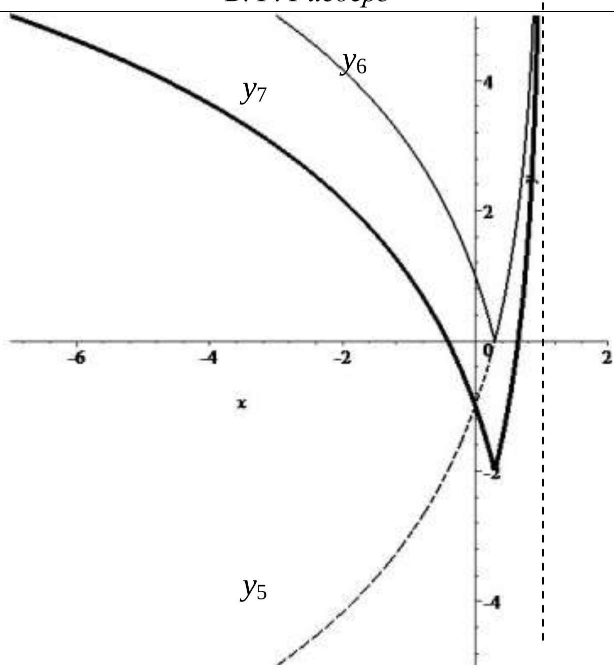


Рис. 7. Графики y_5, y_6, и y_7.

4.6. Следует отметить, что задания с № 12 по № 16 очень сложные, так как преобразование 4_2 относится к наиболее сложным из всех, представленных в первой главе, поэтому эти задания следует разобрать особо, рассмотрев два способа решения.

1 способ ** В таблице основных преобразований нет преобразования $f(|x| \pm a)$. Поэтому модуль в записи функции необходимо раскрыть на основании определения. Например, в задании 14** после преобразований графика функции $y_0 = \sqrt{x}$ и $y_1 = \sqrt{|x|}$, используя определение модуля, выполним преобразование $y_2 = \sqrt{|x| - 3}$:

$\sqrt{|x|-3}=\begin{cases}\sqrt{x-3} \text{ при } x\ge 0,\\ \sqrt{-(x+3)} \text{ при } x<0\end{cases}$. После этого необходимо построить каждый из полученных кусков в одной и той же системе координат и только потом перейти к остальным шагам алгоритма, описанного в главе 3.

Если пользоваться этим способом, то последовательность примеров (12–16) менять нельзя, поскольку каждый из них содержит элемент из предыдущего примера.

4.7. Рассмотрим решение задания № 14** подробно, то есть построим график функции $y=\left|-\sqrt{3-|x|}+1\right|+5$, сохраняя следы.

__**1 способ**__

1) Преобразуем заданную функцию, приведем ее к виду, удобному для составления цепочки преобразований ее графика: $y=\left|-\sqrt{-(|x|-3)}+1\right|+5$.

2) Составим цепочку преобразований графика:

$y_0=\sqrt{x}$

$y_1=\sqrt{|x|}$ – преобразование 4_2, то есть часть графика справа от оси ординат сохраняется, а та часть, которая расположена слева от оси, заменяется на симметричную правой части графика,

$y_2=\sqrt{|x|-3}$ – отсутствует среди табличных преобразований,

$y_3=\sqrt{-(|x|-3)}$ – отсутствует среди табличных преобразований,

$y_4 = -y_3$ – отображение симметрии относительно оси абсцисс;

$y_5 = y_4 + 1$ – сдвиг вверх на 1;

$y_6 = \left| y_5 \right|$ – отображение 4_1 из таблицы основных преобразований;

$y_7 = y_6 + 5$ – сдвиг вверх на 5.

3) Построение графиков.

Графики функций $y_0 = \sqrt{x}$ и $y_1 = \sqrt{|x|}$ знакомы по таблице основных преобразований графиков функций. После построения графика $y_1 = \sqrt{|x|}$ слева и справа от оси ординат имеем симметричные ветви параболы $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$ (рис. 8).

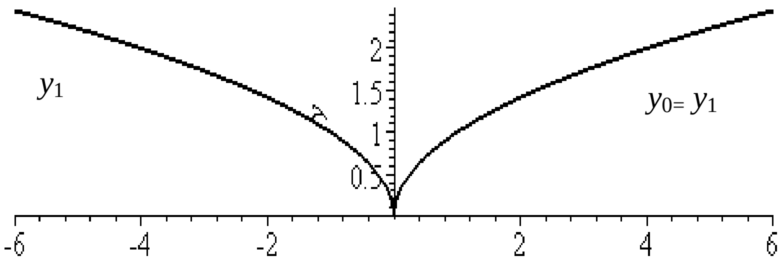


Рис.8.

Следующее преобразование $y_2 = \sqrt{|x| - 3}$ уже было разобрано чуть выше, поэтому можем построить график функции $y_2 = \sqrt{|x| - 3}$, которую приводим к виду $y_2 = \begin{cases} \sqrt{x-3} \text{ при } x \geq 0, \\ \sqrt{-(x+3)} \text{ при } x < 0. \end{cases}$ Таким образом, правая ветвь сдвигается вправо на 3, а левая – влево на 3 (смотри рисунок 2, где изображены графики $y_2 = \sqrt{|x|-3}$ и $y_3 = \sqrt{-(|x|-3)}$).

Чтобы понять построение графика функции $y_3 = \sqrt{-(|x|-3)}$, снова воспользуемся определением модуля. Зная, что по определению

$$\sqrt{-(|x|-3)} = \begin{cases} \sqrt{-(x-3)} \text{ при } x \geq 0, \\ \sqrt{x+3} \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

получим $y_3 = \begin{cases} \sqrt{-(x-3)} \text{ при } x \geq 0, \\ \sqrt{x+3} \text{ при } x < 0. \end{cases}$ Эта запись означает следующее: правая ветвь графика, полученного в результате предыдущего преобразования, отображается симметрично относительно прямой $x=3$, а левая – симметрично относительно прямой $x=-3$.

В результате получаются две пересекающиеся ветви параболы, которые в совокупности не являются графиком функции, так как для всех $x \in [-3; 3]$ имеем сразу два значения для *y*. Это происходит из-за того, что мы забыли об области определения функции $y_3 = \sqrt{-(|x|-3)}$. Если найти ее, то получим: $x \in [-3; 3]$, то есть на самом деле нас на этом шаге интересует только нижняя относительно точки пересечения часть графика, а то, что расположено выше этой точки, к графику нашей функции не относится (рис. 9).

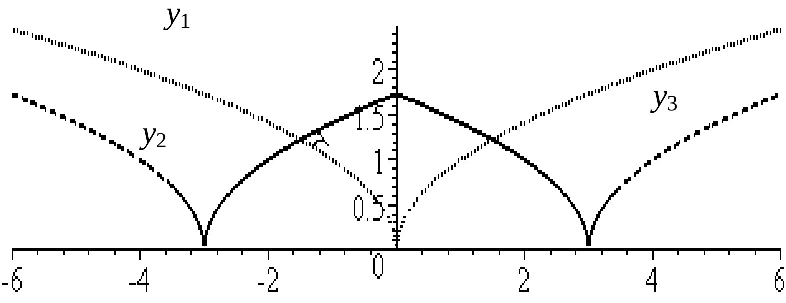


Рис. 9.

Остальные 4 шага: $y_4 = -y_3$, $y_5 = y_4 + 1$, $y_6 = \left| y_5 \right|$ и $y_7 = y_6 + 5$ производятся в соответствии с общими правилами, указанными в 1, 4 и 5 главах.

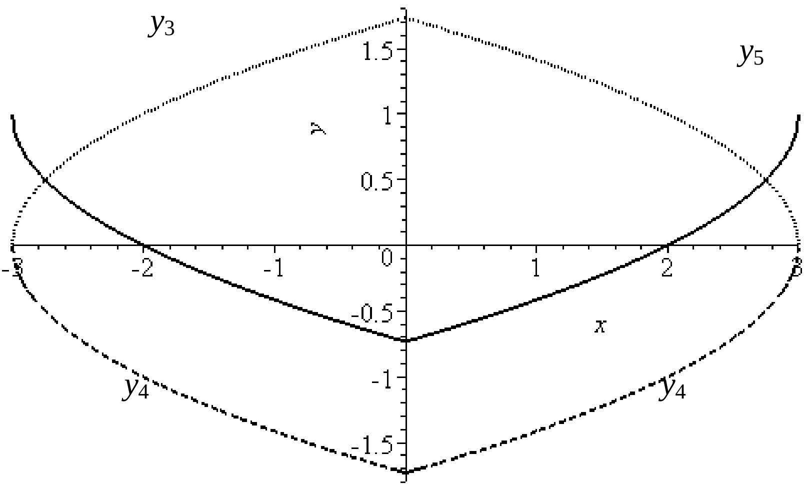


Рис. 10. Графики функций y_3, y_4 и y_5.

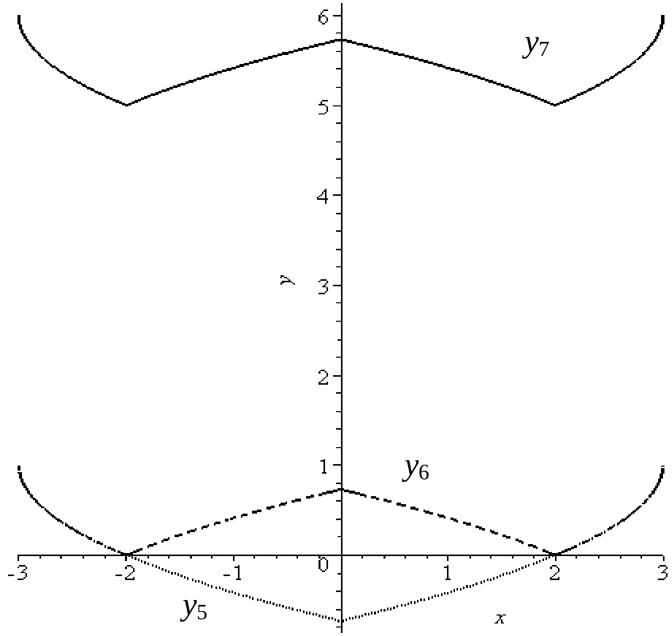


Рис. 11. Графики функций y_5, y_6 и y_7.

Этот способ можно немного упростить, если сначала использовать алгебраическое свойство модуля: $|-a| = |a|$, тогда исходную функцию можно записать немного проще: $y = \left|\sqrt{-(|x|-3)} - 1\right| + 5$. В результате мы экономим одно преобразование.

<u>2 способ</u>

Он значительно проще. В нем используется прием, который можно разбить на два шага:

1) сначала построить цепочку преобразований для графика функции, из записи которой убран модуль у аргумента;

2) выполнить над полученным графиком преобразование 4_2 из таблицы основных преобразований.

Этот прием значительно упрощает алгоритм построения графика функции, делает его намного понятнее. Для большего эффекта его стоит рассмотреть после решения всех пяти примеров (12–16). Однако проблема заключается в том, что по идее (в классе с углубленным изучением математики) сначала следует доказать возможность смены порядка действий, дающую возможность поставить преобразование 4_2 из таблицы основных преобразований на последнее место. Тогда построить цепочку остальных преобразований в этих примерах без преобразования 4_2 не представляет особого труда.

4.8. Попробуем подробно разобрать и описать аналогичные задания №№ 13** и 15**.

13**) $y = \left|\sin\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\right|$.

Сначала построим цепочку для функции

$$y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\right|,$$

а уже затем перейдем к данной функции.

$y_0 = \sin x$ – синусоида,
$y_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ – сдвиг вправо на $\frac{\pi}{2}$,
$y_2 = y_1 - 0{,}5$ – сдвиг вниз на 0,5,
$y_3 = |y_2|$ – преобразование 4_1,
$y_4 = y_3(|x|)$ – преобразование 4_2.

15**) $y = \left|\sqrt{2|x| + 2} - 2\right| - 4$.

4.9. Сначала преобразуем функцию к виду

$$y = \left|\sqrt{2(|x| + 1)} - 2\right| - 4,$$

затем построим цепочку для функции

$$y = \left|\sqrt{2(x+1)} - 2\right| - 4,$$

а уже потом перейдем к данной функции.

$y_0 = \sqrt{x}$ – график корня,

$y_1 = \sqrt{x+1}$ – сдвиг влево на 1,

$y_2 = \sqrt{2(x+1)}$ – сжатие к прямой $x = -1$ в 2 раза,

$y_3 = y_2 - 2$ – вниз на 2,

$y_4 = |y_3|$ – преобразование 4_1,

$y_5 = y_4(|x|)$ – преобразование 4_2.

4.10. Что касается классов, в которых изучение математики идет на повышенном уровне, то ничего доказывать не стоит, а сами эти задания можно показать только в ознакомительном порядке для тех, кто может их освоить. В этом случае включать их в контрольную работу не стоит или, в крайнем случае, включить их в качестве дополнительного задания на отдельную отметку.

Глава 5. Преобразование графиков различных функций с помощью композиции разных модулей

5.1. В этой главе мы рассмотрим все возможные преобразования, связанные с модулем. Два из них (4_1 и 4_2) уже были представлены в главах 1, 2. В этой главе мы рассмотрим новое преобразование $|y| = f(x)$, а также все различные комбинации преобразований с модулями.

Преобразование модуля аргумента (4_2), как уже говорилось, представляет большую трудность для учащихся. Новое преобразование (4_3) обычно тоже довольно сложно воспринимается ими. Поэтому перед рассмотрением этой главы необходимо еще раз повторить определение модуля, причем рассмотреть его геометрический аспект, то есть связь между самим определением модуля числа и преобразованиями симметрии произвольной точки (в различных координатных четвертях) относительно осей координат.

5.2. Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

Рассмотрим под этим углом сначала основные преобразования с использованием модуля (из таблицы), а затем новые:

1) $y = |f(x)|$ – часть графика, расположенная выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, отображается симметрично относительно нее;

2*) $y = f(|x|)$ – часть графика, расположенная правее оси ординат (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная левее оси ординат, ***заменяется*** на симметричную правой части.

3*) $|y| = f(x)$ – часть графика, расположенная выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, ***заменяется*** на симметричную верхней части; это преобразование как самостоятельное можно обозначить 4_3;

4*) $y = |f(|x|)|$ – композиция преобразований 4_1 и 4_2, она является коммутативной, то есть преобразования 4_1 и 4_2 можно поменять местами и выполнять в обратном порядке;

5*) $|y| = |f(x)|$ – композиция преобразований 4_1 и 4_3; построение основывается на свойстве модулей: $|y| = |f(x)| \Leftrightarrow \quad y = \left[\begin{array}{l} f(x), \\ -f(x) \end{array}\right.$; в результате график функции

$y = f(x)$ сохраняется и к нему добавляется график функции $y = -f(x)$;

6**) $|y| = f(|x|)$ – композиция преобразований 4_2 и 4_3: сначала надо построить график функции $y = f(|x|)$ (смотри выше), а затем часть этого графика, расположенную выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохранить, а ту часть, которая расположена ниже оси абсцисс, ***заменить*** на симметричную той части графика функции $y = f(|x|)$, которая была расположена выше оси абсцисс;

7**) $|y| = |f(|x|)|$ – композиция всех трех преобразований 4_1, 4_2 и 4_3: строится график функции $y = |f(|x|)|$ (смотри выше), а затем ту часть этого графика, которая расположена выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохранить, а ту часть, которая расположена ниже оси абсцисс, ***заменить*** на симметричную той части графика $|y| = |f(|x|)|$, которая была расположена выше оси абсцисс.

Необходимо, чтобы ученики понимали, почему получается именно тот или иной результат. Для этого во всех рассматриваемых преобразованиях перед формулировкой результата следует на основании определения модуля и его геометрического смысла сначала конструктивно «получить» этот результат, и только после этого сформулировать его в более грамотном, коротком и удобном виде – в виде алгоритма.

Следует также обратить особое внимание учащихся на то, что в результате преобразования $|y| = f(x)$, которое встречается в преобразованиях 3, 5, 6 и 7, график, который в результате получается, не является графиком функции, поскольку каждому значению аргумента x соответствует сразу два значения переменной *y*. А по определению функции каждому значению аргумента *x* не может соответствовать более одного значения функции *y*. Поэтому мы получаем график уравнения, а не функции. Это происходит из-за того, что при преобразовании $|y| = f(x)$ мы получаем сразу две точки, симметричные относительно оси абсцисс.

Мы не станем в каждом задании подробно описывать суть преобразований 4_1, 4_2 и 4_3, но иногда будем это делать для лучшего их запоминания.

5.3. После рассмотрения всех этих преобразований в общем виде необходимо рассмотреть каждое из них на конкретных различных функциях. Для этого предлагаем функции из программного материала разных классов: одна – дробная рациональная, одна – квадратичная, две – тригонометрические, одна – логарифмическая и одна – показательная:

1) $y = \dfrac{3x-6}{x-3}$; 2) $y = x^2 - 6x + 6$; 3) $y = \sin x$;

4) $y = \operatorname{tg} x$; 5) $y = \log_2 x - 1$; 6) $y = 2^x - 2$.

Функции (1) и (2) включены в программный материал основной школы. Они для учащихся 10 класса более знакомы и кажутся более простыми. На самом деле функция (1) при преобразованиях графиков будет самой сложной, так как в отличие от остальных предлагаемых функций (кроме $y = \operatorname{tg} x$) ее график имеет две асимптоты и точку разрыва. В то же время наименее знакомые учащимся графики показательной и логарифмической функций окажутся самыми простыми и удобными в преобразованиях, поскольку обладают такими важными свойствами, как непрерывность и монотонность.

При этом можно поступить двояко. Первый вариант (более удобный): рассматривать преобразования по одному и «прогонять» по каждому преобразованию все перечисленные функции по очереди. Можно для этого взять большее количество функций, но тогда курс, скорее всего, будет искусственно затянут и в результате потеряет динамичность. Можно наоборот уменьшить количество функций, но тогда у учащихся рассматриваемый на занятии материал не будет закреплен в достаточной мере.

Второй вариант заключается в том, что можно взять по отдельности каждую функцию и «прогонять» ее через все преобразования. В этом случае учащиеся в силу их естественной лени будут строить все графики в одной системе координат. Методически это неправильно, так как при этом, во-первых, все графики смешаются (результаты будут невидны), а во-вторых (что еще хуже), каждое из преобразований естественным образом потеряется, не сохранится в памяти ученика.

5.4. Приведем пример преобразования № 6** из этой главы, то есть $|y| = f(|x|)$, для функции № 1, то есть $y = \frac{3x-6}{x-3}$. График строить не будем, только опишем последовательность преобразований.

Преобразуем функцию к удобному для преобразований виду: $y = \frac{3}{x-3} + 3$. Тогда таблица преобразований будет выглядеть следующим образом: $y_0 = \frac{3}{x}$, $y_1 = \frac{3}{x-3}$, $y_2 = \frac{3}{x-3} + 3$.

Понятно, что эти два преобразования можно объединить в одно: параллельный перенос на вектор с координатами $\{3; 3\}$.

Над полученным графиком функции $y_2 = \frac{3}{x-3} + 3$ остается только выполнить последовательно преобразования 4_2 и 4_3 или преобразование, объединяющее их в одно преобразование $|y| = f(|x|)$, используя описание преобразования № 6 из главы 5.

Добавим несколько замечаний об асимптотах.

Во-первых, асимптоты следует выполнять либо пунктирными, либо очень тонкими сплошными линиями.

Во-вторых, при выполнении преобразований, связанных с симметрией, асимптоты, к которым приближаются отображаемые ветви гиперболы (графиков показательной, логарифмической или любой другой функции, имеющих асимптоты), тоже симметрично отображаются относительно осей симметрии.

В нашем примере при симметрии относительно оси абсцисс горизонтальная асимптота $y = 3$ отобразится на асимптоту $y = -3$, а при симметрии относительно оси ординат вертикальная асимптота $x = 3$ отобразится на асимптоту $x = -3$. Понятно, что в нашей системе координат наряду со старыми должны появиться эти новые асимптоты. Чтобы рисунки (чертежи) были читаемы, необходимо графики следов выполнять тонкими пунктирными и/или сплошными линиями.

5.5. Для самостоятельных работ, контрольной работы по теме и для домашней работы можно предложить еще несколько функций, аналогичных приведенным выше. При этом следует учесть, что на построение графиков функций у учащихся обычно затрачивается много времени, поэтому при проведении самостоятельных (контрольных) работ по этой теме лучше давать исходные графики в готовом виде. Тогда за отведенное для самостоятельной или контрольной работы время они смогут выполнить большее количество преобразований графиков.

Например, рассмотрим возможное построение двух самостоятельных работ и одной контрольной работы по рассматриваемой в этой главе теме для учащихся 10 – 11-х классов.

Самостоятельная работа №1

1. На готовых чертежах даны графики функций:

1) $f(x)=\dfrac{4}{x-2}-1$;

2) $f(x)=\log_2(x+2)-1$;

3) $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

В этих же системах координат постройте для этих функций графики вида $y=|f(x)|$.

2. На готовых чертежах даны графики функций:

1) $f(x)=(2-x)^2-4$;

2) $f(x)=0{,}5\cdot 2^{x+1}-1$;

3) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

В этих же системах координат постройте для этих функций графики вида $y=f(|x|)$.

3. Построить график вида: $y=|f(|x|)|$ для функции $f(x)=-2\sqrt{x-4}+2$ и определить по нему, сколько раз график этой функции пересекает прямую $y=1$.

<u>Самостоятельная работа №2</u>

1. Постройте в одной системе координат график функции $f(x)$ и график уравнения $|y| = f(|x|)$ для функции $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$.

2. Постройте в одной системе координат график функции $f(x)$ и график уравнения $|y| = |f(|x|)|$ для функции $f(x)=3\cos x-2$.

<u>Контрольная работа</u>

1. Постройте график функции $f(x)=\frac{1}{2}\log_{0,5}(x+2)$ и уравнения $|y|=|f(x)|$ в одной системе координат.
2. Построить график уравнения $|y|=|f(|x|)|$, где $f(x)=\frac{2x-4}{x-4}$ (с описанием построения).

Подбор функций для самостоятельных и контрольных работ можно варьировать в зависимости от того, в каких параллелях проводится данный курс.

Список литературы

1. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала математического анализа» для 10-11 классов. – М.: ДРОФА, 2010. – 48 с.

2. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ для 10 класса – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2012. – 336 с.

3. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ для 11 класса – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2012. – 288 с.

4. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1992. – 272 с.

5. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

6. *Рисберг В. Г.* Курсы по выбору. – Пермь: ПКИПКРО, 2008. – 44 с.

7. *Рисберг В. Г., Черникова И. Ю, Шабрыкина Н. С.* Прикладные вопросы математики: учеб.-метод. пособие / Рисберг В. Г., Черникова И.Ю, Шабрыкина Н. С. – Пермь: Книжный формат, 2009. – 110 с.

8. Материалы по подготовке к ЕГЭ по математике за 2010-2015 годы [Электронный ресурс] / Открытый банк заданий ЕГЭ – Режим доступа: http://www.fipi.ru, свободный. – Загл. с экрана.

Приложение №1

Основные преобразования графиков функций

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

С помощью какого преобразования можно из графика функции $y = f(x)$ получить графики следующих функций:

<u>Сдвиги вдоль осей координат</u>:

1) $y = f(x-a)$; 2) $y = f(x+a)$; 3) $y = f(x)+b$;
4) $y = f(x)-b$; 5) $y = f(x-a)+b$.

<u>Сжатия (растяжения) вдоль осей координат</u>:

1) $y = f(kx)$; 2) $y = f\left(\frac{k}{x}\right)$;

3) $y = k \cdot f(x)$; 4) $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$.

<u>Симметрии</u>:

1) $y = -f(x)$ – симметрия относительно оси абсцисс;
2) $y = f(-x)$ – симметрия относительно оси ординат;
3) $y = -f(-x)$ – симметрия относительно начала координат.

<u>Модули</u>:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = f(|x|)$.

Приложение №2

Планирование и выполнение последовательности преобразований графиков функций

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

Записать цепочку преобразований, с помощью которой можно из этого графика получить график функции:

1) $y = f(x-4)+1$,

2) $y = -2f(x+2)+6$,

3) $y = f(3x)$

4) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)-7$;

5*) $y = f(2x-8)$;

6*) $y = f(4-x)-2$,

7*) $y = -2f\left(\frac{x}{4}\right)-3$;

8) $y = -1{,}5f\left(1-\frac{x}{3}\right)-4$,

9*) $y = \frac{2}{5}f\left(-\frac{1}{3}-\frac{x}{6}\right)+2$,

10) $y = 4\left|f(4x+6)-2\right|-3$.

Приложение №3

Выполнение последовательности преобразований графиков функций и построение графиков на базе графиков основных функций

Для каждой функции: записать ее в виде, удобном для преобразования графика, составить цепочку преобразований графика и построить график функции, оставляя следы.

1) $y = (x-5)^2 - 2;$

2) $y = -2\sqrt{x-3} + 1;$

3) $y = \frac{6}{x+2} - 3;$

4) $y = 2\sin\frac{x}{2} - 1;$

5) $y = \log_2(2x) + 1;$

6*) $y = (2x-6)^2;$

7*) $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2;$

8*) $y = -2 \cdot \sqrt{3-3x} + 2;$

9*) $y = -tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 1;$

10*) $y = \frac{4}{4-2x} + 1;$

11*) $y = \left|3 - \frac{1}{2}\log_{0,5}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)\right| - 2;$

12**) $y = -1{,}5 \cdot (3 - |4-2x|)^2 + 3;$

13**) $y = \left|\sin\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\right|;$

14**) $y = \left|-\sqrt{3-|x|} + 1\right| + 5;$

15**) $y = \left|\sqrt{2|x|+2} - 2\right| - 4;$

16**) $y = \left|\frac{4}{3-|x|} - 1\right| - 2.$

Приложение №4

Преобразование графиков различных функций с помощью композиции разных модулей

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

Основные преобразования с использованием модуля:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = f(|x|)$;

3) $|y| = f(x)$; 4) $y = |f(|x|)|$;

5) $|y| = |f(x)|$; 6) $|y| = f(|x|)$;

7) $|y| = |f(|x|)|$.

Выполните эти преобразования на функциях:

1) $y = \dfrac{4}{x-2} - 1$; 2) $y = \log_2 x - 1$; 3) $y = \sin x$;

4) $y = \log_{0,5} x - 2$; 5) $y = \dfrac{1}{2}\cos x$; 6) $y = 2^x - 2$;

7) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 8) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 1$; 9) $y = -\operatorname{tg} x$;

10) $y = (3-x)^2 - 4$; 11) $y = \dfrac{3x-6}{x-3}$;

12) $y = x^2 - 6x + 6$; 13) $y = 2^{x-2} - 2$;

14) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 15) $y = -x^2 - 4x + 2$;

16) $y = -2\sqrt{x+4} + 2$; 17) $y = \log_2(x+2) - 1$;

18) $y = \dfrac{-2x-12}{x+4}$.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Владислав Григорьевич Рисберг

Использование преобразований графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модуль (Часть I)

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 3.12. 2015. Формат 60х90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 3,5. Тираж 300 экз. Заказ № 97296
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86