Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

В. Г. Рисберг
И. Ю. Черникова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ (ЧАСТЬ II)

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.85
ББК 22.1я721
И 89

Рецензенты:
А. П. Иванов (канд. физ.-мат. наук, профессор НИУ ВШЭ)
И. Н. Глинкина (учитель Лицея № 1 г. Перми)

Рисберг В. Г., Черникова И. Ю.

И 89 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ (ЧАСТЬ II): Учебное пособие / ФГБОУ ВПО ПНИПУ/ В. Г. Рисберг, И. Ю. Черникова; Издательство «Пушка» – Пермь: 2015. – 66 с.

Рассмотрены вопросы математики по теории элементарных функций. Приводятся многоуровневые задания по построению цепочек преобразований графиков функций и примеры построения самих графиков. Рассматривается использование преобразований графиков при решении задач из курса физики. Даны индивидуальные и групповые задания повышенного уровня сложности.

Предназначено для слушателей курсов повышения квалификации по направлению подготовки: методика обучения математике и физике; специалистов системы общего образования, студентов педагогических вузов, ориентированных на работу в классах с углубленным изучением математики, физики, информатики.

УДК 372.85

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация интегрированной программы элективных курсов по подготовке одарённых школьников, ориентированных на продолжение образования по математическим, естественнонаучным и инженерным дисциплинам».

ISBN 978-5-98799-144-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данное учебное пособие является второй частью специального курса математики по использованию преобразований графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модуль. В первой части рассматриваются основные теоретические положения, касающиеся данной темы, приводятся примеры построения цепочек преобразований графиков функций и примеры построения самих графиков. Кроме того, разбирается большое количество заданий, непосредственно связанных с преобразованием графиков различных функций и с композицией разных модулей, рассматривается использование преобразований графиков при решении некоторых задач из курса физики.

Вторая часть посвящена построению графиков функций с модулем и использованию преобразований графиков и функционально-графического метода при решении заданий высокого уровня сложности из подготовительных и контрольно-измерительных материалов по математике для итоговой аттестации по программам основного и среднего общего образования, т.е. ОГЭ и ЕГЭ.

Весь курс представляет учебное пособие, которое призвано углубить и систематизировать те разрозненные знания по теме, которыми владеют на том или ином уровне ученики в школах, студенты и учителя математики.

Учителя математики могут использовать этот спецкурс при составлении предпрофильных и профильных курсов в классах физико-математического профиля, учащиеся классов с углубленным изучением математики, информатики и физики при итоговом повторении материала по математике и подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

В рамках этого курса рассматриваются основные преобразования графиков функций и приводятся примеры их использования при решении уравнений и неравенств, при построении графиков для функций, содержащих модули. В этом пособии приведены примеры использования данной темы при решении отдельных видов задач из курса физики и других дисциплин, в которых рассматриваются различные функциональные зависимости, изучаемые в рамках программ по алгебре 9-го класса и программы по алгебре и началам анализа в 10–11-х классах средней школы.

Всего в пособии семь глав. Первые пять глав рассмотрены в первой части.

Введение

Как уже говорилось в первой части данного пособия, учебники алгебры 7–9-х классов и учебники алгебры и начал анализа 10–11-х классов изобилуют заданиям, связанными с решением различных уравнений, неравенств и их систем, причем большинство этих заданий предполагает решение стандартным путем с использованием общепринятых алгоритмов. В то же время в курсе алгебры есть очень много заданий, связанных с решением уравнений, неравенств и их систем, которые можно выполнять с использованием преобразований графиков известных учащимся функций. Есть такие задания и в курсе физики средней школы.

Не обладая достаточными навыками в использовании преобразований графиков, ученики пытаются решить такие задания традиционными с точки зрения программы по алгебре способами, что значительно усложняет их решение и удлиняет сам процесс решения. Особенно большие проблемы возникают при построении графиков функций, содержащих модули.

Объем материала, представленного в курсе «Использование преобразований графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модули» вполне достаточный для овладения необходимыми приемами при решении заданий как из курса алгебры 7–11-х классов, так и заданий из курса физики, связанных с данной темой.

Что касается сложности заданий, то можно выделить три уровня: базовый, повышенный и высокий.

Задания, которые рекомендуется отнести к повышенному и углубленному уровням сложности, как и в первой части курса, отмечены знаками «*» или «**» соответственно.

В каждой главе приведено достаточное количество заданий, из которых учителю нетрудно выбрать и те, которые следует разобрать в классе, и те, которые можно использовать для самостоятельных и контрольных работ, и для домашнего задания. В главе 7 (смотри ниже) мы приведем примеры такого разбиения. Думаем, что учителям будет нетрудно произвести аналогичное разбиение и в остальных главах курса.

Понятно, что такое разбиение заданий по уровням весьма условно; учитель сам может определять, какое задание, на его взгляд, целесообразно рассматривать в каком классе. Условным является и количество самостоятельных и контрольных работ, отмеченное в тематическом планировании.

В какой период обучения наиболее целесообразно проводить этот курс, описаны в первой части пособия. Наиболее удачным будет вариант, когда тема «Показательная и логарифмическая функции» изучается в десятом классе. Тогда рассматриваемый курс можно проводить во второй половине учебного года после прохождения данной темы. Это с одной стороны расширит содержательные рамки материала курса, поскольку круг рассматриваемых функций станет значительно более обширным, а с другой стороны даст достаточно времени для закрепления и использования материала курса в течение оставшегося времени обучения в школе.

Материал курса можно использовать как в классах, где математика изучается на базовом уровне, так и в классах, где математика изучается на повышенном уровне или на углубленном уровне. В последнем случае теоретический материал можно расширить за счет рассмотрения симметрий относительно произвольной точки, произвольной прямой, а в 10–11-х классах даже относительно координатной плоскости, произвольной плоскости, а также некоторых других преобразований. Если проводить данный курс в классе физико-математического профиля, то его расширения можно добиться за счет увеличения задач с физическим содержанием.

Важную положительную роль может впоследствии сыграть курс при итоговом повторении материала и подготовке к итоговой аттестации за курс основной школы (ОГЭ), так и за курс полной средней школы (ЕГЭ), на которых в последние годы, как уже было сказано, функционально-графическая составляющая является одной из приоритетных для учащихся, претендующих на высокие баллы. Задания, рассматриваемые в главе 7, напрямую направлены на подготовку к решению наиболее сложных заданий, которые встречаются во всех вариантах в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ в виде задания № 20 (С5).

Следует отметить и роль данного курса в выборе дальнейшей профессии старшеклассников. Он может оказать неоценимую помощь в формировании будущего ученого, высококвалифицированного специалиста по межпредметным вопросам науки и техники, инженера-исследователя. Обладая признаками одаренности в сфере математического и естественнонаучного образования, старшеклассник, освоивший данный курс, сможет самостоятельно или с помощью тьютора, консультанта сформировать структуру проектируемой профессии.

Структура курса (Часть II)

Вторая часть пособия состоит из двух глав:

- Глава 6. Построение графиков функций с модулем.
- Глава 7. Использование преобразований графиков при решении сложных заданий из контрольно-измерительных материалов и ЕГЭ.

В соответствии с построением курса его тематическое планирование должно выглядеть приблизительно следующим образом.

Тематическое планирование

№ темы	Название темы	Кол-во часов	Виды контроля
5.	Построение графиков функций с модулем (глава 6).	10	Самостоятельная работа, домашняя самостоятельная работа
6.	Использование преобразований графиков при решении задач с физическим содержанием и сложных заданий из контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ по математике (глава 7).	18	Две самостоятельные работы, контрольная работа
	Всего	44	

Весь курс (обе части) рассчитан на различную продолжительность: от 28 до 44 часов, его первая часть – от 12 до 16 часов, а вторая часть – от 16 до 28 часов. Он содержит довольно большое количество различных упражнений, как чисто математического характера, так и заданий с физическим содержанием. Поэтому в зависимости от глубины рассмотрения каждой из его глав его можно использовать по-разному:

- в 9-м классе он может быть взят как предпрофильный курс и включать только материал основной школы из первой части и из главы 6 второй части;
- в 10–11-х классах его можно использовать как самостоятельный элективный курс для физико-математических классов, в которых преподавание математики ведется на повышенном уровне, включив в него материал нескольких или всех глав;
- в 10–11-х классах его можно использовать как часть более крупного элективного курса, где математика ведется на углубленном уровне.

При этом в классах, где математика изучается на повышенном уровне, физика – на базовом уровне, материал курса можно сократить за счет задач с физическим содержанием, которые есть в третьей главе и двух последних главах курса.

Учитель может самостоятельно сокращать или расширять материал каждой из его глав, расширить сам курс за счет дополнительных вопросов, продумать систему дополнительных упражнений для самостоятельных и контрольных работ для домашних работ с целью закрепления материала по рассматриваемой теме. Примерные варианты самостоятельных и контрольных работ находятся в седьмой главе данного пособия.

Весь дидактический материал курса можно для удобства распечатать на отдельных листах и раздать учащимся в виде приложения к курсу (смотри приложения к курсу в конце). Это, во-первых, сэкономит время на занятиях и, во-вторых, даст возможность решать дома самостоятельно те задания, которые будут выведены учителем за пределы классной работы.

Содержание курса

Повторение

Прежде чем перейти непосредственно к материалу второй части курса, напомним основные преобразования графиков, которые рассматривались в главах один и два первой части.

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$. Рассмотрим четыре основные группы преобразований графиков функций.

1. Сдвиги вдоль осей координат

1) $y = f(x-a)$ – сдвиг вдоль оси абсцисс вправо на *a* единиц, где $a > 0$;

2) $y = f(x+a)$ – сдвиг вдоль оси абсцисс влево на *a* единиц, где $a > 0$;

3) $y = f(x)+c$ – сдвиг вдоль оси ординат вверх на *c* единиц, где $c > 0$;

4) $y = f(x)-c$ – сдвиг вдоль оси ординат вниз на *c* единиц, где $c > 0$.

2. Сжатия (растяжения) вдоль осей координат

1) $y = f(kx)$ – сжатие к оси ординат в k раз, где $k > 1$;

2) $y = f\left(\dfrac{k}{x}\right)$ – растяжение от оси ординат в k раз, где $k > 1$;

3) $y = k \cdot f(x)$ – растяжение от оси абсцисс в k раз, где $k > 1$;

4) $y=\frac{1}{k}\cdot f(x)$ – сжатие к оси абсцисс в k раз, где $k>1$.

3. <u>Симметрии</u>

Какая функция получится, если над графиком функции $y=f(x)$ произвести следующее преобразование:

1) $y=-f(x)$ – симметрия относительно оси абсцисс;

2) $y=f(-x)$ – симметрия относительно оси ординат;

3) $y=-f(-x)$ – симметрия относительно начала координат.

4. <u>Модули</u>

1) $y=|f(x)|$ – часть графика, расположенная выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, отображается симметрично относительно нее; это преобразование обозначим 4_1;

2) $y=f(|x|)$ – часть графика, расположенная правее оси ординат (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная левее оси ординат, ***заменяется*** на симметричную правой части; это преобразование обозначим 4_2;

3) $|y|=f(x)$ – часть графика, расположенная выше оси абсцисс (включая точки на оси), сохраняется, а часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, ***заменяется*** на симметричную верхней части; это преобразование обозначим 4_3;

4) $y=\left|f(|x|)\right|$ – композиция преобразований 4_1 и 4_2, она является коммутативной;

5) $|y|=\left|f(x)\right|$ – композиция преобразований 4_1 и 4_3; в результате график функции $y=f(x)$ сохраняется и к нему добавляется график функции $y=-f(x)$;

6) $|y|=f(|x|)$ – композиция преобразований 4_2 и 4_3;

7) $|y|=\left|f(|x|)\right|$ – композиция всех трех преобразований 4_2, 4_1 и 4_3.

Глава 6. Построение графиков функций с модулем

6.1. В этой главе будем рассматривать построение графиков различных функций, содержащих внутри аналитического выражения, с помощью которого они заданы, один или несколько модулей. При этом будем избегать функций, графики которых можно построить теми способами, которые были описаны выше.

Перед тем, как перейти к построению графиков каких-либо сложных функций, рассмотрим преобразования графика функции $y=|x|$, а затем перейдем к построению графиков различных функций, содержащих модуль внутри аналитического выражения.

Поскольку в большинстве заданий этой части потребуется использование определения модуля, то сначала необходимо повторить его. Полное определение модуля выглядит следующим образом:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ } если \text{ } a>0, \\ -a, \text{ } если \text{ } a<0, \\ 0, \text{ } если \text{ } a=0. \end{cases}$$

Однако при решении заданий с модулем обычно используют определения, записанные в сокращенном виде:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases} \text{ или } |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ -a, \text{ если } a \leq 0 \end{cases},$$

а иногда и в виде:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a \leq 0 \end{cases}.$$

Отметим при этом, что все эти три вида записи имеют одинаковое право на существование, так как при $a = 0$ они совпадают.

Ниже приведен список всех базовых заданий этой главы. Мы специально приводим только по одной или двум однотипным функциям, поскольку придумать аналогичные функции не представляет учителю труда.

6.2. <u>Задание</u>. Постройте график функции:

1) $y = |x|$;

2) $y = |x-2|+1$;

3) $y = -|x-5|+2$;

4) $y = ||x+3|-1|-2$;

5) $y = -|-|3-x|+2|-1$;

6*) $y = |1-||-x-3|-2||-2$; выяснить, сколько корней имеет уравнение $y = a$ в зависимости от a.

7*) $y = |x+1|+|x-3|$;

8*) $y = |2-x|-|-4-x|$;

9*) $y = |x-4|-|-x-3|+|2-x|+2$;

10) $y = x|x-2| - 3$;

11) $y = 2x|3-x| - 2x - 4$;

12*) $y = \dfrac{|2x-3| - x}{x-1}$;

13*) $y = \dfrac{x+3}{|x+6| + x}$;

14*) $y = \left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$;

15*) $y = \left|\dfrac{2x-5}{x-3}\right|$;

16*) $y = \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi} \cdot x^2 - 4$;

17**) $y = \dfrac{|x-3| + |x+1|}{x-2}$;

18**) $y = \dfrac{|2-x| - |x+4|}{x+1}$;

19**) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 + x - 1} \cdot |x+1|$;

20**) $y = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 8x - 16}{(x^2 + 2x + 4) \cdot |x+2|}$;

21*) $y = \dfrac{2x}{|x-2|} \cdot \left(3 - \dfrac{6x-6}{x}\right)$;

22*) $y = \dfrac{|x^2 + 4x|}{x} \cdot \left(1 - \dfrac{x+1}{x+4}\right)$;

23**) $|y| = \dfrac{3}{|x| - 3} + 2$;

24**) $|y| = \dfrac{6}{|x|+2} - 1$;

25) $y = 2\log_3(x+1)$;

26) $y = -0{,}5^{x-3}$;

27) $y = \left|\log_{1,5}(x+2)+1\right| - 2$;

28) $y = \left|2^{x-2} - 3\right| - 1$;

29**) $y = \log_{0,5}(|x| - 2)$;

30**) $|y| = 2^{|x|-3} - 1$;

31) $y = \left|\sin\dfrac{x}{2} - 1\right| - 0{,}5$;

32) $y = \left|\cos\dfrac{x}{3} - 0{,}5\right| - 1$;

33*) $y = -\dfrac{2}{3}\left|\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;

34**) $y = 2 - 3\left|\cos 2|x|\right|$;

35*) $y = \left|\log_2|x|\right|$; при каких значениях a уравнение $y = a + 5$ имеет четыре корня?

36**) $y = \left|\dfrac{1}{3^{|x|+1}}\right|$; сколько корней имеет уравнение $y = a + 1$?

Поскольку задание, сформулированное перед перечнем приведенных выше функций, общее для всех этих функций, то оно имеет и общий алгоритм выполнения.

Алгоритм:

1) записать функцию в виде, удобном для преобразований;

2) составить цепочку преобразований графика функции;

3) построить график функции.

6.3. Поясним некоторые особенности перечисленных функций и особенности построения их графиков.

В заданиях №№ 2–5 рассматривается преобразование графика функции $y=|x|$. В заданиях №№ 1, 2, 3 целесообразно сначала построить графики по определению модуля, а затем в заданиях №№ 2, 3 – с помощью преобразований. Тогда ученики еще раз удостоверятся в однозначности выполнения заданий разными способами. Это очень важно для понимания внутренних взаимосвязей в математике вообще и при построении графиков в частности. Это важно также с точки зрения рациональности способа построения графиков с помощью преобразований.

Для лучшего понимания основной части данной главы и для использования рациональных приемов построения графиков функций следует повторить основные свойства модулей.

Свойства модулей

1) $|a|\geq 0$, 2) $|-a|=|a|$, 3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, 4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

6.4. Знание определений и основных свойств любого понятия дает возможность оперировать им со знанием дела. Использование выше перечисленных свойств модулей, например, делает решение отдельных заданий (№№ 5, 6, 8, 9, 17, 21 и некоторых других) несколько проще за счет уменьшения количества преобразований графиков функций.

Что касается таких заданий, как №№ 7, 8, 9, то для их выполнения предполагается знание дополнительного алгоритма с использованием интервалов знакопостоянства подмодульных выражений. Однако, прежде чем сформулировать и разобрать этот алгоритм, целесообразно одно из этих заданий (например, задание № 7) решить по определению модуля, и только после этого выполнить то же самое задание, используя этот алгоритм. После этого учащимся станет вполне понятна рациональность решение этого задания вторым способом. Используя в решении сформулированный алгоритм (по сравнению с решением по определению), мы в заданиях №№ 7, 8 рассматриваем три случая вместо четырех, а в задании № 9 – всего четыре случая вместо восьми и так далее.

В заданиях №№ 14, 15 следует сначала выделить целую часть в выражении под знаком модуля, то есть привести его к виду $\dfrac{k}{x-a}+b$, и только после этого, оттолкнувшись от графика функции $y=\dfrac{k}{x}$, то есть гиперболы, рассматривать цепочку соответствующих преобразований этого графика.

Задания №№ 6, 35, 36 предусматривают использование рассматриваемых преобразований графиков функций при решении заданий с параметрами. Такие задания часто встречаются в тестах, в том числе и в контрольно-измерительных материалах на ЕГЭ.

Задания с № 19 по № 22 предполагают предварительное выполнение тождественных преобразований аналитических выражений, с помощью которых заданы функции.

Чтобы перейти к выполнению заданий №№ 23, 24, необходимо сначала еще раз повторить определение модуля, напомнив, что в результате преобразования, связанного с выражением $|y|$, мы получаем график уравнения, а не функции, поскольку каждому значению переменной x на графике соответствует два значения переменной y.

Упражнения №№ 25–36 рассчитаны на 10–11-е классы, остальные упражнения можно рассматривать как в 9-х, так и в 10–11-х классах.

Задания этой главы приведены не в порядке их усложнения, а скомплектованы по типам заданий, хотя внутри каждого типа заданий принцип от простого к сложному по возможности сохраняется.

Кроме того, в этой главе разбиение всех заданий по уровням сложности (базовый, повышенный и углубленный) еще более условное, чем в остальных главах. Учитель сам может определять, какое задание, на его взгляд, целесообразно рассматривать в каком классе.

6.5. Рассмотрим особенности задания № 5*:

$$y=-\left|-|3-x|+2\right|-1.$$

Учитывая очень удобное свойство модуля $|-a|=|a|$, можно сменить знак выражения не только во внутреннем, но и во внешнем модуле. В результате аналитическое выражение, задающее функцию, станет значительно проще: $y=-\left||x-3|-2\right|-1$. Кроме того, мы сэкономим одно или даже два преобразования:

$y_0 = |x|$ – график функции модуля, который представляет собой прямой угол с вершиной в точке с координатами (0; 0) и сторонами, направленными вверх;

$y_1 = |x-3|$ – сдвиг на 3 вправо;

$y_2 = y_1 - 2$ – сдвиг на 2 вниз;

$y_3 = |y_2|$ – преобразование 4_1, которое (еще раз напомним) заключается в том, что верхняя часть графика сохраняется, а нижняя симметрично отображается относительно оси абсцисс;

$y_4 = -y_3$ – симметрия графика относительно оси абсцисс;

$y_5 = y_4 - 1$ – сдвиг на 1 вниз.

Примечание

В результате использования свойства $|-a| = |a|$ мы сократили количество преобразований графика с 6 до 5. Однако можно было первые два преобразования (y_1 и y_2) объединить в одно ($y_1 = |x - 3| - 2$), которое представляет собой параллельный перенос исходного графика на вектор с координатами $\{3; -2\}$. Тогда количество преобразований сократилось бы еще на одно.

6.6. Своеобразным является задание № 6*: построить график функции $y = \big|1 - \big||-x-3| - 2\big|\big| - 2$ и выяснить, сколько корней имеет уравнение $y = a$ в зависимости от a?

Разобьем это задание на три части.

1) Преобразуем выражение к виду, удобному для составления цепочки преобразований:

$$y = \Big|\big||x+3| - 2\big| - 1\Big| - 2.$$

2) Составим цепочку преобразований:

$y_0 = |x|$ – график функции модуля – прямой угол с вершиной в точке с координатами (0; 0) и сторонами, направленными вверх;

$y_1 = |x + 3| - 2$ – параллельный перенос на вектор с координатами $\{-3; -2\}$;

$y_2 = |y_1|$ – преобразование 4_1, нижняя часть графика симметрично отображается относительно оси абсцисс;

$y_3 = y_2 - 1$ – сдвиг на 1 вниз;

$y_4 = |y_3|$ – преобразование 4_1;

$y_5 = y_4 - 2$ – сдвиг на 2 вниз.

В результате этих преобразований график функции будет иметь форму ломаной линии с бесконечно продолженными конечными звеньями (рис. 1).

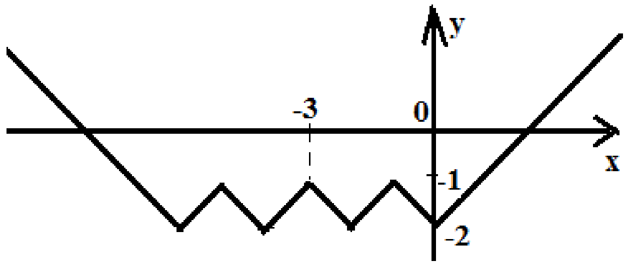


Рис. 1.

6.7. Рассмотрим выполнение задания № 8*:

$$y = |x-2| - |-4-x|.$$

Преобразуем функцию к более удобному виду:

$$y = |x-2| - |x+4|.$$

Найдем нули функции: $x = -4$ и $x = 2$ и отметим их на числовой прямой.

Определим знаки каждого из подмодульных выражений на всех промежутках.

Получим системы:

$$\begin{cases} x < -4, \\ y = 6, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -4 \le x \le 2, \\ y = -2x - 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 2, \\ y = -6. \end{cases}.$$

Рекомендуем полученную функцию представить в кусочной форме записи:

$$y = \begin{cases} 6, \ x < -4, \\ -2x - 2, \ -4 \le x \le 2, \\ -6, \ x > 2. \end{cases}$$

Построим график функции $y = |x-2| - |-4-x|$.

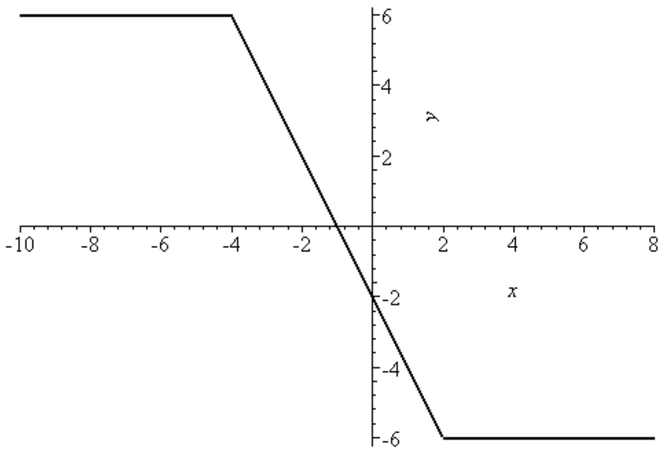


Рис. 2.

При выполнении чертежа можно сначала построить на соответствующих участках прямые (лучи) $y=6$ и $y=-6$, а затем, учитывая, что на промежутке $[-4;2]$ функция тоже является линейной, просто провести отрезок, соединяющий точки $(-4;6)$ и $(2;\ -6)$.

6.8. Рассмотрим задание № 30**:

$$|y| = 2^{|x|-3} - 1.$$

$y_0 = 2^x$ – строим возрастающую показательную кривую;

$y_1 = 2^{x-3}$ – сдвиг вправо на 3:

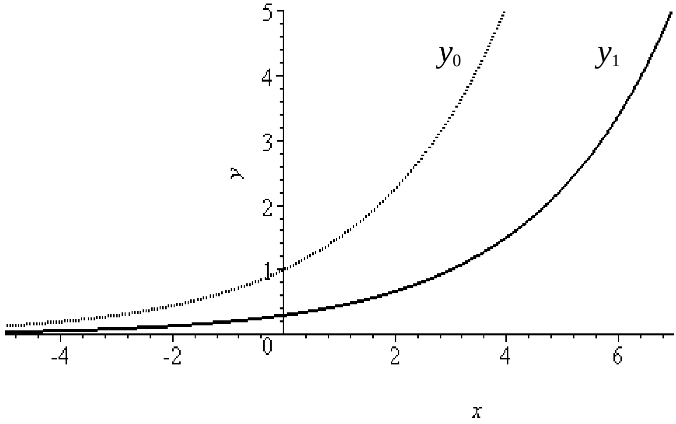


Рис. 3. Графики функций y_0 и y_1.

$y_2 = 2^{|x|-3}$ – преобразование 4_2 из таблицы в первой главе; в результате правая относительно оси ординат часть графика сохраняется, а левая заменяется на симметричную правой части графика.

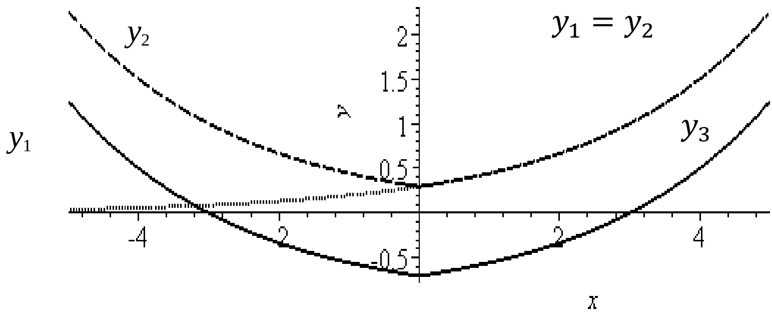


Рис. 4. Графики функций y_1, y_2 и y_3.

Есть два варианта продолжения.

<u>1-й вариант</u>. Выполняем преобразование 4_3 из главы 5 данного курса, чтобы получить график функции $|y| = 2^{|x|-3}$.

Выполняем сдвиг вниз на единицу: $|y| = 2^{|x|-3} - 1$.

<u>2-й вариант</u>. Сначала выполним преобразование «вниз на 1», то есть получим функцию $y_3 = 2^{|x|-3} - 1$, а затем выполним преобразование 4_3 из главы 5. Продолжим построение по 2-му варианту.

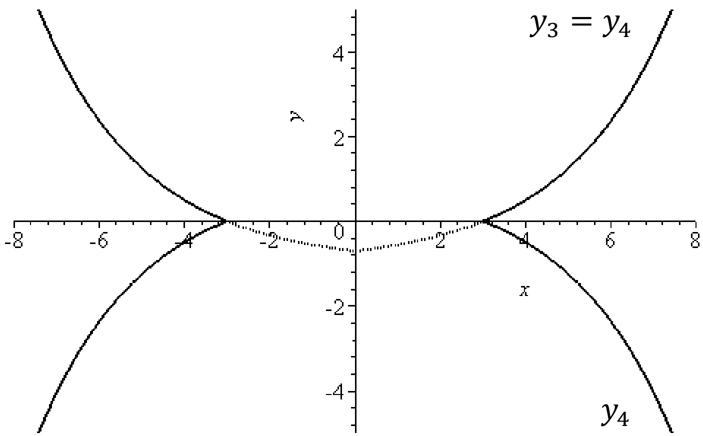


Рис. 5. Графики функции y_3 и исходного уравнения.

Выбираем второй вариант сознательно, так как первый вариант продолжения уже рассматривался ранее на другом примере. В данном случае последние два преобразования мы поменяли местами. К сожалению, не в любом задании два преобразования можно менять местами, поэтому не стоит этим увлекаться, если не уверены в том, что это не приведет к ошибочному решению задания.

6.9. Рассмотрим задание № 35*:

$$y = \left|\log_{2,2}|x|\right|;$$

при каких значениях a уравнение $y = a + 4{,}8$ имеет четыре корня?

Решим уравнение графически. Количество корней этого уравнения равно количеству точек пересечения графиков функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

1) Для удобства выполнения этого задания преобразуем данное уравнение. Запишем его в виде $y - 4{,}8 = a$, тогда уравнение примет вид $\left|\log_{2,2}|x|\right| - 4{,}8 = a$.

Поскольку сдвиги вдоль осей не зависят от остальных преобразований, то сдвиг вдоль оси ординат можно оставить на последний шаг.

2) Строим график функции $y_0 = \log_{2,2} x$;

$y_1 = \log_{2,2}|x|$ – преобразование 4_2, в результате получим следующий график:

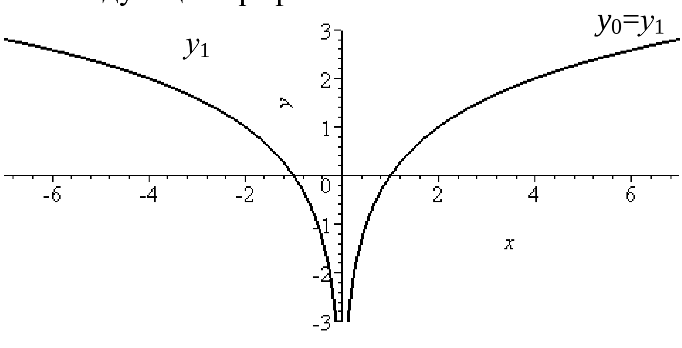


Рис. 6. Графики функций y_0 и y_1.

$y_2 = |\log_{2,2}|x||$ – преобразование 4_1,

$y_3 = |\log_{2,2}|x|| - 4{,}8$ – сдвиг вниз на 4,8, в результате получим следующий график:

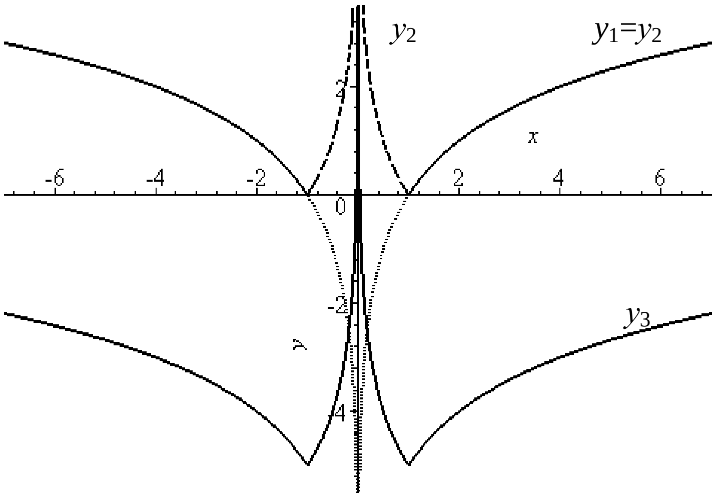


Рис. 7. Графики функций y_1, y_2 и y_3.

График функции y_3 является искомым графиком функции.

График правой части – прямая $y = a$. Количество точек пересечения графиков зависит от a. Понятно, что при $a < -4{,}8$ точек пересечения нет, а значит, уравнение не имеет корней; при $a = -4{,}8$ будет две точки пересечения, то есть уравнение имеет два корня; при $a > -4{,}8$ будет четыре точки пересечения, а значит, уравнение имеет четыре корня.

Преобразования в пунктах № 3 и № 4, как уже упоминалось выше, можно поменять местами (смотрите преобразование № 4 в главе 5).

Несмотря на кажущуюся ограниченность функции $y = \log_a x$ при $x \to \pm\infty$ следует помнить, что на самом деле график логарифмической функции не ограничен, то есть постепенно «уходит» неограниченно вверх к $+\infty$, поэтому четыре точки пересечения имеем при $a > -4{,}8$, а значит, уравнение имеет четыре корня при $a > -4{,}8$.

Ответ: при $a > -4{,}8$.

В этом задании сознательно взяты «плохие» числа, поскольку характер преобразований графиков и результаты решения не зависит от конкретных чисел.

Глава 7. Использование преобразований графиков при решении задач с физическим содержанием и сложных заданий из контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ по математике

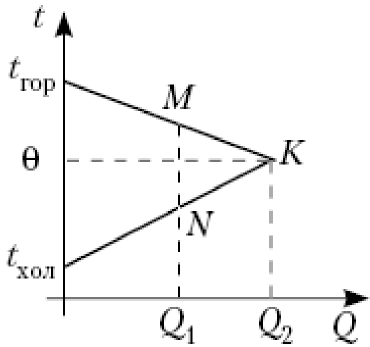
7.1. В этой главе приведем несколько заданий, в которых использование графиков функций (в частности преобразования графиков функций) не являются самоцелью, а лишь небольшой частью задания. Решать большинство задач, предложенных в этой главе, без использования графиков и их преобразований значит обрекать себя на значительно более сложный путь. При этом некоторые задания решить без них практически невозможно.

Графический аспект очень важен в школьном курсе физики как при изложении теории, так и при решении задач и выполнении лабораторных работ. Графическое изображение результатов измерений при выполнении лабораторных работ и работ практикума необходимо, в первую очередь, для:

- контроля результатов измерений;
- нахождения по графику среднего значения физической величины;

- проверки правильности результата методом сведения сложной зависимости к более простой (в частности сведения квадратичной зависимости к линейной, когда по оси ординат откладывается не сама величина, а квадрат величины);
- дальнейшей работы по построенному графику;
- определения значения физической величины методом экстраполирования (продолжения) графика.

Например, при выполнении лабораторной работы «Сравнение количеств теплоты при смешивании воды разной температуры» учащимся можно предложить построить графики изменения температуры, подсчитав количество теплоты, отданной холодной водой и полученной горячей, а затем объяснить, что означают точки графика: *M*, *N* и *K* .



При выполнении лабораторной работы «Градуирование пружины и измерение силы динамометром» нужно обратить внимание на то, что $F_{упр} \sim \Delta l$, и построить соответствующий график зависимости $F_{упр}(\Delta l)$.

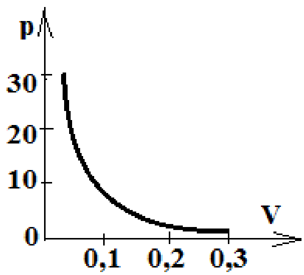
7.2. Разберем несколько несложных задач из курса физики. При этом естественно количество преобразований графиков при решении физических задач сводится к минимуму, поскольку основную нагрузку в них должны взять на себя именно физические аспекты задачи.

Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 1. В физике известен закон Бойля – Мариотта: произведение давления газа на его объем постоянно, если температура газа не меняется: $p \cdot V = k$, где p – давление, V – объем, k – постоянная величина. Ясно, что этот закон может быть записан иначе: $V = \dfrac{k}{p}$.

Постройте график зависимости $V(p)$ при различных значениях параметра k.

<u>Задача 2</u>. На графике изображён процесс изотермического расширение азота массой 100 грамм. Определить температуру азота.



Обозначим m – массу азота в граммах, p – давление азота в Паскалях, V – объём азота в $м^3$, M – молярную массу азота в кг/моль, T – температуру азота в градусах Кельвина, R – молярную газовую постоянную

Решим эту задачу. Из условия задачи имеем следующие данные:

$$m = 100\ г,\ p = 10 \cdot 10^4\ Па,\ V = 0{,}1\ м^3,\ M = 0{,}028\ кг/моль.$$

Если внимательно посмотреть на рисунок, то можно заметить, что изотерма проходит через точку, соответствующую давлению $p = 10 \cdot 10^5\ Па$ и объёму $V = 0{,}1\ м^3$. Согласно уравнению состояния идеального газа Менделеева – Клайперона $pV = \dfrac{m}{M} RT$ имеем $T = \dfrac{pVM}{mR}$.

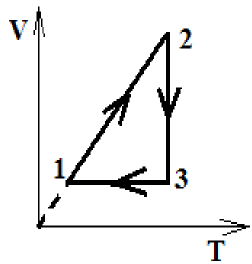
Откуда $T = \dfrac{10 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}028}{0{,}1 \cdot 8{,}31} K$.

Ответ: $T = 337K$.

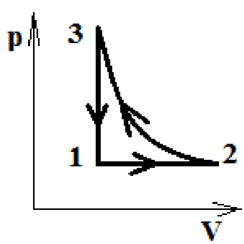
В этой задаче автор по сути дела взял гиперболу вида $y = \frac{1}{x}$ вместо гиперболы $y = \frac{1000}{x}$, но вместо того, чтобы растянуть её в 1000 раз, просто перевёл граммы в килограммы. В результате изменения единиц измерения график приобрёл более удобный вид, но на оси абсцисс вместо чисел 100, 200, 300 появились числа 0,1, 0,2, 0,3, что улучшило сам график и облегчило вычисления при нахождении искомой величины.

Задача 3.

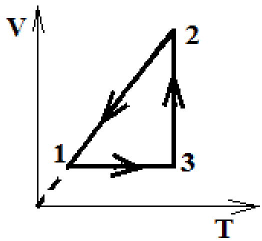
На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатах V-T, то есть при изобарическом процессе. Представьте этот процесс в координатах p-V (изотермический процесс) и p-T (изохорический процесс).



Понятно, что для выполнения этого задания необходимо в первую очередь разбираться в физическом аспекте поставленной проблемы, а уж потом использовать графические знания и умения. Результатом решения задачи будут преобразованные в графики в системах координат новые процессы. Приведем графики этих процессов.



Изотермический процесс



Изохорический процесс

7.3. Наибольший интерес, а вместе с тем и наибольшую трудность у учащихся и учителей вызывает решение различных заданий с модулями и параметрами. В отличие от заданий предыдущих пунктов они не имеют четкого определенного алгоритма решения, поэтому никоим образом не могут считаться стандартными. Поэтому уровень остальных заданий этой главы еще более высокий, и их можно рассматривать только в классах с углубленным изучением математики. Большинство из них взяты из подготовительных или контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике. Практически все они решаются с помощью функционально-графического метода, для которого совершенно необходимо умение пользоваться преобразованием графиков. Приведем примеры таких заданий.

Рассмотрим сначала задания, где используется алгоритм работы с графиками функций, заданных аналитическими выражениями, содержащими модули линейных функций. Этот алгоритм мы разобрали в предыдущей главе.

В качестве примеров таких заданий приведем следующие:

1*) Найдите все значения a такие, что для любого x выполняется неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$.

2*) Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы одно решение неравенство:

$$4|x+3|+3|x-a|\le\sqrt{16-y^2}+2.$$

3*) Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы один корень уравнение

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|.$$

7.4. Решим первое из них. Используем для этого функционально-графический метод. Перенесем член $-2x$

в левую часть и рассмотрим выражение в левой части как функцию $f(x)$. Тогда неравенство примет вид: $f(x)>3$. На графическом языке наше задание можно тогда сформулировать следующим образом: найдите все значения a, при которых график функции $f(x)$ полностью расположен выше прямой $y=3$.

Нам неизвестно, какое из чисел (-1 или $-a$) меньше, но понятно, что, если мы раскроем модули при условии $\begin{cases} x<-1, \\ x<-a, \end{cases}$ то функция $f(x)$ принимает вид линейной убывающей функции: $f(x)=-x-2a-1$. Аналогично при $\begin{cases} x>-1, \\ x>-a, \end{cases}$ также имеем линейную возрастающую функцию, которая принимает вид $f(x)=5x+2a+1$.

Таким образом, не зависимо от того, какое из чисел (-1 или $-a$) меньше, схематический график функции $f(x)$ будет иметь вид (разновидности зависят от того, которое из этих чисел меньше):

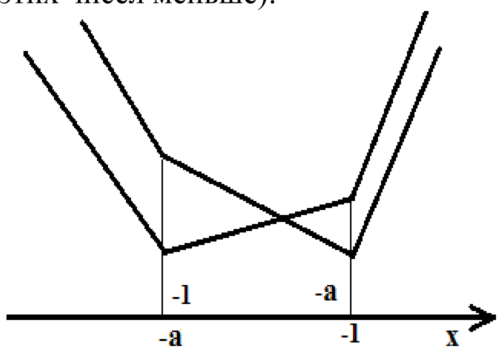


Рис. 8.

Условие задания будет выполняется, если наименьшее значение функции будет больше, чем число *3*. Поскольку наименьшее значение функция может принимать как при $x=-1$, так и при $x=-a$, то задание сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(-1)>3, \\ f(-a)>3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-1|-2>3, \\ 2|a-1|-2>3. \end{cases}$$

При $a\ge 1$ имеем

$$\begin{cases} a-1-2a>3, \\ 2a-2-2>3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-4, \\ a>3{,}5 \end{cases},$$

то есть решений нет.

При $a<1$ имеем

$$\begin{cases} 1-a-2a>3, \\ 2a-2-2>3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\dfrac{2}{3}, \\ a>-1{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow a<-1{,}5$$ – удовлетворяет условию $a<1$. Тогда получим: $a<-1{,}5$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1{,}5)$.

7.5. Решим второе задание.

Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы одно решение неравенство:

$$4|x+3|+3|x-a|\le\sqrt{16-y^2}+2.$$

В этом задании лучше ввести сразу две функции: $g(x)=\sqrt{16-y^2+2}$ и $f(x)=4|x+3|+3|x-a|$. Тогда неравенство примет вид: $f(x)\le g(x)$.

Это неравенство имеет хотя бы одно решение, если наименьшее значение функции $f(x)$ меньше или равно наибольшему значению функции $g(x)$, то есть $\min f(x)\le\max g(x)$.

Оценим обе функции. Так как у функции $f(x)$ коэффициент перед первым модулем больше, чем перед вторым, то раскроем только первый модуль: $x<-3$ при функция станет линейной убывающей, а при $x\geq -3$ – линейной возрастающей. Таким образом, слева от точки $x=3$ функция убывает, а справа возрастает, то есть свое наименьшее значение она принимает при $x=-3$. Найдем его:

$$\min f(x)=f(-3)=3|a+3|.$$

Очевидно, что наибольшее значение вторая функция принимает при $x=0$, то есть $\max g(x)=g(0)=6$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$3|a+3|\leq 6 \qquad -2\leq a+3\leq 2$$

$$|a+3|\leq 2 \qquad -5\leq a\leq -1$$

Ответ: $a\in[-5;-1]$.

7.6. Разберем задание № 3*.

Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы один корень уравнение $4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$.

Перенесем все члены в одну часть уравнения и обозначим полученное выражение через $f(x)$, то есть $f(x)=9|x-1|+\left|3x-|x+a|\right|-4x$. Тогда уравнение примет вид $f(x)=0$.

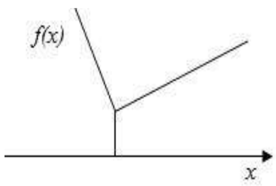
Поскольку функция при любом варианте раскрытия модулей будет линейной, а коэффициент при первом модуле больше суммы модулей всех остальных членов, то раскроем только первый модуль.

При $x-1<0$ получим

$$f(x)=-9x+9\pm 3x\pm x\pm a-4x,$$

то есть, с какими бы знаками не раскрывались остальные модули, коэффициент при x будет отрицательным, а значит, получим, что при $x<1$ функция будет линейной убывающей. Аналогично при $x>1$ функция будет линейной возрастающей.

Таким образом, график функции представляет собой угол с вершиной в точке с абсциссой $x=1$. Стороны угла направлены вверх. Тогда наименьшее значение функции будет именно в этой точке. Чтобы уравнение имело хотя бы один корень, наименьшее значение функции должно быть меньше или равно нулю, то есть $f(1)\le 0$.



Подставим:

$$9|1-1|+\left|3\cdot 1-|1+a|\right|-4\cdot 1\le 0;$$

$$\left|3-|1+a|\right|\le 4$$

$$-4\le |a+1|-3\le 4$$

$$|a+1|\le 7$$

$$-7\le a+1\le 7$$

$$-8\le a\le 6$$

Ответ: $a\in[-8;-6]$.

7.7. Не следует думать, что в подготовительных материалах к ЕГЭ графики с модулем и параметром используются только в рассмотренной конфигурации, то есть содержат сумму или разность двух модулей, с линейными подмодульными функциями. Приведем примеры других заданий, встречающихся в подготовительных материалах к ЕГЭ, содержащих модули и параметры.

1*) Найдите все значения a, при которых имеет более двух различных корней уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|.$$

2*) Найдите все значения a, при которых неравенство $\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right| < 3$ выполняется при всех значениях x.

3*) Для уравнения $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ найдите все значения a, при которых оно имеет хотя бы 1 корень из промежутка $[-1; 1)$.

4**) Найдите все значения a, при которых на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ уравнение

$$|3\cos^2 x + 18\sin x + a| = 3\cos^2 x + 17\sin x - a$$

имеет один корень.

5**) Найдите все значения a $(a > 0)$, при которых имеет ровно два различных корня уравнение:

$$\left|1 - 6\sqrt{x}\right| = 4(x + a).$$

6**) Найдите все значения a, при которых на промежутке $(0; \infty)$ уравнение $ax - 1 = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$ имеет ровно один корень.

7*) Найдите все значения a, при которых имеет ровно три различных корня уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16.$$

8**) Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases}(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1,\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

9**) Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше единицы.

10**) При каких значениях a уравнение $\sqrt{5+4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2}=\boldsymbol{ax}-6\boldsymbol{a}+3$ имеет ровно один корень?

11**) Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы один корень уравнение

$$a^2+10|x|+5\sqrt{3x^2+25}=5a+3|3x-5a|.$$

12**) Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система уравнений $4\boldsymbol{a}=\boldsymbol{ax}-\boldsymbol{y}$ и $\dfrac{y^2-xy-7y+5x+10}{\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-y}}=0$.

13**) Найдите все положительные значения a, при которых уравнение $\left|1-5\sqrt{x}\right|=2x+2a$ имеет ровно два корня.

14**) Найдите все значения a, при которых имеет ровно два корня уравнение

$$\left(|x-6|-|x-a|\right)^2+2a^2+a-1=3a\left(|x-6|-|x-a|\right).$$

15**) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-y-2+|y^2-y-2|=0, \\ 3x+y=a, \end{cases}$$

имеет более трех решений.

16**) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+24y+108=|x^2+y^2-36|, \\ x-y=a, \end{cases}$$

имеет более одного решения.

7.8. Как видим, в подготовительных материалах к ЕГЭ встречается большое разнообразие заданий, содержащих модули и параметры.

Задания №№ 1*, 2*, 3* и 7* в этом перечне несколько легче остальных, их, конечно же, надо рассматривать в классах, где преподавание математики ведется на повышенном (профильном) уровне, но требовать их понимания от каждого ученика в классе не следует. Кто сможет разобраться и овладеть решением таких заданий, с того и можно спрашивать.

Остальные задания еще сложнее. Предлагать их в классах, где преподавание математики ведется на повышенном (профильном) уровне, следует только в качестве ознакомления обучающихся с некоторыми нестандартными с точки зрения программы заданиями повышенного уровня сложности. Даже в классах, где преподавание ведется по углубленной программе вряд ли можно требовать их полного понимания от каждого ученика. Самыми сложными, в первую очередь из-за своей нестандартности, на наш взгляд, являются задания №№ 9**, 11**, 12** и, конечно же, 14**.

7.9. Решим задание № 4**. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|3\cos^2 x + 18\sin x + a| = 3\cos^2 x + 17\sin x - a$$

имеет на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ один корень.

Раскроем модуль по определению, то есть рассмотрим два случая.

<u>1-й случай</u>. Пусть $3\cos^2 x + 18\sin x + a \geq 0$, тогда уравнение примет вид:

$$3\cos^2 x + 18\sin x + a = 3\cos^2 x + 17\sin x - a$$

$$\sin x = -2a.$$

Это уравнение будет иметь на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ один корень, если $-1 < -2a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < 0{,}5$.

При этом получим два корня:

$$x_1 = \pi + \arcsin 2a \text{ и } x_2 = -\arcsin 2a,$$

причем $x_1 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $x_2 \notin \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

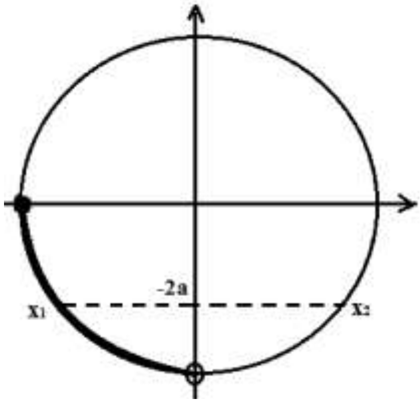


Рис. 10.

Подставим $\sin x = -2a$ в неравенство

$$3\cos^2 x + 18\sin x + a \geq 0.$$

$$3\left(1 - \sin^2 x\right) + 18\sin x + a \geq 0,$$
$$3(1 - (-2a)^2) + 18 \cdot (-2a) + a \geq 0,$$
$$3(1 - 4a^2) - 36a + a \geq 0,$$
$$3 - 12a^2 - 35a \geq 0,$$
$$12a^2 + 35a - 3 \leq 0,$$
$$-3 \leq a \leq \frac{1}{12}.$$

Учитывая условие случая ($0 \leq a < 0{,}5$), получим:

$$0 \leq a \leq \frac{1}{12}.$$

<u>2-й случай.</u> Пусть $3\cos^2 x + 18\sin x + a < 0$, тогда уравнение примет вид:

$$-3\cos^2 x - 18\sin x - a = 3\cos^2 x + 17\sin x - a.$$
$$6\cos^2 x + 35\sin x = 0,$$
$$6(1 - \sin^2 x) + 35\sin x = 0,$$
$$6 - 6\sin^2 x + 35\sin x = 0,$$
$$6\sin^2 x - 35\sin x - 6 = 0,$$

$$\sin x = 6 \text{ или } \sin x = -\frac{1}{6},$$

$$\sin x = -\frac{1}{6}.$$

Учитывая, что $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, имеем

$$x_3 = \pi + \arcsin\frac{1}{6} \text{ и } x_4 = -\arcsin\frac{1}{6},$$

причем $x_3 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $x_4 \notin \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

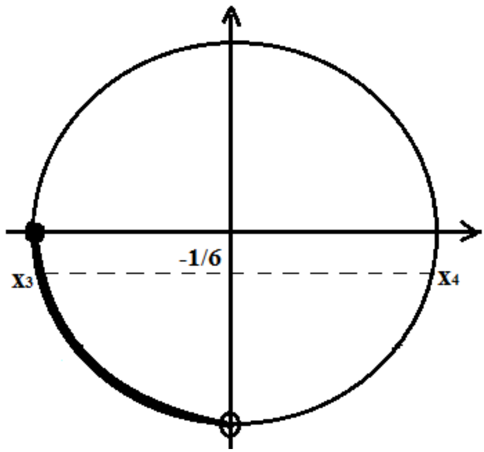


Рис. 11.

Преобразуем неравенство $3\cos^2 x + 18\sin x + a < 0$ и подставим в него $\sin x = -\frac{1}{6}$:

$$3(1 - \sin^2 x) + 18\sin x + a < 0,$$

$$3\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^2\right) + 18 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + a < 0,$$

$$3\left(1 - \frac{1}{36}\right) - 3 + a < 0,$$

$$3 - \frac{1}{12} - 3 + a < 0,$$

$$a - \frac{1}{12} < 0,$$

$$a < \frac{1}{12}.$$

Значит, при $0 \le a \le \frac{1}{12}$ имеем корень

$$x_1 = \pi + \arcsin 2a,$$

а при $a < \frac{1}{12}$ имеем корень $x_3 = \pi + \arcsin\frac{1}{6}$. Найдем, при каких значениях a исходное уравнение имеет только один корень.

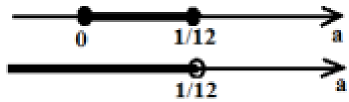


Рис. 12.

Из рисунка видно, что уравнение будет иметь один корень при $a \in (-\infty; 0)$ и при $a = \frac{1}{12}$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{12}\right\}$.

7.10. Решим задание № 7*: Найдите все значения a, при которых имеет ровно три различных корня уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$.

Это задание нельзя отнести к заданиям высокого уровня сложности, поэтому его вполне можно разобрать в классе, где преподавание математики ведется на повышенном уровне.

Преобразуем уравнение:

$$x^2 - 8x + 16 = 2|x - a|,$$

$$(x - 4)^2 = 2|x - a|.$$

Введем две функции:

$$f(x) = (x - 4)^2 \text{ и } g(x) = 2|x - a|.$$

Графиком функции $f(x)$ является парабола, вершина которой в точке (4; 0), ветви направлены вверх. Графиком функции $g(x)$ является угол (острый), вершина которого в точке с координатами (a; 0), стороны направлены вверх.

Понятно, что если вершины угла и параболы совпадут (а это случится при $a = 4$), то графики будут иметь три общие точки. Тогда исходное уравнение будет иметь ровно три корня, что удовлетворяет условию нашего задания.

Три корня уравнение будет иметь также в случае, когда одна из сторон угла будет касаться параболы, то есть всего имеем три случая, удовлетворяющих условию.

1-й случай.

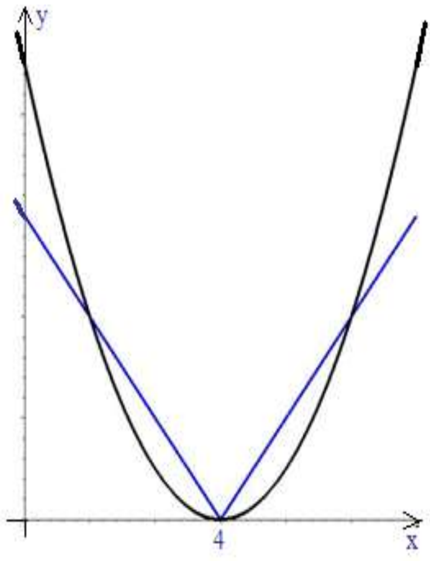


Рис. 13.

2-й случай. Пусть левая сторона угла касается параболы, тогда правая сторона пересекает ее. Получим три общие точки.

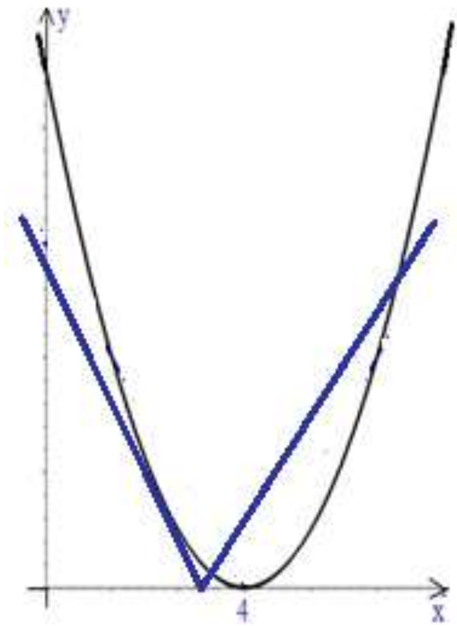


Рис. 14.

Левая сторона угла касается параболы, значит прямая $y = -2x + 2a$ и график функции $g(x)$, то есть парабола, должны иметь одну общую точку. Выясним, при каких значениях a имеет ровно один корень уравнение:

$$-2x + 2a = (x - 4)^2,$$

$$-2x + 2a = x^2 - 8x + 16,$$

$$x^2 - 6x + 16 - 2a = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 16 + 2a = 2a - 7,$$

$$2a - 7 = 0,$$

$$a = 3{,}5.$$

<u>3-й случай</u>. Пусть правая сторона угла касается параболы, тогда левая сторона пересекает ее. Получим три общие точки.

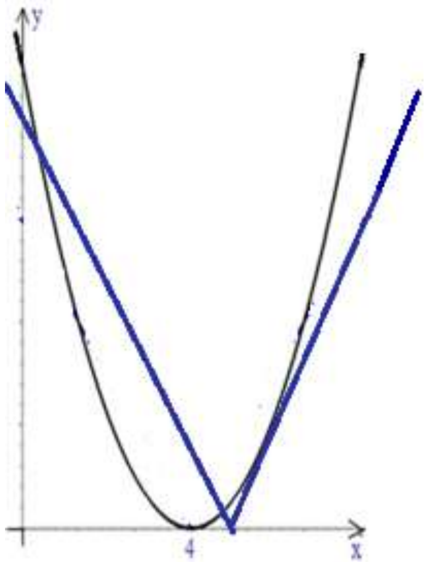


Рис. 15.

Левая сторона угла касается параболы, значит прямая $y = 2x - 2a$ и график функции $g(x)$, то есть парабола, должны иметь одну общую точку. Выясним, при каких значениях a имеет ровно один корень уравнение:

$$2x - 2a = (x - 4)^2$$

$$2x - 2a = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 10x + 16 + 2a = 0$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 16 - 2a = -2a + 9$$

$$-2a + 9 = 0$$

$$a = 4{,}5.$$

Ответ: 4, 3,5 и 4,5.

7.11. Задание 8** «Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1,\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения» практически полностью решается на основе работы с графиками входящих в систему уравнений. Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке (4; 4) и радиусом, равным 3. Графиком второго уравнения является прямой угол, вершина которого лежит на прямой $y=1$, а стороны направлены вверх.

Сдвигая этот угол параллельно оси абсцисс, видим, что эти графики имеют три общие точки (а значит, система имеет три решения) только в трех случаях:

1) вершина угла – в точке (4; 1);

2) «левая» сторона угла касается окружности;

3) правая сторона угла касается окружности.

Первый случай очень хорошо виден, поэтому один из результатов получаем сразу: $a=4$. Чтобы рассмотреть остальные два случая, надо исследовать их одновременно в одной системе координат (можно в той же самой, где рассмотрен первый случай). Это позволит воспользоваться свойствами прямого угла и свойствами двух квадратов, которые получаются в результате дополнительного построения и хорошо видны на рисунке.

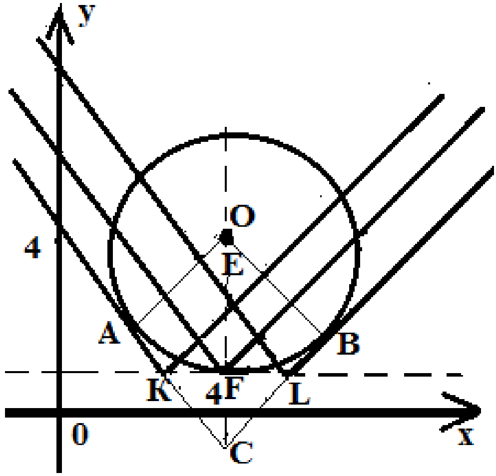


Рис. 16

Так как касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, AOBC – квадрат со стороной 3, тогда его диагональ $OC = 3\sqrt{2}$, а отрезок $FC = OC - OF = 3\sqrt{2} - 3$. Но KELC – тоже квадрат, его диагонали равны, поэтому $FL = FK = FC = 3\sqrt{2} - 3$. Так как абсциссы точек K и L являются искомыми значениями параметра a, то, добавив и вычтя полученную величину к абсциссе точки F, получим: $1 + 3\sqrt{2}$ и $7 - 3\sqrt{2}$.

Ответ: 4; $1 + 3\sqrt{2}$; $7 - 3\sqrt{2}$.

7.12. Остальные задания тоже лучше решать с помощью графиков, так как в противном случае решение будет громоздким и потеряет наглядность, а исследовать все возможные случаи без наглядности весьма проблематично, а иногда и невозможно. Поэтому настоятельно рекомендует использовать при решении сложных заданий с модулями и с параметрами графики.

Рассмотрим решение некоторых из них.

7.13. Решим задание 6**. Найдите все значения a, при которых на промежутке $(0;\infty)$ уравнение $ax-1=\left|\frac{6}{x}-3\right|$ имеет ровно один корень.

Пусть $f(x)=\left|\frac{6}{x}-3\right|+1$, $g(x)=ax$, причем обе функции на заданном промежутке непрерывны и монотонны. Тогда исходное уравнение примет вид: $f(x)=g(x)$. Чтобы это уравнение имело ровно один корень, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ должны иметь ровно одну точку пересечения.

С помощью преобразований попытаемся построить график функции $f(x)=\left|\frac{6}{x}-3\right|+1$.

$y_0=\frac{6}{x}$ – графиком является гипербола, ветви которой расположены в 1 и 3 четверти,

$y_1=y_0-3$ – вниз на 3,

$y_2=|y_1|$ – преобразование 4_1,

$y_3=y_2+1$ – вверх на 1.

Графиком функции $g(x)$ является прямая, проходящая через начало координат и имеющая угловой коэффициент, равный a, то есть получаем пучок прямых, вращающихся вокруг начала координат (рис. 17).

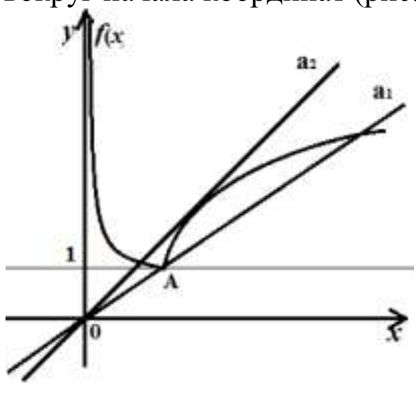


Рис. 17.

Понятно, что при $a < 0$ и при $a = 0$ точек пересечения не будет, так как график функции $f(x)$ целиком расположен в первой четверти.

При $a > 0$ прямая может пересечь график функции $f(x)$ в одной, двух или трех точках. Пусть А – точка «излома» графика, она лежит на прямой $y = 1$. Значение a, при котором прямая проходит через точку А, обозначим a_1, а значение a, при котором прямая касается графика функции – через a_2.

Если прямая $g(x)$ проходит между прямыми с соответствующими угловыми коэффициентами, то она имеет с графиком функции $f(x)$ три общие точки. Если $0 < a < a_1$ или $a > a_2$, то будет одна точка пересечения, если $a = a_1$ или $a = a_2$, то будет две точки пересечения.

Найдем a_1 и a_2. Пусть А(x_0; 1), подставим сначала в функцию $f(x)$ и найдем x_0:

$$1 = \left|\frac{6}{x} - 3\right| + 1;$$

$$\left|\frac{6}{x} - 3\right| = 0;$$

$$\frac{6}{x} - 3;$$

$$x_0 = 2.$$

Теперь подставим найденное x_0 в функцию $g(x)$:

$$1 = a \cdot 2, \text{ то есть } a_1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем a_2. Касательная к графику $f(x)$ имеет с ним только одну общую точку в случае, когда уравнение $3 - \frac{6}{x} + 1 = ax$ имеет один корень.

Примечание. Так как прямая касается графика после симметрии относительно оси абсцисс, то в уравнении нас интересует лишь функция $y = 3 - \frac{6}{x} + 1$, а не вся функция $f(x)$.

Найдем a_2:

$$4x-6=ax^2$$
$$ax^2-4x+6=0$$
$$\frac{D}{4}=4-6a$$
$$4-6a=0$$
$$a_2=\frac{2}{3}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень, если $0<a<0{,}5$ или $a>\frac{2}{3}$.

Ответ: $a\in(0;0{,}5)\cup\left(\frac{2}{3};\ \infty\right)$.

7.14. Задание № 10**. При каких значениях a уравнение $\sqrt{5+4x-x^2}=ax-6a+3$ имеет ровно один корень?

Рассмотрим левую и правую части уравнения как функции. Запишем функцию в левой части:

$$y=\sqrt{9-\left(4-4x+x^2\right)}.$$

Возведя в квадрат при $y\geq 0$, получим:

$$y^2=9-(x-2)^2\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=3^2.$$

Очевидно графиком этого уравнения является окружность с центром в точке (2; 0) и радиусом 3, а графиком рассматриваемой функции – «верхняя» полуокружность этой окружности.

Преобразуем функцию $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-6)+3$, стоящую в правой части. При $\boldsymbol{x}=6$ имеем $\boldsymbol{y}=3$ (не зависит от a). Получим «пучок» прямых, проходящих через точку A(6; 3), с угловым коэффициентом a. Нас интересуют граничные прямые, то есть прямые, которые проходят через точки (2; 3), (–1; 0) и (5; 0). Соответствующие значения для a: $a=0$, $a=\frac{3}{7}$ и $a=3$.

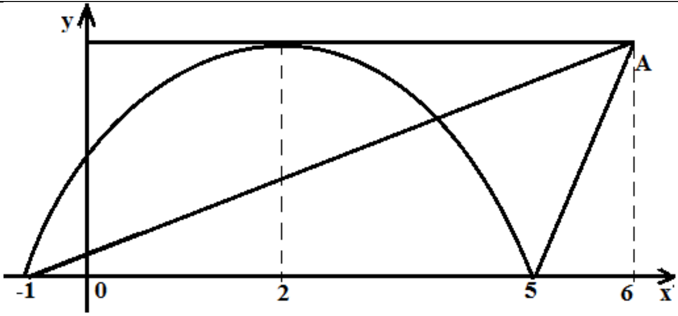


Рис. 18.

Очевидно, что исходное уравнение имеет ровно один корень при $a = 0$ и при $\frac{3}{7} < a \leq 3$.

Ответ: $a \in \left(\frac{3}{7}; 3\right] \cup \{0\}$.

7.15. Разберем решение задания № 12**: Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$4\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{y}$ и $\dfrac{y^2 - xy - 7y + 5x + 10}{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-y}} = 0$ имеет

единственное решение.

Из второго уравнения при $x > -4$ и $y < 6$ получим квадратное уравнение относительно переменной y: $\boldsymbol{y}^2 - (\boldsymbol{x} + 7)\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{x} + 10 = 0$. Корнями этого уравнения будут: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + 2$ и $\boldsymbol{y} = 5$. Графически – это объединение двух прямых.

Перепишем первое уравнение в виде $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - 4)$. Графически – это пучок прямых с коэффициентом a, проходящих через точку А (4; 0). Из всех прямых этого пучка мы выберем те, которые проходят через точки пересечения прямых $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + 2$ и $\boldsymbol{y} = 5$ друг с другом и с границами области, задаваемой условиями $x > -4$ и $y < 6$, то есть через следующие четыре точки: (3; 5), (–4; –2), (– 4; 5) и (4; 6). Для этих прямых получим соответствующие значения коэффициента a: $a_3 = -5$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{5}{8}$.

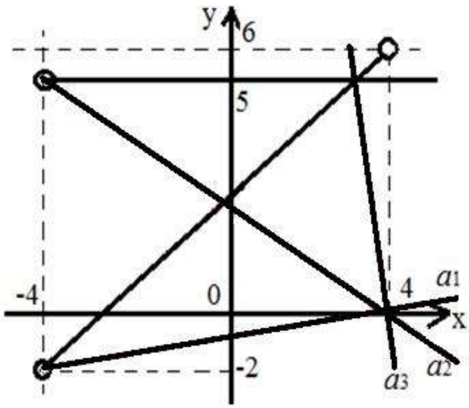


Рис. 19.

Понятно, что для последней точки прямая не имеет углового коэффициента. Очевидно, решение будет единственным, если $-\frac{5}{8} \leq a \leq 0$ или $a \geq \frac{1}{4}$ или $a = -5$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{5}{8}; 0\right] \cup \{-5\} \cup \left[\frac{1}{4}; \infty\right)$.

7.16. Разберем кратко, пожалуй, наиболее сложное задание № 14**, которое встречалось в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике. Найдите все значения a, при которых имеет ровно два корня уравнение

$$(|x-6|-|x-a|)^2 + 2a^2 + a - 1 = 3a(|x-6|-|x-a|).$$

Понятно, для того, чтобы решить наше задание, сначала необходимо разность модулей обозначить новой переменной, например t, а затем, решить полученное квадратное уравнение $t^2 - 3at + 2a^2 + a - 1 = 0$. Его корни можно получить, как обычно, через дискриминант, а можно с использованием теоремы Виета. Для этого необходимо просто заметить, что

$$2a^2 + a - 1 = (2a-1)(a+1),$$

а $(2a-1)+(a+1)=3a$. Тогда корнями будут:

$$t_1 = 2a - 1,\ t_2 = a + 1.$$

Далее надо приравнять разность модулей к полученным в результате корням, то есть

$$|x-6| - |x-a| = 2a - 1 \text{ и } |x-6| - |x-a| = a + 1,$$

то есть решить уравнение $f(x) = t$,

где $f(x) = |x-6| - |x-a|$,

а $t = t_1$, $t = t_2$ – прямые, параллельные оси абсцисс.

Построим график функции $f(x)$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в задании № 8* в главе 6, можно без труда получить график функции, представленной разностью двух линейных модулей. В зависимости от того, какое из чисел больше: 6 или a, может получиться один из двух графиков (рис. 20 и рис. 21):

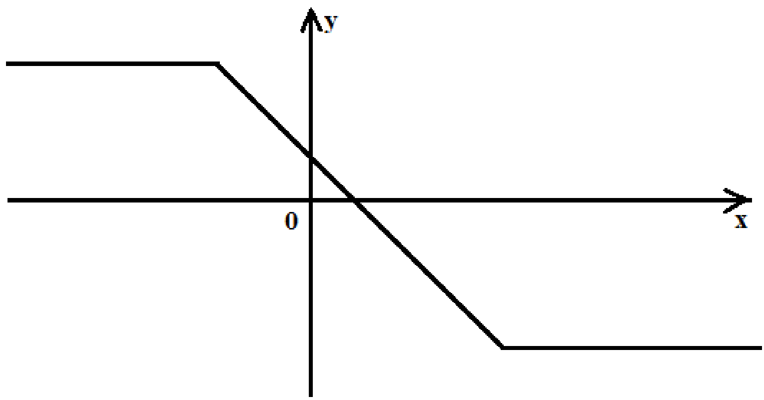


Рис. 20.

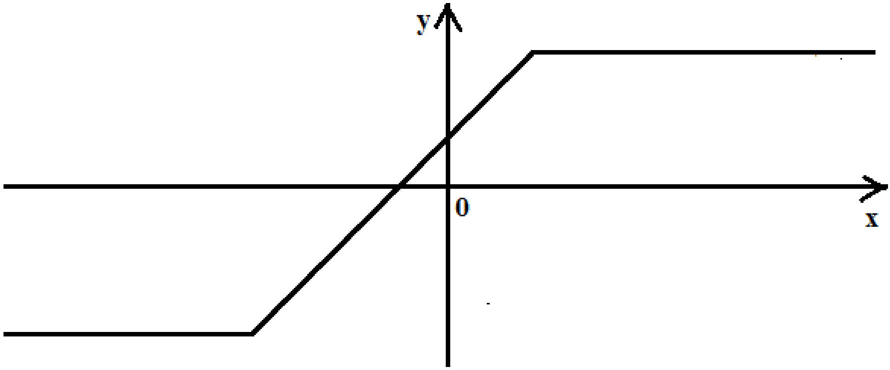


Рис. 21.

Если объединить оба эти случая в один, то получим рисунок, соответствующий нашему заданию (рис. 22).

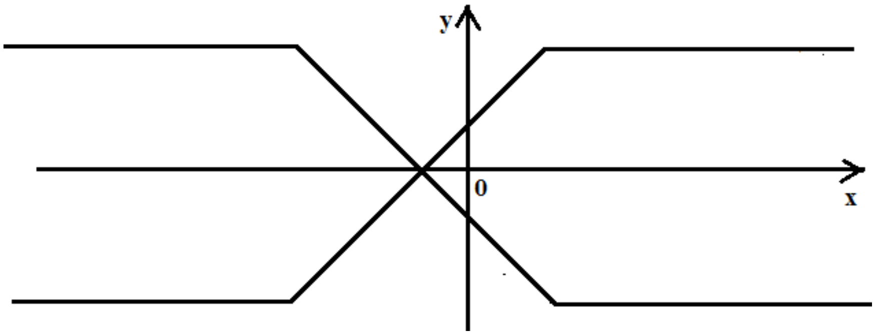


Рис. 22.

Далее просто необходимо посмотреть, сколько раз каждая прямая ($y = t_1$ и $y = t_2$) пересечет полученный график функции $f(x)$.

При этом надо будет исследовать все возможные случаи:

1) прямая $y = t_1$, находится от оси абсцисс на расстоянии большем, чем лучи графиков функции $f(x)$, тогда точек пересечений не будет; тогда прямая $y = t_2$ должна пересекать график функции $f(x)$ в двух точках;

2) прямая $y = t_1$ находится от оси абсцисс на расстоянии равном расстоянию от лучей графиков функции $f(x)$ до оси абсцисс, тогда точек пересечений будет бесконечно много; этот случай не подходит;

3) прямая $y = t_1$ находится от оси абсцисс на расстоянии меньшем, чем лучи графиков функции $f(x)$, тогда будет ровно одна точка пересечения этой прямой с графиком функции $f(x)$;

тогда прямая $y = t_2$ тоже должна пересекать график функции $f(x)$ ровно один раз, то есть находиться от оси абсцисс на расстоянии равном расстоянию от лучей графиков функции $f(x)$ до оси абсцисс.

Но и это еще не всё. Дело в том, что если поменять $y = t_1$ и $y = t_2$ местами то получим 4-й и 5-й случаи, аналогичные первому и второму случаям. Что же касается 3-го случая, то здесь надо будет учесть, что наши прямые ($y = t_1$ и $y = t_2$) могут совпасть. Тогда решений будет не два, а только одно, поэтому при записи ответа этот случай надо будет исключить.

Учитывая сложность задания, приведем ответ: $a \in (-5; 2) \cup \left(2; 2\frac{1}{3}\right)$.

7.17. Последнее задание, решение которого мы разберем – это задание № 16**, которое встретилось в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ в 2015 году. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 16x + y^2 - 16y + 48 = |x^2 + y^2 - 16|, \\ x + y = a, \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Раскроем модуль.

<u>1-й случай.</u> Пусть $x^2 + y^2 - 16 \geq 0$, тогда

$$x^2 - 16x + y^2 - 16y + 48 = x^2 + y^2 - 16,$$

$$16x + 16y = 64,$$

$$x + y = 4.$$

Получим систему $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4^2, \\ y = 4 - x. \end{cases}$

Графически это значит: имеем часть прямой $y = 4 - x$, расположенную вне круга с центром в начале координат и радиусом, равным 4; точнее имеем два луча этой прямой (обозначим ее l) вместе с ее начальными точками, расположенными на окружности этого круга.

<u>2-й случай.</u> Пусть $x^2 + y^2 - 16 < 0$, тогда

$$x^2 - 16x + y^2 - 16y + 48 = -x^2 - y^2 + 16,$$

$$2x^2 - 16x + 2y^2 - 16y + 32 = 0,$$

$$x^2 - 8x + y^2 - 8y + 16 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 16,$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4^2.$$

Это внутренняя часть круга с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

Получим систему $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4^2, \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4^2. \end{cases}$

Графически это значит: имеем часть окружности (обозначим ее ω) с центром в точке с координатами (4; 4) и радиусом, равным 4, которая расположена внутри круга с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

В результате получим следующую картину (рис.23):

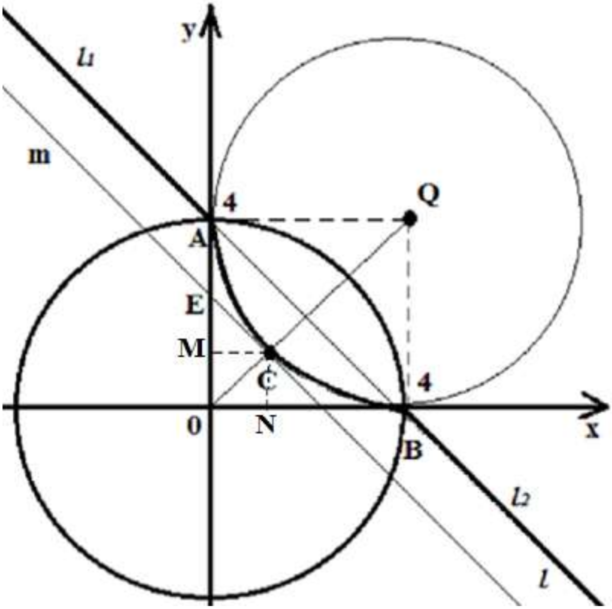


Рис. 23.

Проведем прямую QO. Так как AQBO – квадрат, то QO перпендикулярно прямой l. Через точку C – точку пересечения прямой QO с окружностью $\boldsymbol{\omega}$ проведем прямую $m \| l$. Тогда $m \perp$QO ($m \perp$QC), то есть прямая m – касательная к окружности $\boldsymbol{\omega}$.

Найдем координаты точки C. Это можно сделать по-разному. Например, AQBO – квадрат, $FQ = 4$, тогда $OQ = 4\sqrt{2}$, $OC = 4\sqrt{2} - 4$; попутно найдем $OE = 8 - 4\sqrt{2}$.

MCNO – квадрат, $ON = NC = 4 - 2\sqrt{2}$, тогда $\mathrm{C}(4\sqrt{2} - 4; 4\sqrt{2} - 4)$.

Так как второе уравнение системы задает прямую m ($y = -x + a$) с угловым коэффициентом –1, то $m \| l$.

Возможны несколько случаев:

1. При $a = 4$ прямые m и l совпадают, то есть система имеет бесконечно много решений.

2. При $a = 8 - 4\sqrt{2}$ (смотри OE) прямая m проходит через точку C; система имеет единственное решение.

3. При $a < 8 - 4\sqrt{2}$ и $a > 4$ прямая m не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 дуги ACB, а значит, система не имеет решений.

4. При $8 - 4\sqrt{2} < a < 4$ прямая m пересекает дугу ABC в двух точках, то есть система имеет 2 решения.

Таким образом, условию удовлетворяют первый и четвертый случаи.

Ответ: $a \in \left(8 - 4\sqrt{2}; 4\right]$.

7.18. <u>Примечание</u>. Необходимо обратить внимание на то, что почти все задания этого параграфа были решены с помощью функционально-графического метода, но при этом не использовали производную. Следует также отметить, что этот метод имеет очень много разновидностей, которые весьма разнообразны, что мы и попытались проиллюстрировать в этом параграфе.

Список литературы

1. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала математического анализа» для 10-11 классов. – М.: ДРОФА, 2010. – 48 с.

2. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ для 10 класса – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2012. – 336 с.

3. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ для 11 класса – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2012. – 288 с.

4. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов – учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1992. – 272 с.

5. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

6. *Рисберг В. Г.* Курсы по выбору. – Пермь: ПКИПКРО, 2008. – 44 с.

7. *Рисберг В. Г., Черникова И. Ю, Шабрыкина Н. С.* Прикладные вопросы математики: учеб.-метод. пособие / Рисберг В. Г., Черникова И.Ю, Шабрыкина Н. С. – Пермь: Книжный формат, 2009. – 110 с.

8. Материалы по подготовке к ЕГЭ по математике за 2010-2015 годы [Электронный ресурс] / Открытый банк заданий ЕГЭ – Режим доступа: http://www.fipi.ru, свободный. – Загл. с экрана.

Приложение №1

Основные преобразования графиков функций

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

С помощью какого преобразования можно из графика функции $y = f(x)$ получить графики следующих функций:

Сдвиги вдоль осей координат:

1) $y = f(x-a)$; 2) $y = f(x+a)$; 3) $y = f(x)+b$;
4) $y = f(x)-b$; 5) $y = f(x-a)+b$.

Сжатия (растяжения) вдоль осей координат:

1) $y = f(kx)$; 2) $y = f\left(\frac{k}{x}\right)$;

3) $y = k\cdot f(x)$; 4) $y = \frac{1}{k}\cdot f(x)$.

Симметрии:

1) $y = -f(x)$ – симметрия относительно оси абсцисс;
2) $y = f(-x)$ – симметрия относительно оси ординат;
3) $y = -f(-x)$ – симметрия относительно начала координат.

Модули:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = f(|x|)$.

Приложение №2

Планирование и выполнение последовательности преобразований графиков функций

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

Записать цепочку преобразований, с помощью которой можно из этого графика получить график функции:

1) $y = f(x-4)+1$,

2) $y = -2f(x+2)+6$,

3) $y = f(3x)$

4) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)-7$;

5*) $y = f(2x-8)$;

6*) $y = f(4-x)-2$,

7*) $y = -2f\left(\frac{x}{4}\right)-3$;

8) $y = -1{,}5f\left(1-\frac{x}{3}\right)-4$,

9*) $y = \frac{2}{5}f\left(-\frac{1}{3}-\frac{x}{6}\right)+2$,

10) $y = 4\left|f(4x+6)-2\right|-3$.

Приложение №3

Выполнение последовательности преобразований графиков функций и построение графиков на базе графиков основных функций

Для каждой функции: записать ее в виде, удобном для преобразования графика, составить цепочку преобразований графика и построить график функции, оставляя следы.

1) $y = (x-5)^2 - 2;$

2) $y = -2\sqrt{x-3} + 1;$

3) $y = \frac{6}{x+2} - 3;$

4) $y = 2\sin\frac{x}{2} - 1;$

5) $y = \log_2(2x) + 1;$

6*) $y = (2x-6)^2;$

7*) $y = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2;$

8*) $y = -2\cdot\sqrt{3-3x} + 2;$

9*) $y = -tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 1;$

10*) $y = \frac{4}{4-2x} + 1;$

11*) $y = \left|3 - \frac{1}{2}\log_{0,5}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)\right| - 2;$

12**) $y = -1{,}5\cdot(3 - |4-2x|)^2 + 3;$

13**) $y = \left|\sin\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\right|;$

14**) $y = \left|-\sqrt{3-|x|} + 1\right| + 5;$

15**) $y = \left|\sqrt{2|x|+2} - 2\right| - 4;$

16**) $y = \left|\frac{4}{3-|x|} - 1\right| - 2.$

Приложение №4

Преобразование графиков различных функций с помощью композиции разных модулей

Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$.

Основные преобразования с использованием модуля:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = f(|x|)$;

3) $|y| = f(x)$; 4) $y = |f(|x|)|$;

5) $|y| = |f(x)|$; 6) $|y| = f(|x|)$;

7) $|y| = |f(|x|)|$.

Выполните эти преобразования на функциях:

1) $y = \dfrac{4}{x-2} - 1$; 2) $y = \log_2 x - 1$; 3) $y = \sin x$;

4) $y = \log_{0,5} x - 2$; 5) $y = \dfrac{1}{2}\cos x$; 6) $y = 2^x - 2$;

7) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 8) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 1$; 9) $y = -\operatorname{tg} x$;

10) $y = (3-x)^2 - 4$; 11) $y = \dfrac{3x-6}{x-3}$;

12) $y = x^2 - 6x + 6$; 13) $y = 2^{x-2} - 2$;

14) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 15) $y = -x^2 - 4x + 2$;

16) $y = -2\sqrt{x+4} + 2$; 17) $y = \log_2(x+2) - 1$;

18) $y = \dfrac{-2x-12}{x+4}$.

Приложение №5

Построение графиков функций с модулем

1) $y=|x|$;

2) $y=|x-2|+1$;

3) $y=-|x-5|+2$;

4) $y=||x+3|-1|-2$;

5) $y=-|-|3-x|+2|-1$;

6*) $y=|||-x-3|-2|-1|-2$; сколько корней имеет уравнение $y=a$?

7*) $y=|x+1|+|x-3|$;

8*) $y=|2-x|-|-4-x|$;

9*) $y=|x-4|-|-x-3|+|2-x|+2$;

10) $y=x|x-2|-3$

11) $y=2x|3-x|-2x-4$

12*) $y=\dfrac{|2x-3|-x}{x-1}$;

13*) $y=\dfrac{x+3}{|x+6|+x}$;

14*) $y=\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$;

15*) $y=\left|\dfrac{2x-5}{x-3}\right|$;

16*) $y=\dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}\cdot x^2-4$;

17**) $y=\dfrac{|x-3|+|x+1|}{x-2}$;

18**) $y=\dfrac{|2-x|-|x+4|}{x+1}$;

19**) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^4-x^3+x-1}\cdot|x+1|$;

20**) $y=\dfrac{x^4+2x^3-8x-16}{(x^2+2x+4)\cdot|x+2|}$;

21*) $y=\dfrac{2x}{|x-2|}\cdot\left(3-\dfrac{6x-6}{x}\right)$;

22*) $y=\dfrac{|x^2+4x|}{x}\cdot\left(1-\dfrac{x+1}{x+4}\right)$;

23**) $|y|=\dfrac{3}{|x|-3}+2$;

24**) $|y|=\dfrac{6}{|x|+2}-1$;

25) $y=2\log_3(x+1)$;

26) $y = -0{,}5^{x-3}$;

27) $y = \left|\log_{1,5}(x+2)+1\right| - 2$;

28) $y = \left|2^{x-2} - 3\right| - 1$;

29**) $y = \log_{0,5}(|x| - 2)$;

30**) $|y| = 2^{|x|-3} - 1$;

31) $y = \left|\sin\frac{x}{2} - 1\right| - 0{,}5$;

32) $y = \left|\cos\frac{x}{3} - 0{,}5\right| - 1$;

33*) $y = -\frac{2}{3}\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$;

34**) $y = 2 - 3\left|\cos 2|x|\right|$;

35*) $y = \left|\log_2 |x|\right|$; при каких значениях a уравнение $y = a + 5$ имеет четыре корня?

36**) $y = \left|\frac{1}{3^{|x|+1}}\right|$; сколько корней имеет уравнение $y = a + 1$?

Приложение № 6

Использование преобразований графиков при решении сложных заданий из контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ

1*) Найдите все значения a, при которых имеет более двух различных корней уравнение

$$|x^2-2ax+7|=|6a-x^2-2x-1|.$$

2*) Найдите все значения a, при которых неравенство $\left|\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется при всех значениях x.

3*) Для уравнения $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ найдите все значения a, при которых оно имеет хотя бы один корень из промежутка $[-1;1)$.

4**) Найдите все значения a, при которых уравнение $\left|3\cos^2 x+18\sin x+a\right|=3\cos^2 x+17\sin x-a$ имеет один корень на промежутке $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

5**) Найдите все значения a $(a>0)$, при которых уравнение $\left|1-6\sqrt{x}\right|=4(x+a)$. имеет ровно два различных корня.

6**) Найдите все значения a, при которых на промежутке $(0;\infty)$ уравнение $ax-1=\left|\dfrac{6}{x}-3\right|$ имеет ровно один корень.

7*) Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-8x=2|x-a|-16$ имеет ровно три различных корня.

8**) Найдите все значения a, при которых система уравнений имеет ровно три различных решения

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1.\end{cases}$$

9**) Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше единицы.

10**) При каких значениях a уравнение $\sqrt{5+4x-x^2} = ax - 6a + 3$ имеет ровно один корень?

11**) Найдите все значения a, при которых имеет хотя бы один корень уравнение

$$a^2 + 10|x| + 5\sqrt{3x^2+25} = 5a + 3|3x - 5a|.$$

12**) Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система уравнений

$$4a = ax - y \text{ и } \frac{y^2 - xy - 7y + 5x + 10}{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-y}} - 0.$$

13**) Найдите все положительные значения a, при которых уравнение $\left|1 - 5\sqrt{x}\right| = 2x + 2a$ имеет ровно два корня.

14**) Найдите все значения a, при которых имеет ровно два корня уравнение
$(|x-6| - |x-a|)^2 + 2a^2 + a - 1 = 3a(|x-6| - |x-a|)$.

15**) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - y - 2 + |y^2 - y - 2| = 0, \\ 3x + y = a \end{cases}$$

имеет более трех решений.

16**) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 24y + 108 = |x^2 + y^2 - 36|, \\ x - y = a, \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Владислав Григорьевич Рисберг
Ирина Юрьевна Черникова

Использование преобразований графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модуль (Часть II)

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 03.12. 2015. Формат 60х90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 4,12. Тираж 300 экз. Заказ № 97298
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86