Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

В. Г. Рисберг

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (ЧАСТЬ I)

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.85
ББК 22.1я721
Р 47

Рецензенты:
А. П. Иванов (канд. физ.-мат. наук, профессор НИУ ВШЭ)
И. Б. Сидорова (учитель МБОУ «Лицей№ 1» г. Перми)

Рисберг В. Г.

Р 47 РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (ЧАСТЬ I): Учебное пособие под общей ред. И. Ю. Черниковой / ФГБОУ ВПО ПНИПУ/ В. Г. Рисберг; Издательство «Пушка» – Пермь: 2015. – 56 с.

Рассмотрены вопросы математики по теории элементарных функций. Приводятся многоуровневые задания по решению показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем. Приведены методы решения заданий повышенного уровня сложности, даны методические комментарии по межпредметным связям с дисциплинами химико-биологического цикла.

Предназначено для слушателей курсов повышения квалификации по направлению подготовки: методика обучения математике, химии и биологии; специалистов системы общего образования, студентов педагогических вузов, ориентированных на работу в классах с углубленным изучением математики, химии и биологии.

УДК 372.85

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация интегрированной программы элективных курсов по подготовке одарённых школьников, ориентированных на продолжение образования по математическим, естественнонаучным и инженерным дисциплинам».

ISBN 978-5-98799-146-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основные теоретические положения, касающиеся данной темы, решаются как стандартные уравнения, неравенства и их системы из базовой программы по алгебре, так и задания повышенного уровня сложности с использованием элементов теории многочленов. Кроме того, в пособии рассматриваются некоторые положения и задачи из школьных курсов биологии и других дисциплин с использованием данной темы.

Вторая часть посвящена современным методам решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем, знакомству со степенно-показательной функцией, и с уравнениями и неравенствами, связанными с ней, а также с заданиями высокого уровня сложности, содержащими модули и параметры из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ.

Данное учебное пособие предназначено как для учителей школ, преподавателей математики и методистов, курирующих преподавание математики, так и для учащихся старших классов, обучающихся по программе профильного или углубленного изучения предмета и студентов математических отделений и факультетов педагогических вузов.

Целевое назначение курса – ликвидировать пробелы в знаниях по теме «Показательная и логарифмическая функции», познакомить со степенно-показательными уравнениями, неравенствами и системами уравнений, которые не рассматриваются или очень мало рассматриваются в учебниках алгебры и начал анализа.

Не секрет, что математика является одновременно царицей и служанкой других наук. Ее приложения применяются в физике, химии, биологии, черчении и ряде других школьных предметов. Тема, которой посвящен данный курс (в частности логарифмическая функция и уравнения и неравенства, связанные с ней), имеет широкое использование в курсе физики, химии, биологии, географии, астрономии и ряде других школьных предметов.

Учителя могут использовать пособие при составлении элективных курсов, учащиеся профильных классов (в частности, где математика, химия и биология преподаются по расширенным или углубленным программам) при итоговом повторении материала и подготовке к ЕГЭ, а студенты – для более глубокого понимания темы.

Введение

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, несомненно, занимают центральное место в программе математики 10–11-х классов наряду с такими разделами, как тригонометрия, производная и ее приложения. Заданий, связанных, так или иначе, со степенями, корнями, с показательной и логарифмической функциями, в контрольно-измерительных материалах на едином государственном экзамене по математике за последние годы колеблется от 30% до 40%.

В подготовительных и контрольно-измерительных материалах ЕГЭ в связи с новыми принципами их построения и структурирования, начиная с 2010 года, количество заданий по рассматриваемой тематике несколько сократилось. Однако, в связи с разделением итоговой аттестации за курс полной средней школы на два разных по уровню экзамена (базовый и профильный) актуальность рассматриваемой темы должна снова возрасти. Не исключено, что постепенно рассматриваемая тема снова займет подобающее ей место и в КИМ ЕГЭ.

Учащиеся 10–11-х классов, изучающие математику на повышенном или углубленном уровне, в большинстве своем планируют поступление в вузы и втузы, где предъявляются повышенные требования к математической подготовке абитуриентов. Поэтому на ЕГЭ по математике им необходимо решить не только задания первой части, но и задания более высокого уровня сложности из второй части, в которых также используются знания по рассматриваемым темам. В частности задание № 17 (С3) при условии, что выпускник с ним справится, как и со всеми предшествующими заданиями, даст ему возможность поступить в вузы, где математика изучается общим курсом.

Что касается выпускников этих же классов, желающих поступить в вузы, где математика является профильным предметом и поэтому к математической подготовке абитуриентов предъявляются не просто повышенные, а по-настоящему высокие требования, то им, несомненно, необходимо решить и сложные задания (№№ 20, 21, в которых аспекты рассматриваемой темы безусловно важны). Без выполнения этих заданий набрать нужное количество баллов на престижные с точки зрения математики специальности невозможно.

Не следует при этом забывать, что структура КИМ ЕГЭ по математике за годы своего существования менялась уже 5 раз: в 2003, 2005, 2010, 2014 и 2015 годах. Авторы и разработчики контрольно-измерительных материалов ЕГЭ постоянно экспериментируют, пытаясь усовершенствовать их структуру, поэтому не исключено, что структура и содержание КИМ могут снова измениться. Поэтому рассматриваемая тематика остается важной и со временем может стать еще более актуальной.

Проблемы, связанные с изучением темы, заключаются еще и в том, что разнообразие приемов, которые можно использовать при решении заданий, связанных со степенями и логарифмами, значительно шире, чем это представлено в большинстве учебников. Поэтому выпускники на итоговой аттестации подчас становятся заложниками недостаточных знаний учителя в области использования приемов и алгоритмов, которые можно успешно применять, решая соответствующие задания. В частности на ЕГЭ 2010-2014 годов задания во всех вариантах, напрямую связанные с рассматриваемой темой, требовали глубокое понимание материала. К сожалению, того объема знаний и тех типов заданий, которые представлены в большинстве учебников математики, для успешного решения заданий с развернутыми ответами из второй части ЕГЭ оказалось совершенно недостаточно.

В связи с этим перед учителем математики в десятом классе встают следующие проблемы:

- как добиться того, чтобы учащиеся поняли и запомнили основные формулы, связанные с данной темой;
- как научить учащихся ориентироваться в многообразии свойств функций и алгоритмов решения основных типов заданий по теме;
- как разобраться в сути функционально-графического метода решения уравнений, неравенств и их систем, каковы его разновидности и как научить детей использовать его при решении,
- где найти дополнительный материал по теме, в котором бы методически грамотно разбирались наиболее распространенные алгоритмы и методы решения уравнений и неравенств, не рассматриваемые в рекомендуемых министерством образования учебниках математики.

Это пособие призвано с одной стороны ликвидировать пробелы в знаниях по данной теме, а с другой – разобрать решения основных типов стандартных и некоторых наиболее часто встречающихся разновидностей нестандартных заданий, привести примеры решения степенно-показательных уравнений, неравенств и их систем.

Автор данного пособия поставил перед собой несколько задач:

- систематизировать материал по теме,
- разобрать алгоритмы решения основных типов стандартных и некоторых наиболее часто встречающихся разновидностей нестандартных заданий по рассматриваемой теме,
- познакомить читателя со степенно-показательной функцией и привести примеры решения небольшого количества основных типов степенно-показательных уравнений, неравенств и их систем,
- показать, как знания, полученные при изучении этой темы, могут использоваться при решении некоторых задач из курса биологии и некоторых других предметов.

Данное пособие можно использовать при составлении элективного курса, поддерживающего и усиливающего профильную составляющую в классах различного профиля, связанного с изучением математики на повышенном уровне. Его можно использовать также и для составления самостоятельного профильного или даже углубленного курса, поскольку оно полностью включает в себя все, что необходимо для изучения темы, как на повышенном, так и на углубленном уровне. Объем материала в пособии дает возможность составлять элективные курсы для профильных 10–11-х классов различной продолжительности: от 24 до 48 часов в зависимости от полноты и глубины рассмотрения материала каждой из его частей (глав), причем продолжительность работы по материалу первой части пособия может варьироваться от 12 до 18 часов.

Следует отметить, что объем рассматриваемого материала и количество упражнений в данном курсе таково, что если рассматривать весь приведенный в нем теоретический материал и решать все задания, то не хватит и 48 часов (18 часов на первую часть). Поэтому при составлении элективного курса рекомендуем делать необходимую выборку в соответствии с возможностями и потребностями учащихся и учителя.

В предложенном учебном пособии дано большое количество методических рекомендаций по выполнению тех или иных заданий. Рассматриваемая в нем тема не просто расширена за счет включенных в него дополнительных вопросов, а содержит в большом объеме замечания чисто *методического* характера к некоторым базовым вопросам, на которые учителя, как правило, не обращают достаточного внимания. Что касается нетрадиционных для общеобразовательной программы методов решения некоторых типов уравнений и неравенств, то они в пособии подробно разбираются и сопровождаются большим количеством решенных заданий и обширными методическими рекомендациями.

Материал пособия частично можно использовать в классе, где математика изучается на базовом уровне. Однако значительно более целесообразно его использовать в классах, где математика изучается на повышенном уровне или по программе углубленного изучения предмета. В последнем случае теоретический материал можно использовать в полном объеме и даже несколько расширить его за счет рассмотрения методов решения уравнений и неравенств, основанных на использовании свойств непрерывности и монотонности функций, не вошедших в пособие, а также за счет составления дополнительных заданий, аналогичных тем, которые приведены в нем.

В классе, где математика изучается на базовом уровне, материал, связанный с решением некоторых типов заданий повышенного уровня сложности и с рассмотрением соответствующих алгоритмов, может быть рассмотрен в сокращенном варианте или пропущен вовсе. Это зависит от времени, отпущенного на изучение математики в классе и/или на проведение элективного курса, и от совокупности проблем учителя или учащихся, связанных с изучением материала по данной теме. То же самое можно сказать и о чисто теоретическом материале, фрагменты которого внесены в данное пособие.

Задания в пособии в основном приводятся в порядке усложнения. Количество приведенных упражнений вполне достаточное для проведения курса как на повышенном, так и на углубленном уровнях. Однако при необходимости и при наличии соответствующих возможностей количество заданий можно увеличить, дополнив их набор по желанию учителя (особенно для классов с углубленным изучением математики).

Учителю, проводящему по данному пособию самостоятельный элективный курс, необходимо также продумать удобную систему упражнений для самостоятельной работы в классе и дома с целью закрепления знаний и умений по теме, а также продумать проверочные самостоятельные и контрольные работы, о которых будет сказано в тематическом планировании. Примеры таких работ также будут приведены в главе 5 первой части и главе 9 второй части курса. Количество разнообразных типов упражнений в пособии вполне достаточно для составления самостоятельных работ. Поэтому у учителей не будет необходимости выискивать в других пособиях какие-либо новые типы заданий.

Задания, которые рекомендуется отнести к повышенному или углубленному уровню сложности, отмечены в пособии знаками «*» или «**» соответственно. Это сделано для того, чтобы учителя без труда могли вычленить задания, которые целесообразно рассматривать в классах, где математика изучается на базовом, профильном или углубленном уровнях. Кроме того, как правило, задания приведены парами (по два однотипных). Одно из заданий каждого типа можно разобрать совместно с учениками, второе дать учащимся для самостоятельного освоения в классе или дома.

Примечание 1. Разбиение всех заданий по уровням сложности (базовый, повышенный и углубленный) условно; учитель сам может определять, какое задание, на его взгляд, целесообразно рассматривать в каком классе.

Примечание 2. Если учителю покажется, что какая-то важная, на его взгляд, разновидность упражнений недостаточно усвоена учащимися, он вполне может дополнить комплекс упражнений аналогичными, которые можно почерпнуть как в приложении к данному пособию, так и в различных дидактических материалах по курсу алгебры и начал анализа.

Многие учителя испытывают трудности при решении или оформлении решения некоторых типов сложных заданий, поэтому не используют их при изучении соответствующих тем. В данном пособии для удобства его использования наиболее сложные задания приводятся с подробными решениями, которые сопровождаются полноценными методическими рекомендациями.

Следует отметить, что в разных учебниках математики 10–11-х классов порядок изучения тем различный. В большинстве из них тема «Показательная и логарифмическая функции» изучается в одиннадцатом классе, в других – в десятом. В связи с этим, если учитель будет проводить элективный курс, основываясь на данном пособии, то целесообразность времени его проведения должна определяться порядком изучения тем в основном курсе математики, программа которого привязана к конкретному учебнику. Так, если по программе тема изучается в первом полугодии одиннадцатого класса, то и курс следует проводить в конце первого – начале второго полугодия этого же учебного года, а если по программе тема изучается во втором полугодии десятого класса, то курс лучше проводить в течение первого полугодия одиннадцатого класса.

В последние годы в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ при решении некоторых заданий, в частности при решении задания № 20 (С5), можно успешно использовать функционально-графический метод. В нашем пособии этот метод подробно рассмотрен (в последнем параграфе второй части), поэтому элективный курс, опирающийся на это пособие, впоследствии может сыграть важную положительную роль при итоговом повторении материала и подготовке к единому государственному экзамену.

Структура курса

1 часть

1. Обобщение понятия степени.
2. Показательная функция и ее основные свойства.
3. Логарифмическая функция и ее основные свойства.
4. Решение традиционных видов показательных и логарифмических уравнений и неравенств повышенного уровня сложности.
5. Решение зданий с использованием элементов теории многочленов.

В первых трёх главах кратко изложена теория по рассматриваемой теме, которая сопровождается примерами по преобразованию степеней и логарифмов, по решению простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств, рассматриваемых лишь как иллюстрация к теории. Они являются всего лишь небольшим дополнением к базовому курсу.

В четвертой и пятой главах рассматриваются различные методы, которые не являются традиционными для школы, но очень полезны при решении показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений. Большая часть заданий этих глав имеет повышенный уровень сложности. Среди них есть много нестандартных упражнений, расположенных по мере возрастания уровня их сложности.

Практически во всех главах показательные и логарифмические уравнения и неравенства рассматриваются в нашем курсе вперемежку. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть: показательная и логарифмическая функции относятся к одному и тому же классу функций и представляют собой как бы две стороны одной медали. Поэтому более грамотно при использовании пособия не отделять изучение *показательных* и *логарифмических* уравнений, неравенств и систем уравнений друг от друга, а использовать то разбиение упражнений на группы по уровням сложности и по типам заданий, которое предложено в данном пособии.

Все задания четвертой и пятой глав разбиты именно на такие группы. Эти группы, в свою очередь, состоят из небольших блоков, большинство из которых содержит по 2-4 задания каждого типа для того, чтобы можно было, во-первых, лучше разобраться в каждом из предложенных типов; во-вторых, чтобы предложить учителям хотя бы минимальный задел для самостоятельной работы учащихся при использовании этого материала в школе. Нумерация приведенных в пособии заданий не является сквозной.

Для удобства использования данного пособия можно весь его дидактический материал распечатать на отдельных листах и раздать учащимся в виде приложений.

В соответствии с построением курса его тематическое планирование первой части должно выглядеть следующим образом.

Тематическое планирование

№ темы	Название темы	Кол-во часов	Виды контроля
1.	Обобщение понятия степени.	1	
2.	Показательная функция и ее основные свойства.	2	
3.	Логарифмическая функция и ее основные свойства.	3	Самостоятельная работа
4.	Решение традиционных видов показательных и логарифмических уравнений и неравенств повышенного уровня сложности.	4	Самостоятельная работа
5.	Решение зданий с использованием элементов теории многочленов.	8	Самостоятельная работа, домашняя и классная контрольные работы
	Всего	18	

Глава 1. Обобщение понятия степени

§1. Повторение

Определения степени a^n:

- с натуральным показателем: $n \in N, n \geq 2$ и $n = 1$;

- с целым показателем: $n = -m, m \in N$ и $n = 0$;

- с рациональным показателем: $n = \frac{p}{q}$, где $q \in N,\ p \in Z$.

Примечание.

1) В определении степени с *натуральным* показателем число *a* может быть любым; при определении степени с любым *целым* показателем число *a* не может быть равным нулю; при определении степени с *рациональным* показателем число *a* в общем случае может быть только положительным. Поэтому при обобщении понятия степени, то есть при определении понятия степени с произвольным (*действительным*) показателем число *a* должно быть только положительным.

2) Если мы рассматриваем степень с произвольным *положительным* показателем, то понятие степени можно немного расширить и в качестве возможных значений для *a* брать все неотрицательные числа; тогда дополнительно можно сформулировать определение: если $n > 0$, то a^n определено для всех неотрицательных значений *a*, причем $a^n = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Основные свойства степеней:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

2) $a^n : a^m = a^{n-m}$,

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

$$5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Примечание. Необходимо обратить внимание учащихся, что все пять свойств выполняются для каждого определения степени. При этом при работе со степенями с рациональным показателем эти свойства интерпретируются значительно шире, чем при работе со степенями с целым показателем.

§2. Определение степени с иррациональным (действительным) показателем

Для определения понятия степени с иррациональным показателем достаточно рассмотреть конкретную степень, например, $2^{\sqrt{3}}$, где $\sqrt{3} = 1{,}73205...$

Сначала следует сформировать понятие иррационального числа как предела последовательностей десятичных приближенных значений числа $\sqrt{3}$, взятых по недостатку и по избытку. При этом можно использовать понятия разделяющего элемента двух множеств.

Если тема «Показательная и логарифмическая функции» изучается в одиннадцатом классе, то значит тема «Предел и непрерывность» в том или ином объеме изучалась в десятом. В этом случае понятие предела учащимся хорошо известно, особенно если они изучали алгебру и начала анализа по учебнику А. Г. Мордковича, и обобщение понятия степени займет законное место в изучаемом материале.

В противном случае ученики практически не знакомы с понятием предела или знают его недостаточно хорошо. Тем не менее, на интуитивном уровне с помощью наглядности можно рассмотреть понятие предела, к которому стремятся последовательности десятичных приближений иррационального числа $\sqrt{3}$.

Затем можно, уже не вдаваясь в подробности, поступить так же и с последовательностями степеней с основанием 2, показатели которых являются десятичными приближениями числа $\sqrt{3}$, взятыми по недостатку и по избытку.

Далее, перенося этот процесс (рассуждения) на степень с произвольным показателем, необходимо сделать вывод о том, что мы фактически получили утверждение о том, что для любого положительного числа a определена его степень с любым показателем, то есть для любого числа x существует степень a^x. Запись типа $x \to a^x$ фактически является введением новой функции – показательной: $y = a^x$, но формальное введение определения показательной функции и ее основные свойства будут введены только в следующей главе.

Глава 2. Показательная функция и ее основные свойства

§1. Определение показательной функции

Определение. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется показательной.

При определении показательной функции в классах, где преподавание математики идет на повышенном или углубленном уровне, следует объяснить ограничения на число a:

- ограничение $a > 0$ вытекает из предыдущих рассуждений по обобщению понятия степени;

- ограничение $a \neq 1$ является, с одной стороны, следствием того, что показательная функция при $a = 1$ обращается в очень простую и поэтому совершенно неинтересную с точки зрения изучения ее свойств функцию (вырождается в частный случай линейной функции: $y=1$); а с другой стороны, при введении обратной функции (логарифмической) случай $a=1$ приводит к тому, что логарифмическая функция при этом условии просто не будет существовать.

§2. Основные свойства показательной функции

К основным свойствам показательной функции относятся:

1) ее область определения: $D(a^x)=R$;

2) множество значений: $E(a^x)=R_+$;

3) непрерывность: функция непрерывна на области определения;

4) монотонность: функция монотонна, причем возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Именно эти четыре свойства будут необходимы впоследствии (глава 5) при решении уравнений, неравенств и их систем функционально-графическим методом. К дополнительным свойствам можно отнести особые точки графика показательной функции: точка пересечения с осью ординат: (0; 1) и точка с координатами (1; a), являющаяся по сути характеристической точкой, так как с ее помощью можно по графику показательной функции без труда определить ее основание – значение a.

§3. График показательной функции при различных значениях ее основания

Графическая составляющая очень важна при решении уравнений и неравенств, особенно при использовании функционально-графического метода, который мы рассмотрим подробно в последней главе, поэтому обзор свойств показательной функции необходимо сопровождать иллюстрациями соответствующих графиков.

Кроме того, следует обратить особое внимание на построение различных графиков с помощью преобразований графиков основных функций, изучаемых по общеобразовательной программе (в том числе графиков функций, содержащих модуль). Например, рассмотрим примеры специфических графиков:

1*) $y = |4^{x-2} - 3| - 2$,

2**) $y = |-0{,}5^{1-|x|} + 2| - 3$.

Напомним, что построение графика функции $y = |4^{x-2} - 3| - 2$ предполагает следующую последовательность преобразований графиков:

$y_0 = 4^x$ – график возрастающей показательной кривой;

$y_1 = 4^{x-2} - 3$ – сдвиг на вектор с координатами $(2;-3)$;

$y_2 = |y_1|$ – преобразование модуля функции, при котором часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, отображается симметрично относительно этой оси;

$y_3 = y_2 - 2$ – сдвиг на 2 единицы вниз.

Что касается графика функции $y = |-0{,}5^{1-|x|} + 2| - 3$, то ее, во-первых, сначала, используя свойства модуля, необходимо преобразовать к виду $y = |0{,}5^{1-|x|} - 2| - 3$, а затем, понимая, что преобразование модуля аргумента значительно удобнее выполнять в последнюю очередь, предложить в качестве первоначального варианта построение графика функции вида $y = |0{,}5^{-(x-1)} - 2| - 3$, а затем составить следующую последовательность преобразований:

$y_0 = 0{,}5^x$ – график убывающей показательной кривой;

$y_1 = 0{,}5^{x-1}$ – сдвиг вправо на 1;

$y_2 = 0{,}5^{-(x-1)}$ – симметрия относительно прямой $x = 1$;

$y_3 = y_2 - 2$ – сдвиг вниз на 2;

$y_4 = | y_3 |$ – преобразование модуля функции;

$y_5 = y_4 - 3$ – сдвиг вниз на 3.

Чтобы прийти к графику искомой функции, осталось выполнить преобразование $y_6 = y_5(|x|)$. Оно заключается в том, что часть графика, расположенную справа от оси ординат, следует сохранить, а ту часть графика, которая расположена слева от оси ординат, необходимо убрать, заменив ее на симметричную той части графика функции y_5, которая расположена в правой относительно оси ординат части координатной плоскости.

Понятно, что возможность перенести самое сложное из перечисленных преобразований 4_2 в конец надо бы доказать или хотя бы пояснить. Однако в виду сложности этого доказательства для понимания учеников это целесообразно делать только в тех группах или классах, где математика преподается на углубленном уровне.

Рассмотренная выше последовательность преобразований наиболее рациональная. Понятно, что для того, чтобы ученики могли сами делать все эти преобразования, им необходимо пройти хотя бы краткий предпрофильный или элективный курс по теме «Преобразование графиков функций».

§4. Простейшие показательные уравнения и неравенства

К простейшим следует отнести уравнения и неравенства, имеющие только два члена, которые можно без большого труда представить в виде степеней с одинаковым основанием.

Например:

1) $4^x = 32$; 2) $9^x - 27 > 0$;

3) $\frac{\sqrt{25^{-x}}}{125} - 0{,}008 = 0$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{81}$.

Решение таких уравнений и неравенств не представляет большого труда, поскольку алгоритм их решения прост. Приведем примеры решения:

Задание № 3:

$$\frac{\sqrt{25^{-x}}}{125} - 0{,}008 = 0 \Leftrightarrow \frac{5^{-x}}{5^3} = 0{,}2^3 \Leftrightarrow 5^{-x-3} = 5^{-3} \Leftrightarrow -x-3 = -3 \Leftrightarrow x = 0.$$

Переход от равенства двух значений функции к равенству соответствующих значений аргумента в таких уравнениях основывается на свойстве монотонности показательной функции $y = 5^t$. Требовать от учащихся, которые обучаются по базовой программе, соответствующей аргументации необязательно. Но в классах, где преподавание математики ведется на повышенном или углубленном уровне, ученики должны знать это свойство и понимать этот переход.

Задание № 4: $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x \ge 4$.

Здесь смена знака неравенства произошла из-за того, что функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ является убывающей. Этот переход должен обязательно отражаться в записи решения всеми учениками классов, где преподавание математики ведется на повышенном или углубленном уровне.

Понятно, что аналогичных заданий много в каждом учебнике алгебры и начал анализа, поэтому считаем, что увеличивать количество таких упражнений в нашем курсе нецелесообразно.

Глава 3. Логарифмическая функция и ее основные свойства

§1. Обратимость функций

В отличие от большинства учебников алгебры и начал анализа для 10–11-х классов мы попытаемся ввести понятие логарифмической функции сразу после рассмотрения определения и основных свойств показательной функции. Для этого необходимо несколько сменить акценты в рассмотрении материала и рассмотреть хотя бы на уровне формулировки (то есть без доказательства) теорему о существовании обратной функции, а значит, об обратимости функций.

Если учащиеся хорошо знакомы с понятием обратной (и обратимой) функции и ее свойствами (они могли с этим вопросом ознакомиться при введении обратных тригонометрических функций в десятом классе), то понятие логарифмической функции можно ввести тоже на основе этого понятия. В этом случае можно понятие логарифмической функции ввести раньше, чем рассматривать вопрос «Логарифмы и их свойства».

Если вопрос об обратной функции остался в свое время в тени, то желательно немного углубиться в него до введения понятия логарифмической функции. Примерный план рассмотрения этого вопроса может быть следующим.

1) Понятие функции как на языке теории множеств, так и на языке «величин», и соответствующие определения.

2) Понятия обратной и обратимой функций.

3) Примеры обратимых и необратимых функций.

4) Нахождение обратных функций для хорошо знакомых из курса алгебры основной школы функций (линейной, обратной пропорциональности, квадратичной и других) с рассмотрением их основных свойств.

5) Теорема о существовании обратной функции со следствием. Сформулировать эту теорему можно в более

простом виде, чем это принято в курсе высшей математики. Приведем один из наиболее приемлемых для классов, где преподавание математики ведется на повышенном или углубленном уровне вариантов формулировки этой теоремы.

Если функция $f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором промежутке I и принимает значения с промежутка J, то на промежутке J существует обратная ей функция $f^{-1}(x)$, которая непрерывна, монотонна и принимает значения с промежутка I. При этом характер монотонности сохраняется, то есть если функция $f(x)$ была возрастающей (убывающей), то и обратная ей функция также будет возрастающей (убывающей).

Следствие из этой теоремы, касающееся графиков взаимно обратных функций, тоже можно сформулировать довольно просто. Например, следующим образом: графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

§2. Определение логарифмической функции

Поскольку показательная функция $y = a^x$ при $a > 0,\ a \neq 1$ определена непрерывна и монотонна на множестве R и принимает все значения с промежутка R_+, то по теореме о существовании обратной функции на множестве R_+ существует непрерывная и монотонная функция, которая принимает значения с промежутка R. Эта функция существует объективно, независимо от того, знаем мы о ней или нет. Называется эта функция логарифмической.

Определение: логарифмической функцией называется функция, обратная показательной. Ее обозначают $y = \log_a x$, где число a называется основанием и имеет те же ограничения, что и в показательной функции, то есть $a > 0, a \neq 1$.

§3. Основные свойства логарифмической функции

Поскольку логарифмическая функция введена в соответствии с теоремой о существовании обратной функции, то по этой теореме мы сразу получаем все ее основные свойства:

1) область определения: $D(\log_a) = R_+$,

2) множество значений: $E(\log_a) = R$,

3) функция непрерывна на области определения,

4) функция монотонна, причем возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

График логарифмической функции можно без труда получить, основываясь на следствии из теоремы о существовании обратной функции, с помощью преобразования симметрии графика соответствующей показательной функции относительно прямой $y = x$.

Что касается дополнительного свойства об особых точках графика логарифмической функции, то общей для всех графиков является точка (1; 0), а характеристической – точка с координатами (a; 1), с помощью которой по графику можно найти основание a функции.

Примечание. Рассмотрение свойств логарифмической функции необходимо сопровождать иллюстрациями соответствующих графиков.

§4. Логарифм и его свойства. Использование свойств степеней и логарифмов при изучении биологии

4.1. Поскольку понятие логарифмической функции и ее свойства введены сразу после введения понятия показательной функции и ее свойств, то понятие логарифма можно ввести не как самостоятельное, взятое практически на аксиоматической основе, а через определение логарифмической функции.

Определение логарифма. Логарифмом числа b по основанию a называется значение показательной функции при $x = a$.

На основании этого определения и того факта, что область определения и множество значений показательной и логарифмической функций меняются местами (то есть x и y меняются местами), нетрудно получить знакомое определение логарифма, которое при нашем подходе будет являться основным свойством логарифма: логарифмом числа b по основанию a называется (в нашем случае: является) показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Свойства логарифмов.

1) Основное свойство (его формально-аналитическая запись).
2) Логарифм произведения.
3) Логарифм частного.
4) Логарифм степени.
5) Формула перехода к новому основанию.
6) Следствия (дополнительные свойства), вытекающие из предыдущих свойств.

Примечание. При рассмотрении свойств (логарифм произведения, частного и степени) в классах, где преподавание математики идет по расширенной или углубленной программе, следует обратить внимание на то, что эти свойства не являются тождествами, и их использование при решении уравнений и неравенств может привести к изменению области допустимых значений переменных.

Действительно при переходе от логарифма произведения к сумме логарифмов ОДЗ переменных сужается, а это значит, что при решении уравнения или неравенства мы можем потерять некоторые решения, что можно отнести к грубым ошибкам. Обратный переход (от суммы логарифмов к логарифму произведения) расширяет ОДЗ переменных, то есть могут появиться посторонние корни. Это не так страшно, поскольку все полученные корни можно проверить с помощью ОДЗ исходного уравнения (неравенства).

К дополнительным свойствам логарифмом следует отнести следующие свойства:

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$
$\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$	$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$

Однако требовать обязательных знаний этих свойств следует только в классах, где преподавание математики идет по программе повышенного или углубленного уровня.

4.2. После введения свойств логарифмов необходимо потренироваться в преобразованиях логарифмических выражений. Приведем лишь несколько примеров разного уровня сложности.

1) Найдите значение выражения:

а) $\log_{0,5} 0{,}25 + 1$; б) $0{,}5 \cdot 3^{\log_3 8}$;

в*)$\log_{6,25} 0{,}064$; г*) $\frac{\ln 72 - \ln 9}{\ln 28 - \ln 7}$;

д**) $5^{\log_{\sqrt{5}} 2} + \log_3 \frac{5-2\sqrt{6}}{9} + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

2) Сравните числа:

а*) $\log_{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \sqrt{1{,}25}$ и –1; б**) $\log_{12} 48$ и $\log_6 24$.

Примеров, связанных с преобразованием логарифмических выражений, в учебниках тоже довольно много, поэтому считаем, что увеличивать количество таких упражнений в нашем курсе нецелесообразно.

4.3. Свойства степеней и логарифмов, изучаемые в рамках рассматриваемой темы, можно успешно использовать и при решении различных задач по другим предметам, в частности при решении некоторых прикладных задач из курсов физики, химии, экономики и даже такой казалось бы далёкой от математики науки, как биология. В частности в задачах по темам «Параметры биологического разнообразия», «Модели распределения видового обилия», «Логарифмическое распределение» и другим.

Рассмотрим задачу из школьно курса биологии.

Задача 1. В начальный момент времени было 8 бактерий, через 2 часа после помещения бактерий в питательную среду их число возросло до 100. Через сколько времени с момента помещения в питательную среду следует ожидать колонию в 500 бактерий?

Решение:

По условию: $q = 8,\ t = 2,\ p = 100:8,\ B = 500.$

Используем формулу $T = \frac{t\cdot(\lg B - \lg q)}{\lg p}$. Тогда получим, что требуемое время соответствует значению выражения $T = \dfrac{2\cdot\left(\lg 500 - \lg 8\right)}{\lg\dfrac{100}{8}} \approx \dfrac{2\cdot 1{,}7959}{1{,}0969} \approx 3{,}2745$, то есть колонию в 500 бактерий следует ожидать примерно через 3 ч. 15 мин.

По такой же схеме можно решить другую задачу.

Задача 2. Известно, что соотношение между углеродом C^{12} и его радиоактивным изотопом C^{14} во всех живых организмах постоянно. Период полураспада углерода C^{14} составляет 5760 лет. Определите возраст останков мамонта, найденных в вечной мерзлоте на Таймыре, если относительное содержание изотопа C^{14} в них составляет 26% от его количества в живом организме.

Решение:

Пусть вначале изотопа C^{14} было m, тогда получим: $q = m,\ t = 5760, p = \frac{1}{2},\ B = 0{,}26m.$

Используя формулу из предыдущей задачи, получим:

$$T = \frac{t(\lg B - \lg q)}{\lg p} = \frac{5760\left(\lg\frac{B}{q} - \lg m\right)}{\lg\frac{1}{2}} = \frac{5760 \cdot \lg\frac{0{,}26m}{m}}{-\lg 2} =$$

$$= -\frac{5760\lg 0{,}26}{\lg 2} \approx -\frac{5760 \cdot (-0{,}5850)}{0{,}3010} \approx 11195.$$

Возраст останков мамонта составляет примерно 11200 лет.

§5. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства

К простейшим следует отнести уравнения и неравенства, имеющие только два члена, которые либо записаны в виде логарифмов с одинаковыми основаниями, либо можно без большого труда представить в виде логарифмов с одинаковыми основаниями. Например:

1) $\log_2 x = \log_2 3$,

2) $\log_{0,2}(x-5) - \log_{0,2} 5 = 0$,

3) $\log_{1,5}(1-x) = -1$,

4) $\log_5 x > \log_5 8$,

5) $\log_3 x - \log_3 8 > 0$,

6) $\log_2 \frac{x}{4} \le \log_2 3$,

7) $\log_{0,5} x < -2$,

8) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \ge -3$.

При решении этих уравнений (неравенств), не считая присутствия выражений принципиально новой структуры (логарифмов), у большинства учащихся возникает только одна проблема: ОДЗ.

Приведем примеры оформления решений таких заданий.

Рассмотрим задание № 2.

ОДЗ: $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$. Тогда

$$\log_{0,2}(x-5)-\log_{0,2}5=0;$$

$$\log_{0,2}(x-5)=\log_{0,2}5;$$

$$x-5=5;$$

$x=10$ – удовлетворяет ОДЗ. Ответ: 10.

Рассмотрим задание № 7.

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\geq -3.$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3};$$

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\leq 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0{,}5;\,14].$$

При решении этого неравенства мы избежали расширения ОДЗ, так как сразу учли ограничения при потенцировании, то есть при переходе от неравенства, содержащего логарифмы, к неравенству, не содержащему логарифмы. Конечно, решение этого неравенства можно было провести более традиционным способом, найдя ОДЗ в самом начале. Тогда при потенцировании мы потеряли бы равносильность преобразований, а значит, потребовалось бы проверять все полученные нами решения на ОДЗ исходного неравенства. Какой из этих вариантов решения лучше, сказать трудно: все зависит от ситуации, от громоздкости нахождения ОДЗ или решения самого уравнения.

Аналогичных заданий много в каждом учебнике алгебры и начал анализа, поэтому считаем, что увеличивать количество таких упражнений в нашем курсе нецелесообразно.

Глава 4. Решение традиционных видов показательных и логарифмических уравнений и неравенств повышенного уровня сложности

§1. Стандартные виды упражнений. Использование показательных и логарифмических уравнений при изучении биологии.

1.1. В эту группу включены несложные задания, содержащие показательные и логарифмические функции. Они практически не выходят за пределы базового уровня общеобразовательной программы, а лишь дополняют ее теми видами заданий, которых в учебниках алгебры и начала анализа явно недостаточно.

Начать следует со стандартных типов показательных и логарифмических уравнений. К ним можно отнести как простые уравнения типа, так и более сложные. К более или менее простым можно отнести уравнения вида

1) $3^{x+1}-3^{x-2}-2\cdot 3^{x-1}=180$;

2) $\log_3(x+2)-1=\log_3(x-2)-\log_3(x-3)$.

К более сложным уравнениям, которые необходимо усвоить учащимся на повышенном уровне (на базовом уровне имеет смысл рассмотреть их лишь в ознакомительном порядке), можно отнести следующие типы уравнений:

1) $9^{x+1,5}=14\cdot 3^{2x}+378+\dfrac{25}{9}\cdot 3^{2x+1}$, 2) $\log_{0,5}(x^2-2x+3)=-1$.

Особое внимание на повышенном уровне следует уделить показательным уравнениям, сводимым к квадратным:

1*) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$;

2*) $2^x=2^{2-x}+3$;

3*) $2\cdot 3^{x+2}+6\cdot 3^{2-x}=168$.

Обязательно надо рассмотреть и более сложные логарифмические уравнения с разными основаниями типа:

4*) $\log_2(4x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=2$;

5*) $\log_2(x-6)+\log_4(x+1)=\log_2(x^2-5x-6)$.

Поскольку таких уравнений тоже довольно много в учебниках, и их решение не представляет больших проблем, то не будем на них долго задерживаться.

1.2. Задачи, связанные с решением стандартных уравнений и неравенств, встречаются не только в курсе математики, но и в программах других учебных предметов. В частности есть такое понятие как сложные проценты. Оно содержательно относится к экономике, но инструментарий решения соответствующих задач рассматривается в математике и связан он как раз с решением показательных и логарифмических уравнений.

При этом возникает проблема, которая заключается в том, что при решении прикладных задач, содержательно относящихся к другим предметам, получаются как правило, приближённые значения искомой величины, а значит, возникает необходимость использовать калькулятор.

Приведем пример.

Задача 3. Пусть вкладчик положил в банк 10 000 руб. под ставку 12% годовых. Через сколько лет его вклад удвоится?

Воспользуемся формулой сложных процентов: $S=A\left(1+\frac{P}{100}\right)^n$, где A – начальная сумма вклада, P – процентная ставка (годовая), n – срок хранения вклада (в годах), а S – накопительная (итоговая) сумма вклада.

По условию задачи деньги на вкладе накапливаются по формуле $S=10\,000\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$. Нам необходимо найти значение n, при котором выполняется равенство

$$20\,000=10\,000\left(1+\frac{12}{100}\right)^n,$$

т.е. необходимо решить уравнение $2=\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$.

Решить это уравнение можно по определению логарифма числа. При этом получим, что

$n=\log_{\left(1+\frac{12}{100}\right)}2=\log_{1,12}2$. Вычислим этот логарифм, предварительно перейдя к основанию 10, пользуясь калькулятором:

$n=\log_{1,12}2=\frac{\lg 2}{\lg 1,12}\approx\frac{0,3010}{0,0492}\approx 6,12.$

Таким образом, удвоение вклада произойдет приблизительно через 6 лет и полтора месяца.

§2*. Решение уравнений и неравенств повышенного уровня сложности

На следующем этапе можно уже решать более сложные (по сравнению с базовым уровнем) показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Например, рассмотрим неравенства, которые сводятся к квадратным:

1*) $25^x<6\cdot 5^x-5$;

2*) $4^{x-0,5}-10\cdot 2^{x-1}+8<0$;

3*) $\log^2_{\frac{1}{3}}x+6\log_3 x<16$;

4*) $\log_2(x-3)-2\log_4 3\le 2-\log_2(x+1)$.

Они также решаются вполне традиционным способом, а значит, с ними в принципе можно познакомить наиболее продвинутых учащихся в классах, где математика изучается на базовом уровне.

К этому параграфу мы отнесем и уравнения с переменным основанием. Их в учебниках значительно меньше, поэтому будем приводить по два однотипных задания:

1*) $\log_{x-2}(x^2-6x+10)=1$;

2*) $\log_{x-6}(x^2-3x-6)=1$;

3*) $\log_{2x}(12-4x)=2-\log_{2x}4$;

4*) $2 - \log_{3x} 6 = \log_{3x}(12 - 3x)$;

5*) $\log_x 3 \cdot \log_{81}(4x - 3) = 0{,}5$,

6*) $\log_{36}(6 + 5x) \cdot \log_x 6 = 1$.

Рассмотрим два из этих уравнений: 3* и 5*.

3*: Найдем сначала ОДЗ: $\begin{cases} 2x > 0, \\ 2x \neq 1, \\ 12 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0{,}5, \\ x < 3. \end{cases}$

Получим для x множество: $x \in (0; 0{,}5) \cup (0{,}5; 3)$.

Преобразуем само уравнение:

$$\log_{2x}(12 - 4x) = 2 - \log_{2x} 4.$$

$$\log_{2x} 4 + \log_{2x}(12 - 4x) = \log_{2x}(2x)^2;$$

$$\log_{2x}(48 - 16x) = \log_{2x} 4x^2;$$

$$48 - 16x = 4x^2;$$

$$4x^2 + 16x - 48 = 0;$$

$$\left[\begin{aligned} x &= -6, \\ x &= 2. \end{aligned}\right.$$

Корень $x = -6$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x = 2$.

5*: Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0{,}75;\ 1) \cup (1;\ \infty).$$

Преобразуем само уравнение:

$$\log_x 3 \cdot \log_{81}(4x - 3) = 0{,}5.$$

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{4} \log_3(4x - 3) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\log_3(4x - 3)}{\log_3 x} = 2$$

$$\log_3(4x - 3) = \log_3 x^2$$

$$4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$x = 1$ – посторонний корень.

Ответ: $x = 3$.

Глава 5. Решение заданий с использованием элементов теории многочленов

§1. Элементы теории многочленов

1.1. На этом этапе рассматриваются показательные и логарифмические уравнения и неравенства, для решения которых появляется необходимость расширить (по сравнению с базовой программой) теоретический запас знаний учащихся: потребуется знание небольшого количества специальных дополнительных к общеобразовательной программе теорем, свойств и алгоритмов. Эти задания объективно не являются сложными, они развивают внимание учащихся и расширяют их возможности. При этом нет необходимости сильно расширять базовый учебный материал.

Некоторые уравнения и неравенства, которые будут приведены в этом параграфе, связаны с частными случаями решения уравнений 3-й и 4-й степеней. Для их решения достаточно только рассмотреть основные теоремы теории многочленов (о целых корнях многочлена, Безу с ее следствиями) и схему Горнера. Если такие задания исключить из рассмотрения, то этот параграф предстанет в сокращенном варианте.

1.2. Необходимые элементы теории многочленов.

1) ***Теорема о целых корнях многочлена***. Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями его свободного члена.

Как обобщение этой теоремы можно рассмотреть теорему о рациональных корнях многочлена, в которой говорится, что если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ является корнем многочлена, то m является делителем свободного его члена, а n – делителем его старшего коэффициента. Эта теорема менее удобна для использования, и поэтому ее следует применять значительно реже и только в классах, где математика преподается на углубленном уровне.

2) ***Теорема Безу***. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению многочлена в точке a.

Значительно более важными являются следствия из этой теоремы:

- если a – корень многочлена $P(x)$, то многочлен делится на $x-a$;

- если a – корень многочлена $P(x)$, то многочлен можно представить в виде: $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен, степень которого меньше степени $P(x)$ на 1.

3) ***Схема Горнера (малая)***. Она используется при делении многочлена на двучлен вида $x-a$. При этом первый коэффициент в частном сохраняется, а каждый следующий коэффициент можно найти, умножая предыдущий коэффициент получаемого многочлена-частного на корень и затем складывая полученное произведение со следующим коэффициентом многочлена-делимого.

Например, известно, что число 3 является корнем многочлена $P(x)=2x^3-7x^2+2x+3$. По следствию из теоремы Безу $P(x)$ делится на $x-a$. Можно, конечно, «уголком» разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x-a$. Однако значительно удобнее выполнить это деление с помощью схемы Горнера, которая описана в предыдущем абзаце. Для этого составим соответствующую таблицу:

	2	–7	2	3
3	2	–1	–1	0

В первой строке таблицы находятся коэффициенты многочлена-делимого; во второй: 3 – корень, 2 – первый коэффициент, –1 получили по рассмотренной выше схеме: $-1 = 2 \cdot 3 + (-7)$, следующий коэффициент –1 получен аналогично: $-1 = -1 \cdot 3 + 2$, наконец, 0 – это остаток, который получен аналогичным образом: $0 = -1 \cdot 3 + 3$. В результате получаем многочлен-частное с полученными по схеме Горнера коэффициентами: $Q(x) = 2x^2 - x - 1$. Этот многочлен имеет вторую степень, то есть на 1 меньше, чем $P(x)$. Нетрудно проверить, что $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

В принципе так же можно переходить от многочленов 4-й, 5-й и т.д. степеней к многочлену 2-й степени, корни которого можно без труда вычислить с помощью дискриминанта. Весь этот процесс с использованием всех этих теорем и их следствий также иногда называют схемой Горнера (большой).

1.3. Рассмотрим теперь уравнение 4-й степени, корни которого можно найти с помощью этих теорем: $x^4 - 8x^2 + 4x + 3 = 0$.

В левой части находится многочлен с целыми коэффициентами. Среди делителей его свободного члена находим корень $x = 1$. По схеме Горнера делим многочлен в левой части уравнения на $x + 1$. При этом необходимо учесть, что коэффициент при x^3 равен 0, и его надо обязательно занести в таблицу на соответствующее место:

	1	0	–8	4	3
1	1	1	–7	–3	0

В результате получим многочлен 3$^{\underline{й}}$ степени: $x^3 + x^2 - 7x - 3$. Среди делителей его свободного члена найдем корень $x = -3$. Снова разделим по схеме Горнера:

	1	1	–7	–3
–3	1	–2	–1	0

Получим квадратный трехчлен, корни которого найдем по формуле корней квадратного уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$. Корнями будут числа: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $1;\ -3;\ 1 \pm \sqrt{2}$.

§2. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств с использованием теории многочленов

2.1. Используем описанный выше способ для решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Решим показательное уравнение

$$27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} = 27.$$

Обозначив $t = 3^x$, имеем $t^3 - 13t^2 + 39t - 27 = 0$. Нетрудно заметить, что $t = 1$ (1 – делитель свободного члена) является корнем многочлена, стоящего в левой части. Разделим по схеме Горнера на $t - 1$:

	1	–13	39	–27
1	1	–12	27	0

Получим новый многочлен: $Q(t) = t^2 - 12t + 27$, корни которого найдем из уравнения $t^2 - 12t + 27 = 0$: $t = 9$, $t = 3$. Кроме того, был ранее получен корень $t = 1$. Тогда $3^x = 9$, $3^x = 3$, $3^x = 1$, откуда $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$. Ответ: 0, 1 и 2.

2.2. Решим логарифмическое уравнение $\log_{0,5}(x^3 - 4x^2 + 5x) = -1$. По определению логарифма переходим к равносильному уравнению $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$. Используя схему Горнера, решим это уравнение аналогично предыдущему. Получим $x = 1$, $x = 2$, $x = 1$.

<u>Примечание</u>. В данном случае проверять ОДЗ не надо в силу тождественности всех преобразований.

Ответ: 1 и 2.

Использование этого метода для решения неравенств будет рассмотрено немного позднее.

§3. Задания повышенного уровня сложности

3.1. Задания этого параграфа можно разбить на группы, в каждой из которых собраны задания, похожие либо по конструкции, либо по методу решения.

Например, можно выделить небольшую группу упражнений, представленную двумя неравенствами:

1*) $4^{x-5}-3^{2x-10}>0$; 2*) $6^{3x-2}\le 2^{2x}\cdot 3^{5x-6}$.

Способ их решения немного похож на способ, с помощью которого решают однородные уравнения и неравенства. Сначала необходимо свести обе части неравенства к степеням с одинаковыми показателями, а затем, разделив обе части на выражение стоящее в одной из этих частей, привести их к степеням с одинаковыми основаниями.

Рассмотрим решение неравенства

$$6^{3x-2}\le 2^{2x}\cdot 3^{5x-6}.$$

Разделим обе части на выражение, стоящее в правой части:

$$\frac{6^{3x-2}}{2^{2x}\cdot 3^{5x-6}}\le 1;$$

$$\frac{3^{3x-2}\cdot 2^{3x-2}}{2^{2x}\cdot 3^{5x-6}}\le 1;$$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{2x-4}}\le 1;$$

$$\frac{2^{x-2}}{9^{x-2}} \le 1;$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{x-2} \le \left(\frac{2}{9}\right)^{0};$$

$$x-2 \ge 0;$$

$$x \ge 2.$$

Ответ: $x \in [2; \infty)$.

Решение приведено в виде связки равносильных предложений. В пояснении здесь нуждается только переход от последнего неравенства со степенями к неравенству с их показателями. Пояснение может быть сформулировано следующим образом: «так как функция $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{t}$ убывает».

3.2. Рассмотрим уравнения, при решении которых используется группировка:

1*) $(x^2-4)\cdot\log_3(1-x^2-3x)=0$;

2*) $x\log_{0,5}(x^2-3x-3)+(x-8)\log_{0,5}(x^2-3x-3)$;

3*) $x(x+2)\cdot\log_5(x-2)-6\log_{25}(x^2-x-2)=(x^2+2x)\cdot\log_{0,2}(x+1)$.

Разберем лишь решение последнего уравнения. Произведя группировку, сначала получим

$$(x^2+2x)\cdot(\log_5(x-2)+\log_5(x+1))=3\log_5(x^2-x-2),$$

затем $(x^2+2x)\cdot\log_5(x^2-x-2)=3\log_5(x^2-x-2)$;

$$\log_5(x^2-x-2)\cdot(x^2+2x-3)=0,$$

то есть придем к виду, который имеет уравнение (1*). Учитывая, что $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, мы можем найти ограничения на ОДЗ в исходном уравнении: $x>2$.

Тогда, продолжая решение исходного уравнения, получим

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_5(x^2-x-2)=0,\\ x^2+2x-3=0,\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-x-3=0,\\ x=-3,\ x=1,\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},\\ x>2.\end{cases}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

§4. Задания смешанного типа

4.1. Приведем перечень остальных упражнений из этого параграфа, четыре из которых, как мы видим, относятся к углубленному уровню:

1*) $\log_x 16+\log_{0,5x}64=3$,

2**) $8^x+4^x=24+7\cdot 2^{x+1}$,

3*) $27^x-13\cdot 3^x+12=0$,

4**) $\dfrac{8^x+2^x}{4^x-2}=5$,

5**) $\dfrac{15\cdot 3^x+27}{9^x}=11-3^x$,

6**) $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x=9\cdot 2^{3x}+27\cdot 2^{-x}$, 7*) $\log_2 \cos x = \log_4 \sin 2x$,

8*) $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} \le 0{,}125$,

9*) $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{\frac{3x+3}{2}} < 30{,}04$,

10*) $0{,}5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$,

11*) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$,

12**) $\log_{1/3}(x^3 - x^2 - 5x) \ge -1$.

4.2. Ограничимся подробной записью решения только для пяти заданий: №№ 5**, 6**, 7*, 11* и 12**.

При решении уравнения (7*) ограничения на ОДЗ лучше рассмотреть в самом начале, но находить ОДЗ до самого конца совсем необязательно:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ 2\sin x \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0 \end{cases},$$

то есть x, условно говоря, является углом первой четверти.

Тогда имеем:

$\log_2 \cos x = \log_4 \sin 2x \Rightarrow \log_2 \cos^2 x = \log_2 \sin 2x \Rightarrow \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$.

Учитывая ОДЗ, разделим обе части на $\cos^2 x \neq 0$ и получим $\operatorname{tg} x = 0{,}5$. А так как x – угол первой четверти, то условию удовлетворяют только $x = \operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi n$, где $n \in Z$.

4.3 Решим более сложное задание № 5**:

$$\frac{15 \cdot 3^x + 27}{9^x} = 11 - 3^x.$$

Так как $9^x \neq 0$, то домножим обе части на 9^x и запишем уравнение в удобном для решения виде:

$$15 \cdot 3^x + 27 = 11 \cdot 9^x - 27^x;$$
$$15 \cdot 3^x + 27 = 11 \cdot (3^x)^2 - (3^x)^3;$$

$$(3^x)^3 - 11 \cdot (3^x)^2 + 15 \cdot 3^x + 27 = 0;$$

$3^x = t,$ где $t > 0,$ тогда получим

$$t^3 - 11 \cdot t^2 + 15 \cdot t + 27 = 0.$$

Среди делителей свободного члена найдем целый корень: $t = 3$.

Разделим по схеме Горнера на $t - 3$: получим:

	1	–11	15	27
3	1	–8	–9	0

Получим квадратный многочлен, приравняв который к нулю, получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 8t - 9 = 0,$$

корни которого: $t_1 = -1$, $t_2 = 9$; при этом t_1 не удовлетворяет условию. Выполним обратную замену: $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: $x = 2.$

4.4. Немного отличается предварительными преобразованиями решение задания № 6**:

$$27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x = 9 \cdot 2^{3x} + 27 \cdot 2^{-x}.$$

Для удобства лучше привести степени к положительным показателям. Для этого домножим обе части на 2^{3x}, а затее разделим обе части на 9:

$$27 \cdot 1 + 9 \cdot 2^{4x} = 9 \cdot 2^{6x} + 27 \cdot 2^{2x};$$

$$3 + 2^{4x} = 2^{6x} + 3 \cdot 2^{2x};$$

$$2^{6x} - 2^{4x} + 3 \cdot 2^{2x} - 3 = 0,\ 2^{2x} = t, \text{где } t > 0,$$

тогда получим

$$t^3 - t^2 + 3 \cdot t - 3 = 0 \qquad (1).$$

Среди делителей свободного члена найдем целый корень: $t = 1$. Разделим многочлен по схеме Горнера на $t - 1$:

	1	–1	3	–3
1	1	0	3	0

Получим многочлен, приравняв который к 0, получим квадратное уравнение:

$$t^2 + 3 = 0.$$

Это уравнение корней не имеет, поэтому $t = 1$ – единственный корень.

Выполним обратную замену:

$$2^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Примечание. В этом примере можно было обойтись без теорем из теории многочленов. Действительно после первоначальных преобразований мы получили уравнение вида (1), которое можно решить группировкой его левой части:

$$t^2(t-1) + 3\cdot(t-1) = 0;$$

$$(t-1)(t^2+3) = 0;$$

$$t-1 = 0 \text{ или } t^2+3 = 0.$$

Поскольку уравнение $t^2 + 3 = 0$ корней не имеет, то $t = 1$ – единственный корень уравнения (1).

4.5. Решим неравенство № 11*:

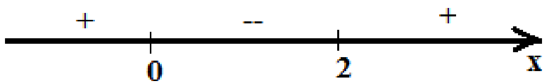
$$25\cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

Его можно решать группировкой:

$$25\cdot(2^x-1) - 5^x\cdot(2^x-1) > 0;$$

$$(2^x-1)\cdot(5^x-25) < 0.$$

Так как функции $y = 2^x$ и $y = 5^x$ монотонные, то в точках, где множители в скобках обращаются в ноль, то есть в точках $x = 0$ и $x = 2$, соответствующие выражения меняют знак, тогда имеем:



Тогда $x \in (0; 2)$.

Примечание. Последнее неравенство можно было решить, используя свойство отрицательности произведения, то есть с помощью двух систем.

4.6. Рассмотрим решение неравенства № 12**: $\log_{\frac{1}{3}}(x^3 - x^2 - 5x) \geq -1$. В нем тоже используются элементы теории многочленов, рассмотренные ранее, применительно к неравенствам. Представим правую часть в виде логарифма с основанием 1/3 и, учитывая, что логарифм с таким основанием убывает, получим:

$$\log_{1/3}(x^3-x^2-5x)\ge -1;$$

$$\begin{cases} x^3-x^2-5x\le 3, \\ x^3-x^2-5x>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-x^2-5x-3\le 0 \text{ (1)}, \\ x(x^2-x-5)>0 \text{ (2)}. \end{cases}$$

Для решения неравенства (1), рассмотрим многочлен $P(x)=x^3-x^2-5x-3$. Проверив делители его свободного члена, получаем, что $x=-1$ является корнем *P(x).* Разделим по схеме Горнера $P(x)$ на $x+1$:

	1	–1	–5	–3
–1	1	–2	–3	0

В результате получим новый многочлен: $Q(x)=x^2-2x-3$. Его корни: $x=-1$, $x=3$. Тогда, разложив по следствию из теоремы Безу многочлен $P(x)$ на множители, получим для неравенства (1): $(x+1)^2(x-3)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;3]$.

Поступив аналогично с неравенством (2), имеем:

$$x\left(x-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)>0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим:

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2};0\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2};\infty\right).$$

Возвращаясь к системе и учитывая, что $\frac{1-\sqrt{21}}{2}<0$ и $0<\frac{1+\sqrt{21}}{2}<3$, получим окончательный результат: $x\in\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2};0\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2};3\right]$.

Остальные задания принципиально нового в себе не несут. Их решения, так или иначе, повторяют уже использованные выше приемы.

§5*. Показательные уравнения и неравенства, связанные со свойствами иррациональных чисел, которые находятся в основании степени

5.1. Этот вопрос напрямую не связан с теорией многочленов. Тем не менее, использование некоторых свойств иррациональных чисел часто дает возможность решать задания, которые без этих свойств бывают очень сложны или даже невыполнимы.

Рассмотрим небольшую группу показательных уравнений и неравенств, связанных со знанием свойств иррациональных чисел. Возьмем только три уравнения и одно неравенство.

Начнем с уравнений:

1) $(7-4\sqrt{3})^x=7+4\sqrt{3}$,

2) $(\sqrt{3}-1)^x=4-2\sqrt{3}$,

3) $(7-4\sqrt{3})^x=97+56\sqrt{3}$.

5.2. Но прежде, чем решать эти уравнения, следует вспомнить о сопряженных иррациональных числах и их свойствах.

1) Два иррациональных числа вида $a-b\sqrt{c}$ и $a+b\sqrt{c}$ называются сопряженными;

2) Основным свойством сопряженных чисел, основанным на формуле сокращенного умножения «разность квадратов», которое позволяет освобождаться от иррациональности, является: $(a-b\sqrt{c})(a+b\sqrt{c})=a^2-b^2c$;

3) Если произведение сопряженных чисел равно 1, то каждое из этих чисел можно представить в виде степени с основанием, равным второму числу.

Например, для уравнения (1): поскольку $(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=49-48=1$, то есть произведение сопряженных чисел равно 1, то получим $7-4\sqrt{3}=\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}=(7+4\sqrt{3})^{-1}$.

Это упражнение следует закрепить, так как оно очень полезно и довольно часто встречается, особенно в более простом случае, таком, например, как $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=1$, тогда $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$.

4) Часто используется и умение преобразовывать подкоренное выражение, которое представлено в виде иррационального числа, к виду квадрата суммы или разности, например, число $49-12\sqrt{5}$ можно представить в виде $(2-3\sqrt{5})^2$, тогда, используя свойство $\sqrt{a^2}=|a|$ и определение модуля числа, имеем $\sqrt{49-12\sqrt{5}}=\sqrt{(2-3\sqrt{5})^2}=\left|2-3\sqrt{5}\right|=3\sqrt{5}-2$.

5.3. Приведем примеры:

- для уравнения (2) так как $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, то, используя полученное соотношение, мы получим $\left(\sqrt{3}-1\right)^x=4-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)^x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\Leftrightarrow x=2$;

- аналогично для уравнения (3) $97+56\sqrt{3}=(7+4\sqrt{3})^2$; а поскольку $(7-4\sqrt{3})\cdot(7+4\sqrt{3})=49-48=1$, то есть

$7+4\sqrt{3}=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}=(7-4\sqrt{3})^{-1}$, то имеем $(7-4\sqrt{3})^{x}=(7-4\sqrt{3})^{-2}$; тогда получим $x=-2$.

Для закрепления умения решать такие уравнения можно использовать другие аналогичные примеры, которые, используя выше рассмотренные свойства, составить самим не представляет большого труда.

5.4.** Несколько сложнее осуществляется решение аналогичных неравенств, но лишь потому, что получаемые неравенства-следствия сами по себе сложнее, чем уравнения-следствия.

Рассмотрим решение только одного такого неравенства. Возьмем неравенство $(2+\sqrt{3})^{x+3}\geq(2-\sqrt{3})^{-\frac{5x-1}{x-2}}$.

Учитывая, что основания степеней – сопряженные числа и их произведение равно 1, то есть $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$, имеем $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$.

Тогда исходное неравенство примет вид $(2+\sqrt{3})^{x+3}\geq(2+\sqrt{3})^{\frac{5x-1}{x-2}}$.

Основание степени $2+\sqrt{3}>1$ (а значит, функция $y=(2+\sqrt{3})^{t}$ возрастающая), тогда получим:

$$x+3\geq\frac{5x-1}{x-2};$$

$$\frac{x^2+x-6-5x+1}{x-2}\geq 0;$$

$$\frac{x^2-4x-5}{x-2}\geq 0;$$

$$\frac{(x-5)(x+1)}{x-2}\geq 0;$$

$$x \in [-1;\, 2) \cup [5;\, \infty).$$

5.5. Приведем примеры составления самостоятельных и контрольных работ по теме. Понятно, что разбиение заданий по работам довольно условно. Каждый учитель вправе изменить как структуру приведенных ниже самостоятельных и контрольных работ, так и их наполнение конкретными видами заданий.

<u>Самостоятельная работа</u>:

1. Разложите многочлен $4x^3 - 8x^2 + 3x + 1$ на множители.

2. Решите уравнение

$$2(\log_2 x)^4 + (\log_2 x)^3 - 33(\log_2 x)^2 - 16\log_2 x + 16 = 0.$$

<u>Контрольная работа</u>:

1. Является ли число 5 решением уравнения $\frac{\log_{6-x}(11-2x)}{x^3-4x^2-25} = 0$?

2. Докажите, что число 8 – единственный рациональный корень уравнения

$$0{,}5(\log_3(x+1))^4 - (\log_3(x+1))^2 - 3\log(x+1) + 2 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$27^{x+\frac{1}{3}} - 35 \cdot 9^x + 23 \cdot 3^{x+1} + 27 \le 0.$$

Что касается домашней контрольной работы, то в нее можно ввести значительно больше по количеству и разнообразию заданий, в том числе и задания, относящиеся к предыдущим главам курса. Примерный объем домашней контрольной работы может составлять от 10 до 20 заданий, которые должны принципиально отличаться по уровню сложности и по времени, затрачиваемому на их выполнение.

Список литературы

1. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2012. – 336 с.

2. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 11 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2012. – 288 с.

3. *Галицкий М. Л.* Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Методические рекомендации и дидактические материалы / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1986. – 352 с.

4. *Иванов А.А* Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: Физматкнига, 2011. – 52 с.

5. *Иванов А.А* Тематические тесты для систематизации знаний по математике: Ч.2 / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: МФТИ, 2002. – 176 с.

6. *Иванов А.А* Тесты и контрольные работы по математике / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: МФТИ, 2010. – 304 с.

7. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 17 мая 2012 г. N 413 г. Москва <Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования> // Российская газета от 21 июня 2012 г. Url: http://www.rg.ru/2012/06/21/obrstandart-dok.html (Дата обращения: 30.11.2015).

8. *Рисберг В. Г.* Курсы по выбору/ В. Г. Рисберг. – Пермь: ПКИПКРО, 2008. – 44 с.

9. *Рисберг В. Г.* Решение показательных, логарифмических, степенных и степенно-показательных уравнений, неравенств и систем уравнений / В. Г. Рисберг. – Пермь: ПКИПКРО, 2011. – 52 с.

10. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под редакцией М. И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1988. – 516 с.

Приложение № 1

Простейшие уравнения и неравенства

1) $2^x = 16\sqrt{2}$;

2) $0{,}1^{x-0{,}5} \cdot 2\sqrt{10} = 5^{3x-1} \cdot 2^{3x}$;

3) $\log_{4{,}5}(x - 12{,}75) = 2$;

4) $\log_2(x+7) = \log_2(x-4)$;

5) $32^{x-1{,}5} > 8\sqrt{2}$;

6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$;

7) $\log_3(x-3) < \log_3(5-x)$;

8) $\log_{0{,}25}(3x-5) \ge -2$.

Приложение № 2

Решение упражнений повышенного уровня сложности

1) $6^{3x-2} \le 2^{2x} \cdot 3^{5x-6}$;

2) $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} \le 0,125$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^3 - 4x^2 + 5x) = -1$;

4) $\log_{x-2}(x^2 - 6x + 10) = 1$;

5) $2^x = 2^{2-x} + 3$;

6) $3^{x+1} - 3^{x-2} - 2 \cdot 3^{x-1} = 180$;

7) $2 \cdot 3^{x+2} + 6 \cdot 3^{2-x} = 168$;

8) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} = 27$;

9) $\log^2_{\frac{1}{3}} x + 6\log_3 x < 16$;

10) $4^{x-0,5} - 10 \cdot 2^{x-1} + 8 < 0$;

11) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$;

12) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$;

13) $4^{x-5} - 3^{2x-10} > 0$;

14) $\log_2 \cos x = \log_4 \sin 2x$;

15) $\log_3(x+2) - 1 = \log_3(x-2) - \log_3(x-3)$;

16) $9^{x+1,5} = 14 \cdot 3^{2x} + 378 + \frac{25}{9} \cdot 3^{2x+1}$;

17) $0{,}008^{x}+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3x+3}{2}}<30{,}04$;

18) $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$;

19) $\log_x 3\cdot\log_{81}(4x-3)=0{,}5$;

20) $\log_x 6\cdot\log_{36}(6+5x)=1$;

21) $\log_x 16+\log_{0,5x} 64=3$;

22) $(x^2-4)\cdot\log_3(1-x^2-3x)=0$;

23) $(9-x^2)\cdot\log_{\frac{3}{5}}(2x^2-10x+11)=0$;

24) $x\log_{0,5}(x^2-3x-3)+(x-8)\log_{0,5}(x^2-3x-3)=0$;

25) $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^{x}=9\cdot 2^{3x}+27\cdot 2^{-x}$;

26) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3-x^2-5x)\geq -1$;

27) $\log_2(x-3)-2\log_4 3\leq 2-\log_2(x+1)$;

28) $\log_{\frac{1}{2}}\sin x=\log_{\frac{1}{4}}\sin\dfrac{x}{2}$;

29) $x(x+2)\cdot\log_5(x-2)-6\log_{25}(x^2-x-2)=(x^2+2x)\cdot\log_{0,2}(x+1)$.

Приложение № 3

Решение более сложных с использование специфических алгоритмов

1) $\log_{x-1}(x^2-3) \geq 2$;

2) $\log_{4-x}(x^2-2) \leq 1$;

3) $(7-4\sqrt{3})^x = 7+4\sqrt{3}$;

4) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$;

5) $(2\sin x)^{\cos x} = 1$;

6) $x^{1,25-2\cos 3x} = \sqrt[4]{x}$;

7) $(\sqrt{3}-1)^x = 4-2\sqrt{3}$;

8) $(7-4\sqrt{3})^x = 97+56\sqrt{3}$;

9) $2^{\sin^2 x} + 4\cdot 2^{\cos^2 x} = 6$;

10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2 x}$.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Владислав Григорьевич Рисберг

Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности (Часть I)

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 15.12.2015. Формат 60x90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 3,5. Тираж 300 экз. Заказ № 97917
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86