Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

В. Г. Рисберг, И. Ю. Черникова

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (ЧАСТЬ II)

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.85
ББК 22.1я721
Р 47

Рецензенты:

А. П. Иванов (канд. физ.-мат. наук, профессор НИУ ВШЭ)
И. Б. Сидорова (учитель МБОУ «Лицей№ 1» г. Перми)

Рисберг В. Г., Черникова И. Ю.

Р 47 РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (ЧАСТЬ II): Учебное пособие / ФГБОУ ВПО ПНИПУ/ В. Г. Рисберг, И. Ю. Черникова. – Пермь: Издательство «Пушка», 2015. – 64 с.

Рассмотрены вопросы математики по теории элементарных функций. Приводятся многоуровневые задания по решению показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем. Приведены методы решения заданий повышенного уровня сложности, даны методические комментарии по межпредметным связям с дисциплинами химико-биологического цикла.

Предназначено для слушателей курсов повышения квалификации по направлению подготовки: методика обучения математике, химии и биологии; специалистов системы общего образования, студентов педагогических вузов, ориентированных на работу в классах с углубленным изучением математики, химии и биологии.

УДК 372.85

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация программного комплекса творческих и исследовательских заданий по математическим и естественнонаучным дисциплинам для профильных школ и классов с углублённым изучением предметов».

ISBN 978-5-98799-147-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основные теоретические положения, касающиеся данной темы, решаются как стандартные уравнения, неравенства и их системы из базовой программы по алгебре, так и задания повышенного уровня сложности с использованием элементов теории многочленов. Кроме того, в пособии рассматриваются некоторые положения и задачи из школьных курсов биологии и других дисциплин с использованием данной темы.

Вторая часть посвящена современным методам решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем, знакомству со степенно-показательной функцией, и с уравнениями и неравенствами, связанными с ней, а также с заданиями высокого уровня сложности, содержащими модули и параметры из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ.

Данное учебное пособие предназначено как для учителей школ, преподавателей математики и методистов, курирующих преподавание математики, так и для учащихся старших классов, обучающихся по программе профильного или углубленного изучения предмета и студентов математических отделений и факультетов педагогических вузов.

Целевое назначение курса – ликвидировать пробелы в знаниях по теме «Показательная и логарифмическая функции», познакомить со степенно-показательными уравнениями, неравенствами и системами уравнений, которые не рассматриваются или очень мало рассматриваются в учебниках алгебры и начал анализа.

Во второй части пособия приоритет отдан наиболее часто встречающимся разновидностям нестандартных заданий, использованию современных методов решения сложных заданий, даются примеры решения степенно-показательных уравнений и неравенств, приводятся задачи из школьных курсов биологии и других предметов, при решении которых используется материал данной темы.

Учителя могут использовать пособие при составлении элективных курсов, учащиеся профильных классов (в частности, где математика, химия и биология преподаются по расширенным или углубленным программам) при итоговом повторении материала и подготовке к ЕГЭ, а студенты – для более глубокого понимания темы.

Введение

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, несомненно, занимают центральное место в программе математики 10–11-х классов наряду с такими разделами, как тригонометрия, производная и ее приложения. Заданий, связанных, так или иначе, со степенями, корнями, с показательной и логарифмической функциями, в контрольно-измерительных материалах на едином государственном экзамене по математике за последние годы колеблется от 30% до 40%.

Учащиеся 10–11-х классов, изучающие математику на повышенном или углубленном уровне, в большинстве своем планируют поступление в вузы и втузы, где предъявляются повышенные требования к математической подготовке абитуриентов. Поэтому на ЕГЭ по математике им необходимо решить не только задания первой части, но и задания более высокого уровня сложности из второй части, в которых также используются знания по рассматриваемым темам. В частности задание № 17 (С3) при условии, что выпускник с ним справится, как и со всеми предшествующими заданиями, даст ему возможность поступить в вузы, где математика изучается общим курсом.

Что касается выпускников этих же классов, желающих поступить в вузы, где математика является профильным предметом и поэтому к математической подготовке абитуриентов предъявляются не просто повышенные, а по-настоящему высокие требования, то им, несомненно, необходимо решить и сложные задания (№№ 20, 21, в которых аспекты рассматриваемой темы безусловно важны). Без выполнения этих заданий набрать нужное количество баллов на престижные с точки зрения математики специальности невозможно.

Как отмечалось уже в первой части пособия, проблемы, связанные с изучением темы, заключаются еще и в том, что разнообразие приемов, которые можно использовать при решении заданий, связанных со степенями и логарифмами, значительно шире, чем это представлено в большинстве учебников. Поэтому выпускники на итоговой аттестации подчас становятся заложниками недостаточных знаний учителя в области использования приемов и алгоритмов, которые можно успешно применять, решая соответствующие задания. В частности на ЕГЭ 2010-2014 годов задания во всех вариантах, напрямую связанные с рассматриваемой темой, требовали глубокое понимание материала. К сожалению, того объема знаний и тех типов заданий, которые представлены в большинстве учебников математики, для успешного решения заданий ЕГЭ оказалось совершенно недостаточно.

Вторая часть пособия направлена на то, чтобы:

- ликвидировать пробелы в знаниях по рассматриваемой теме;

- разобрать решения наиболее часто встречающихся разновидностей нестандартных заданий по теме;

- познакомить учащихся и учителей математики со степенно-показательной функцией и привести примеры решения степенно-показательных уравнений, неравенств и их систем;

- познакомить с некоторыми разновидностями функционально-графического метода, с помощью которого решается большинство сложных заданий, в том числе с задания типа № 20 (С5) ЕГЭ по математике; этот метод рассмотрен довольно подробно (особенно в последнем параграфе), поэтому это пособие, впоследствии может сыграть важную положительную роль при итоговом повторении материала и подготовке к единому государственному экзамену;
- показать, как знания, полученные по рассматриваемой теме, могут использоваться при решении некоторых задач из школьного курса биологии и других предметов.

Данное пособие можно использовать при составлении элективного курса, поддерживающего и усиливающего профильную составляющую в классах различного профиля, связанного с изучением математики на повышенном уровне. Его можно использовать также и для составления самостоятельного профильного или даже углубленного курса, поскольку оно полностью включает в себя все, что необходимо для изучения темы, как на повышенном, так и на углубленном уровне.

Объем материала в пособии (особенно во второй его части) дает возможность составлять элективные курсы для 10–11-х классов различной продолжительности: от 24 до 48 часов (причем вторая часть может занять от 12 до 30 часов) в зависимости от полноты и глубины рассмотрения материала каждой из его частей.

Следует отметить, что объем рассматриваемого материала и количество упражнений в данном курсе таково, что если рассматривать весь приведенный в нем теоретический материал и решать все задания, то не хватит и 48 часов, поэтому при составлении элективного курса рекомендуем делать необходимую выборку в соответствии с возможностями и потребностями учащихся.

Данное пособие содержит большое количество замечаний методического характера к некоторым базовым вопросам, на которые учителя, как правило, не обращают достаточного внимания. В нём приведены нестандартные методы решения некоторых типов уравнений и неравенств, которыми изобилует вторая часть пособия.

Материал частично можно использовать в классе, где математика изучается на базовом уровне. Однако более целесообразно его использовать в классах, где математика изучается на повышенном уровне или по программе углубленного изучения предмета. В последнем случае теоретический материал можно использовать в полном объеме и даже несколько расширить его за счет рассмотрения методов решения уравнений и неравенств, основанных на использовании свойств непрерывности и монотонности функций, не вошедших в пособие, а также за счет составления заданий, аналогичных приведенным в нем.

В классе, где математика изучается на базовом уровне, материал, связанный с решением некоторых типов заданий повышенного уровня сложности и с рассмотрением соответствующих алгоритмов, может быть рассмотрен в сокращенном варианте или пропущен вовсе. Это зависит от времени, отпущенного на изучение математики в классе и/или на проведение элективного курса, и от совокупности проблем учителя или учащихся, связанных с изучением материала по данной теме. То же самое можно сказать и о чисто теоретическом материале, фрагменты которого внесены в данное пособие.

Задания в пособии в основном приводятся в порядке усложнения. Количество приведенных упражнений вполне достаточное для проведения курса как на повышенном, так и на углубленном уровнях. Однако при необходимости и при наличии соответствующих возможностей количество заданий можно увеличить, дополнив их набор по желанию учителя (особенно для классов с углубленным изучением математики).

Учителю, проводящему по данному пособию самостоятельный элективный курс обучения учащихся, необходимо также продумать удобную для этого систему упражнений для самостоятельной работы в классе и дома с целью закрепления знаний и умений по теме, а также продумать проверочные самостоятельные и контрольные работы, о которых будет сказано в тематическом планировании. Примеры таких работ также будут приведены в главе 9 второй части курса. Количество разнообразных типов упражнений в пособии вполне достаточно для составления самостоятельных работ. Поэтому у учителей не будет необходимости выискивать в других пособиях какие-либо новые типы заданий.

Задания, которые рекомендуется отнести к повышенному или углубленному уровню сложности, отмечены в пособии знаками «*» или «**» соответственно. Это сделано для того, чтобы учителя без труда могли вычленить задания, которые целесообразно рассматривать в классах, где математика изучается на базовом, профильном или же на углубленном уровне.

Примечание 1. Разбиение всех заданий по уровням сложности (базовый, повышенный и углубленный) условно; учитель сам может определять, какое задание, на его взгляд, целесообразно рассматривать в каком классе.

Примечание 2. Если учителю покажется, что какая-то важная, на его взгляд, разновидность упражнений недостаточно усвоена учащимися, он вполне может дополнить комплекс упражнений аналогичными, которые можно почерпнуть как в приложении к данному пособию, так и в различных дидактических материалах по курсу алгебры и начал анализа.

Многие учителя испытывают трудности при решении или оформлении решения некоторых типов сложных заданий, поэтому не используют их при изучении соответствующих тем. В данном пособии для удобства его использования наиболее сложные задания приводятся с подробными решениями, которые сопровождаются полноценными методическими рекомендациями.

Следует отметить, что в разных учебниках математики 10–11-х классов порядок изучения тем различный. Наиболее удобный вариант получится, если по программе тема изучается во втором полугодии десятого класса. Тогда курс лучше проводить в течение первого полугодия одиннадцатого класса.

Структура курса

II часть

Пособие состоит из девяти глав, которые разбиты на параграфы. Вторая часть пособия включает в себя четыре главы.

Глава 6. Метод рационализации.

Глава 7. Решение заданий, содержащих степенно-показательные функции и системы уравнений и неравенств.

Глава 8. Решение заданий высокого уровня сложности и нестандартных заданий.

Глава 9. Решение заданий с модулями и параметрами из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ.

В шестой главе рассматриваются различные методы, которые не являются традиционными для школы, но очень полезны при решении показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений. Большая часть заданий этой главы имеет повышенный уровень сложности. Среди них есть много нестандартных упражнений, которые расположены по мере возрастания уровня их сложности.

Седьмая глава посвящена степенно-показательной функции и уравнениям, неравенствам и их системам, связанным с этой функцией, а восьмая и девятая – решению наиболее сложных и нестандартных заданий. В девятой главе собраны задания по рассматриваемой теме, содержащие модули и параметры. Многие из них представляют собой нестандартные типы заданий высокого уровня сложности, которые часто остаются за пределами изучения в школе, но довольно часто встречаются в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике.

Практически во всех главах показательные и логарифмические уравнения (неравенства) рассматриваются в нашем курсе вперемежку. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть: показательная и логарифмическая функции относятся к одному и тому же классу функций и представляют собой как бы две стороны одной медали, а не самостоятельные, изучаемые отдельно по совершенно различным правилам функции. Поэтому более грамотно при использовании пособия не отделять изучение *показательных* и *логарифмических* уравнений, неравенств и систем уравнений друг от друга, а использовать то разбиение упражнений на группы по уровням сложности и по типам заданий, которое предложено в данном пособии.

Во вторую часть пособия включены наиболее интересные и сложные задания (в том числе задания задачи из курса биологии и других школьных предметов). Особый интерес для учащихся классов с углубленным изучением математики и для большинства учителей представляют задания с модулями и параметрами, о которых идет речь в последней главе. Это самая большая и самая значимая глава в пособии.

Для удобства использования данного пособия можно весь его дидактический материал распечатать на отдельных листах и раздать учащимся в виде приложений (смотри приложения в конце пособия).

В соответствии с построением курса его тематическое планирование должно выглядеть приблизительно следующим образом.

Тематическое планирование

№ темы	**Название темы**	**Кол-во часов**	**Виды контроля**
6.	Метод рационализации.	6	Самостоятельная работа
7.	Решение заданий, содержащих степенно-показательные функции и системы уравнений и неравенств.	10	Две самостоятельные работы, домашняя работа и контрольная работа
8.	Решение заданий высокого уровня сложности и нестандартных заданий.	2	
9.	Решение заданий с модулями и параметрами из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ.	12	Самостоятельная работа, классная и домашняя контрольные работы
	Всего	30	

Глава 6. Метод рационализации

§1. Основная идея метода рационализации и его использование при решении показательных и логарифмических неравенств

1.1. Большие проблемы обычно связаны с решением неравенств с переменной в основании логарифма. Для их решения можно рассмотреть два разных метода решения. Один из них традиционный, а другой – с использованием свойств монотонных функций, вытекающих из определений возрастающей и убывающей функций. Этот метод носит название *метода рационализации.* Его можно использовать не только в случае, когда в основании логарифма есть переменная величина, но и в других важных случаях. Точнее этот метод связан, в первую очередь, с монотонностью функций. Он заключается в том, что показательное, логарифмическое или другое неравенство, содержащее монотонную функцию, быстро сводится к рациональному неравенству.

Дело в том, что для возрастающей функции разность двух ее значений имеет тот же знак, что и разность соответствующих значений ее аргумента. Для убывающей функции разность двух ее значений имеет противоположный знак по сравнению со знаком разности соответствующих значений ее аргумента. Чуть ниже докажем и продемонстрируем использование этих свойств. Этим методом, к сожалению, очень редко пользуется учителя математики. Рассмотрим оба метода решения на примере неравенства $\log_{x-1}(x^2-3)\geq 2$.

1.2. Сначала используем *традиционный* метод решения:

$$\log_{x-1}(x^2-3)\geq 2 \Leftrightarrow \log_{x-1}(x^2-3)\geq \log_{x-1}(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ x^2-3\ge (x-1)^2 \\ x^2-3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1 \\ x^2-3\le (x-1)^2 \\ x^2-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x^2-3\ge x^2-2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ x^2-3\le x^2-2x+1 \\ x^2>3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{3} \\ x>\sqrt{3} \end{array}\right. \\ x\le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ \sqrt{3}<x<2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(\sqrt{3};\,2)\cup(2;\,\infty)$.

Примечание. Символическая запись для большинства учащихся сложна и непривычна, но мы приводим ее здесь исключительно по двум причинам:

- приобщение учителей математики, студентов педагогических вузов и наиболее подготовленных учащихся старших классов к математическим записям такого рода;
- ради компактности, однозначности и стройности записей в пособии.

1.3. Прежде чем воспользоваться вторым методом решения, напомним некоторые теоретические положения, знакомые всем учителям из общеобразовательного курса алгебры и начал анализа.

Функция $f(x)$ *называется возрастающей*, если для любых двух значений из области ее определения большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Из этого определения следует, что *для возрастающей функции* $f(x)$:

- если $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$;
- если $x_2 - x_1 < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$,

то есть *разности* $x_2 - x_1$ *и* $f(x_2) - f(x_1)$ *имеют один и тот же знак*.

Аналогично *для убывающей функции* $f(x)$ можно сделать вывод, что разно*сти* $x_2 - x_1$ *и* $f(x_2) - f(x_1)$ *имеют всегда противоположные знаки*.

Это свойство (оба случая) можно хорошо использовать при решении неравенств, содержащих любые монотонные функции (показательные, логарифмические, иррациональные и другие), где левая часть, которая представляет собой разность или частное разностей двух значений монотонной функции, сравнивается с нулем.

Например, неравенство

$$\frac{3^{2x^2-4x+1} - 3^{x^2-2x}}{0{,}5^{x^3+3x-5} - 0{,}5^{x^3-x-3}} \geq 0 \qquad (1)$$

равносильно значительно более простому рациональному неравенству

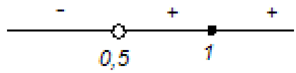
$$\frac{(2x^2-4x+1)-(x^2-2x)}{(x^3+3x-5)-(x^3-x-3)} \leq 0 \qquad (2),$$

которое решается с помощью обычного метода интервалов, знакомого всем с девятого класса:

$$\frac{x^2-2x+1}{4x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4(x-0{,}5)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0{,}5) \cup \{1\}.$$

<u>Примечание 1</u>. Поскольку в числителе неравенства (1) два значения возрастающей функции $y = 3^t$, а в знаменателе два значения убывающей функции $y=0{,}5^t$, то при переходе к аргументам знак разности в числителе не меняется, а в знаменателе меняется, поэтому в неравенстве (2) знак у всей дроби сменился.

Примечание 2. Последний переход в решении неравенства (2) сделан на основе метода интервалов с использованием обычной графической интерпретации:



Примечание 3. При решении логарифмического или любого другого неравенства, имеющего ограничения на область допустимых значений переменной, при использовании, как первого, так и второго метода, приходится, так или иначе, учитывать ОДЗ. Поэтому решение логарифмического неравенства в любом случае выглядит более сложным.

1.4. Рассмотрим решение неравенства $\log_{x-1}(x^2-3)\ge 2$, используя метод рационализации. Для этого перейдем в левой части к логарифмам по любому основанию (лучше большему единицы, например, к основанию 3). Одновременно с этим перенесем число 2 в левую часть и приведем к общему знаменателю. В результате получим:

$$\log_{x-1}(x^2-3)\ge 2,$$

$$\frac{\log_3(x^2-3)}{\log_3(x-1)}-2\ge 0,$$

$$\frac{\log_3(x^2-3)-2\log_3(x-1)}{\log_3(x-1)-0}\ge 0,$$

$$\frac{\log_3(x^2-3)-\log_3(x-1)^2}{\log_3(x-1)-\log_3 1}\ge 0.$$

Последнее неравенство имеет вид, необходимый для метода рационализации. Поскольку в числителе и знаменателе – разности двух значений возрастающей функции $y=\log_3 t$, то при переходе к аргументам знаки разностей не меняются, поэтому с учетом ОДЗ получим

$$\frac{\log_3(x^2-3)-\log_3(x-1)^2}{\log_3(x-1)-\log_3 1}\geq 0,$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x^2-3)-(x-1)^2}{(x-1)-1}\geq 0\\ x^2-3>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-4}{x-2}\geq 0\\ |x|>\sqrt{3}\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{3}\\ x>\sqrt{3}\end{array}\right.\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>\sqrt{3}\\ x\neq 2\end{cases},$$

то есть $x\in(\sqrt{3};\,2)\cup(2;\,\infty)$.

Ответ: $x\in(\sqrt{3};\,2)\cup(2;\,\infty)$.

Примечание 1. ОДЗ можно найти отдельно, как это обычно и делается при решении традиционным методом. Стоит заметить, что в случае использования метода рационализации мы почти сразу избавляемся от логарифмов, поэтому лучше не находить отдельно ОДЗ, а переходить сразу к системе, равносильной исходному неравенству, и решать ее без каких-либо дополнительных ограничений, как это сделано выше. При этом мы использовали символьную запись решения.

Примечание 2. Не смотря на то, что второй метод решения кажется длиннее, чем первый, на самом деле, если его освоить (а для учащихся классов, где преподавание математики идет на повышенном, а тем более углубленном уровне, это вполне реально), он проще для осуществления, чем первый. Кроме того, запись решения в данном случае приведена более подробно, чем при решении с использованием традиционного метода решения. Это сделано потому, что о нем имеет представление лишь небольшое количество учителей математики.

Примечание 3. Уровень сложности заданий, где можно применить этот метод, является довольно высоким (по спецификации КИМ ЕГЭ 2015 года он напрямую хорошо может использоваться при решении задания № 17). Рассматривать его при решении таких заданий в классах, обучающихся по программе повышенного уровня, целесообразно только с наиболее подготовленными учащимися. Что касается классов с углубленным изучением математики, то его вполне можно рассмотреть со всеми учащимися.

Примечание 4. В справочниках по методам решения показательных и логарифмических неравенств предлагается обычно использовать формальный переход от разности $\log_a f(x) - 1$ к произведению $(a-1)\cdot(f(x)-a)$ или от выражения $\log_a f(x)$ к произведению $(a-1)\cdot(f(x)-1)$, поскольку они имеют один и тот же знак. Эти переходы *по формулам* заменяют описанный *метод* решения. При этом следует отметить, что эта замена, как правило, выполняется учащимися бездумно, без понимания сути самого процесса решения и соответственно в результате, во-первых, вырабатывает у ученика чисто формальный подход к решению таких неравенств, а во-вторых, ведет к бессмысленным ошибкам.

§2. Решение заданий высокого уровня сложности с помощью метода рационализации

2.1. Прежде чем рассмотреть решение этим методом более сложного неравенства, обратим внимание еще на одно свойство, практически не используемое в преподавании.

Всем известно, что если число больше единицы, то его квадрат (куб и т.д.) также больше единицы, а если неотрицательное число меньше единицы, то его квадрат (куб и т.д.) также меньше единицы. Это понятно как с точки зрения здравого смысла, так и из свойств показательной функции. Этот факт можно использовать и при решении сложных неравенств.

2.2. Решим неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2$**.

Перенеся число 2 в левую часть, перейдя в ней к основанию 2 и приведя к общему знаменателю, получим

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)-\log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2|-\log_2 1}\le 0\,.$$

Поскольку функция $y=\log_2 t$ возрастает, то при переходе к аргументам знак разностей не меняется:

$$\begin{cases}\dfrac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1}\le 0 \ (1),\\ |x+2|>0,\\ |x+2|\ne 1,\\ 4+7x-2x^2>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{3x(x-1)}{(x+1)(x+3)}\le 0,\\ x\ne -2,\\ x\ne -1,\\ x\ne -3,\\ -0{,}5<x<4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1}\le 0,\\ x+2\ne 0,\\ x+2\ne 1,\\ x+2\ne -1,\\ 2x^2-7x-4<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-3\\ -1<x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -0{,}5<x<4.\end{cases}$$

В результате получим $x \in \left(-0{,}5;\, 0\right] \cup \left[1;\, 4\right)$. Мы снова решили неравенство с использованием метода рационализации и при этом использовали выше упомянутое свойство при переходе от неравенства (1) к его следствию.

2.3. Этот же метод можно использовать и при решении логарифмических неравенств без переменной в основании логарифма. Например, решим неравенство $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geq 1$.

Как и в предыдущих неравенствах, перенеся число из правой части в левую и приведя к общему знаменателю, имеем:

$$\frac{\log_2(1{,}5\cdot 2^x-1)-x}{x} \geq 0,$$

$$\frac{\log_2(1{,}5\cdot 2^x-1)-\log_2 2^x}{x} \geq 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}5\cdot 2^x-1-2^x}{x} \geq 0, \\ 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}5\cdot 2^x-1}{x} \geq 0, \\ 2^{x-1}>1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2^{x-1}-2^0}{x} \geq 0 \\ 2^x>2/3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x} \geq 0 \\ x>\log_2 2/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\, 0) \cup \left[1;\, \infty\right), \\ x \in (1-\log_2 3;\, \infty) \end{cases}$$

$$x \in (1-\log_2 3;\, 0) \cup \left[1;\, \infty\right).$$

Ответ: $x \in (1-\log_2 3;\, 0) \cup \left[1;\, \infty\right)$.

Нетрудно увидеть, что прием перехода от разности значений монотонной функции к разности ее аргументов мы здесь использовали дважды: сначала для функции $y=\log_2 t$, а затем для функции $y=2^t$, причем это понадобилось сделать только в числителе.

2.4. Метод рационализации можно использовать и для функции корня: $y=\sqrt{x}$. Она возрастает, поэтому при использовании этого метода нет никаких проблем. Рассмотрим пример.

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{\sqrt{2x-2}}\le 1.$

Приведя неравенство к виду

$$\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2x-2}-\sqrt{0}}\le 0,$$

получим

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1-2x+2}{2x-2}\le 0,\\ 2x^2-3x+1\ge 0,\\ 2x-2>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2(x-1)(x-1{,}5)}{2(x-1)}\le 0,\\ 2(x-1)(x-0{,}5)\ge 0,\\ x>1.\end{cases}$$

Тогда $x\in(1;1{,}5]$.

Глава 7. Решение заданий, содержащих степенно-показательные функции и системы уравнений и неравенств

§1*. Решение степенно-показательных уравнений и неравенств

1.1. В математической литературе встречаются два варианта названия уравнений и неравенств, рассматриваемых в § 4*, поэтому и мы будем использовать оба: степенно-показательные и показательно-степенные, но чаще будем брать первое из них. Для решения заданий этой группы необходимо знакомство с степенно-показательной функцией, ее основными свойствами, основными алгоритмами решения степенно-показательных уравнений и неравенств.

Эта группа упражнений выходит за пределы базового уровня общеобразовательной программы, поэтому их имеет смысл рассматривать только в классах, где математика преподается на повышенном уровне, и особенно в углубленных математических классах. Вместе с тем овладение этим вопросом требует от учащихся лишь минимальных *дополнительных знаний*. К наиболее востребованным упражнениям этой группы (их можно встретить даже в традиционных учебниках) относятся следующие:

1) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1,$ 2) $(2\sin x)^{\cos x}=1,$

3) $\begin{cases}(x+y)^x=(x-y)^y,\\ \log_2 x=1+\log_2 y.\end{cases}$ 4) $x^{1,25-2\cos 3x}=\sqrt[4]{x}$.

Для решения большинства из них достаточно просто применить здравый смысл и базовые знания по вопросам, связанным с понятием степени, решением показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Эти упражнения расширяют и углубляют понимание понятия степени. Задания, относящиеся к этой группе, необязательно рассматривать все одновременно, концентрируя их в одном месте программы; некоторые из них можно рассмотреть позднее, при повторении материала.

1.2. Дополнительная информация.

Дополнительные знания по теме, которые необходимы при решении заданий данного типа, можно дать *в упрощенном варианте, не углубляясь в точность формулировок определений и алгоритмов* решения по данному вопросу. Приведем некоторые из них *в упрощенном виде*.

Определение. Степенно-показательной называется функция вида $y = f(x)^{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Область определения степенно-показательной функции.

В рамках общеобразовательной программы вводится определение понятия степени с произвольным положительным показателем. В нем сказано, что основание степени с положительным показателем может быть представлено любым неотрицательным числом, причем если основание равно нулю, то и степень принимает значение, равное нулю.

Из этого следует, что если $g(x)$ – произвольная функция, которая может принимать всевозможные значения из множества R, то функция $f(x)$ должна принимать только положительные значения. А если $g(x)$ принимает только положительные значения, то $f(x)$ может принимать неотрицательные значения. Таким образом, областью определения функции $y = f(x)^{g(x)}$ в общем случае должно служить пересечение сразу трех множеств: $D\left(f(x)^{g(x)}\right) = D(f) \cap D(g) \cap A$, где A –

множество, на котором выполняется условие $f(x)>0$. Однако если заведомо известно, что функция $g(x)$ принимает только положительные значения, то область определения функции $y=f(x)^{g(x)}$ в рамках общеобразовательной программы расширяется: дополняется теми значениями x, при которых $f(x)=0$.

Кроме того, следует помнить, что, если при решении уравнений и неравенств, содержащих показательно-степенные функции, мы будем использовать методы, применяемые для решения показательных уравнений и неравенств, то в основании степеней должны отсутствовать числа 0, 1 и все отрицательные числа, то есть должны выполняться условия: $f(x)>0$ и $f(x)\neq 1$. В этом случае ситуации, когда $f(x)=0$ и $f(x)=1$, а при определенных обстоятельствах и $f(x)<0$ должны рассматриваться отдельно.

1.3.** Основные виды показательно-степенных уравнений и неравенств.

Учитывая все выше сказанное, при решении показательно-степенных уравнений и неравенств можно рассмотреть общий алгоритм их решения. Однако следует отметить, что в школьной практике такого типа уравнения и неравенства встречаются крайне редко. Поэтому разберем алгоритм решения лишь *в общих чертах*, не вдаваясь в частности. Итак, при решении уравнений и неравенств, в которых можно использовать алгоритмы, присущие решению показательных уравнений и неравенств, следует поступить следующим образом:

1) рассмотреть сначала наиболее общий случай: ввести ограничения $f(x)>0$ и $f(x)\neq 1$, которые дают возможность рассмотреть уравнение (неравенство), содержащее функцию $y=f(x)^{g(x)}$, как показательное; но,

решив его, отобрать только те решения, которые удовлетворяют выше указанным ограничениям;

2) отдельно рассмотреть случаи, когда $f(x)=0$ и $f(x)=1$, и дополнить полученными результатами общее решение;

3) дополнительно можно рассмотреть и ситуацию, когда $g(x)$, например, – натуральное число, тогда $f(x)$ – любое (если это важно с точки зрения конкретного задания); можно рассмотреть и другие частные случаи, которые разбираются в теории, связанной со степенно-показательной функцией, однако в рамках школьной программы это делать нецелесообразно.

1.4. Частный случай решения степенно-показательных уравнений и неравенств.

Значительно чаще встречаются уравнения (неравенства), состоящие из двух членов, один из которых (или оба) представляют собой степенно-показательную функцию. В этом случае следует использовать прием логарифмирования обеих частей уравнения (неравенства) по какому-либо положительному основанию, отличному от единицы, с дальнейшим использованием свойства «логарифм степени», которое позволяет избавиться от степеней, привести уравнение (неравенство) к более простому и решать его как обычное логарифмическое.

§2*. Решение систем степенно-показательных уравнений и неравенств

2.1. Аналогично поступают и при решении системы, содержащей такие уравнения.

Рассмотрим систему
$$\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, & (1)\\ \log_2 x=1+\log_2 y. & (2)\end{cases}$$

Преобразовав уравнение (2), получим $x = 2y$. Подставив в уравнение (1), имеем $(3y)^{2y} = y^y$.

Прологарифмируем полученное уравнение по основанию 3: $\log_3(3y)^{2y} = \log_3(y^y)$, тогда по свойству логарифма степени и дальнейших тождественных преобразований имеем:

$$2y\log_3(3y) - y\log_3 y = 0 \Leftrightarrow y(2\log_3(3y) - \log_3 y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(2 + 2\log_3 y - \log_3 y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 2 + \log_3 y = 0. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $y > 0$, получим $y = \frac{1}{9}$, тогда $x = \frac{2}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$.

2.2.)** Рассмотрим неравенство

$$(1 - x)^{\log_2(1-x)} > 0{,}5^{\log_2 \frac{1}{|4x-4|}}.$$

Прологарифмировав обе части по основанию 2 и учитывая, что функция $y = \log_2 t$ возрастает, получим

$$\log_2(1 - x)^{\log_2(1-x)} > \log_2 0{,}5^{\log_2 \frac{1}{|4x-4|}}.$$

Используем свойства логарифмов:

$$\log_2(1 - x) \cdot \log_2(1 - x) > \log_2 \frac{1}{|4x - 4|} \cdot (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(1 - x) > \log_2|4x - 4| \Leftrightarrow \log_2^2(1 - x) > \log_2(4|x - 1|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(1 - x) > \log_2|x - 1| + 2.$$

Учитывая ОДЗ, где $1 - x > 0$, имеем:

$$\log_2^2(1 - x) - \log_2(1 - x) - 2 > 0.$$

Выполнив замену $t=\log_2(1-x)$, получим неравенство

$$t^2-t-2>0.$$

Учитывая ОДЗ, решим его:

$$t^2-t-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(1-x)<-1 \\ \log_2(1-x)>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<1-x<0{,}5 \\ 1-x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}5<x<1 \\ x<-3 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(0{,}5;1)$.

§3. Системы показательных и логарифмических уравнений

3.1. Решение систем показательных и логарифмических уравнений не является самоцелью данного курса. Задания, содержащие системы, взяты лишь как наглядный пример использования знаний, полученных в предыдущих главах и параграфах, в сочетании с особенностями решения систем уравнений. Решение одной системы было уже приведено *в* предыдущем пункте, связанном с особенностями решения степенно-показательных уравнений.

3.2. Приведем решение двух систем других типов:

1*) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)=\log_5(y-x)+\log_5(y+x), \end{cases}$

2**) $\begin{cases} \log_2\sin x+\log_2\sin y=-2, \\ \log_3\cos x+\log_3\cos y=1-\log_3 4. \end{cases}$

Решим первую из них. По свойствам логарифма степени и логарифма произведения имеем:

$$\begin{cases} 3\cdot 3^{\log_3(y-x)^2}=48, \\ \log_5(2y-x-12)^2=\log_5(y-x)(y+x). \end{cases}$$

Тогда получим:

$$\begin{cases}(y-x)^2=16,\\(y+y-x-12)^2=(y-x)(y+x),\\y-x>0,\\y+x>0,\\y+y-x-12>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y-x=\pm 4,\\(y+4-12)^2=4(y+x),\\y-x>0,\\y+x>0,\\y+4-12>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+4,\\(x+4-8)^2=4(x+4+x),\\y>-x,\\y>8\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+4,\\(x-4)^2=4(2x+4),\\y>-x,\\y>8\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+4,\\x^2-16x=0,\\y>-x,\\y>8\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+4,\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=16,\end{array}\right.\\y>-x,\\y>8\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=4,\end{cases}\\\begin{cases}x=16,\\y=20,\end{cases}\end{array}\right.\\y>8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=16,\\y=20.\end{cases}$$

Ответ: $(16;20)$.

3.3. В системе $\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4, \end{cases}$

основной проблемой является отбор полученных решений с учетом ОДЗ, поскольку на тригонометрическом материале такой отбор довольно сложен, и на него учителя математики редко обращают внимание учащихся. Следует также сделать правильный выбор переменных с целыми значениями (*n* и *m*), которые при решении данной системы берутся в уравнениях независимо друг от друга (см. ниже), поскольку и решение самих уравнений в этой системе проводится также совершенно независимо друг от друга.

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin y > 0, \\ \cos y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(} x \text{ и } y - \text{углы первой координатной четверти).}$$

При этом понятно, что решать неравенства в этой системе нет никакого смысла.

Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 (\sin x \sin y) = -2, \\ \log_3 (\cos x \cos y) = 1 - \log_3 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 1/4, \\ \cos x \cos y = 3/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1 \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(n+m),\ n, m \in Z \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(m-n),\ n, m \in Z. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получим: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l\right),\ k \in Z, l \in Z$.

§4*. Решение нестандартных упражнений

4.1. Понятие нестандартности весьма условное. Нестандартность упражнений в большинстве случаев заключается лишь в том, что они отсутствуют практически во всех рекомендуемых учебниках или встречаются в виде одного-двух упражнений без решений, и поэтому учителя математики обычно не берут их при рассмотрении данной темы. В то же время их решение бывает довольно несложным.

Часто встречаются упражнения, которые требуют лишь небольших дополнительных знаний и тогда при сравнительно небольших усилиях со стороны учителя и учеников они становятся вполне доступными, а значит, при достаточной проработке вполне могут стать стандартными. Есть, конечно, среди них и задания, требующие комплексного подхода (знания материала нескольких тем одновременно). Часть из них являются технически более сложными по сравнению с остальными, поэтому их целесообразно рассматривать в основном в классах с углубленным изучением математики.

Приведем примеры заданий разного уровня сложности и их решений:

1*) Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то имеем:

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$$

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{1-\sin^2 x} = 6$$

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 6.$$

Введем новую переменную $t = 2^{\sin^2 x}$. Так как $0 \le \sin^2 x \le 1$ и функция $y = 2^z$ возрастающая, то $1 \le t \le 2$. Сделав замену, имеем уравнение $t + \frac{8}{t} = 6$; решив его, получим $t = 4$ (не удовлетворяет условию) и $t = 2$. Тогда

$$2^{\sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

где $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

2*) Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$.

Это неравенство можно решать разными способами, но вначале следует возвести обе его части в квадрат. Это можно сделать без всяких ограничений, поскольку обе части неравенства неотрицательные. Получим $x^{\log_2 \sqrt{x}} > 4$. Далее мы должны в полученном неравенстве либо привести обе части к степеням с основанием *x*, либо прологарифмировать их по основанию 2.

В первом случае имеем $x^{\log_2 \sqrt{x}} > x^{\log_x 4}$ и дальше приходится рассматривать три случая в зависимости от *x* ($x > 1$, $0 < x < 1$, $x = 1$). Поэтому лучше решить вторым способом, то есть логарифмированием. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Так как функция $y = \log_2 t$ возрастающая и $x > 0$, то имеем $\log_2 x^{\log_2 \sqrt{x}} > \log_2 4$.

Тогда:

$\log_2 x^{0,5} \cdot \log_2 x > 2$	$\lvert\log_2 x\rvert > 2$
$0,5\log_2^2 x > 2$	$\left[\begin{array}{l}\log_2 x < -2\\ \log_2 x > 2\end{array}\right.$
$\log_2^2 x > 4$	$\left[\begin{array}{l}0 < x < 0,25\\ x > 4\end{array}\right.$

Ответ: $x \in (0;\, 0,25) \cup (4;\, \infty)$.

4.2. Существует довольно много различных видов нестандартных упражнений, связанных с показательными и логарифмическими уравнениями и неравенствами. Какие из них следует брать при изучении темы в том или ином классе, на уроках или элективных курсах – решать учителю в зависимости от уровня подготовленности класса, от условий, в которых находится данное учебное заведение и сам учитель. Поэтому приведем примеры нескольких различных видов упражнений, разобрав решения лишь некоторых.

1*) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.	2*) $4^{3+2\cos 2x} - 7 \cdot 4^{1+\cos 2x} = 16^{0,25}$.
3*) $\log_x 3 \cdot \log_9 x > \dfrac{1}{\log_x 2 + 1}$.	4*) $\log_{0,3} \log_6 \dfrac{x^2 + x}{x+4} < 0$.
5*) $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$	6**) $\log_x \log_2 \left(4^x - 12\right) \le 1$.
7*) $2\cos(\pi(1-x)) - 2 = \sqrt{3 + 2x - x^2}$.	8*) $2^{\lvert x\rvert} = \sin x^2$.
9*) $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) - \lvert\log_2 (x-1)\rvert = 1$.	10**) $4\log_{\cos x} 3 - \log_3 \cos x \le 3$.
11**) $\log_2 \sin x - 3\log_{\sin x} 2 \ge 2$.	12*) $\log_x 2x \ge 2$.
13*) $\log_{x^2-3}(4x+7) \ge 0$.	14**) $\log_{x+2} 4 > \log_x 2$.
15**) $\log_x 3 \ge \log_{x+2} 9$.	16*) $\log_{x^2-2}(10+7x) > 0$.

17*) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y-x-12) = \log_5(y-x) + \log_5(y+x). \end{cases}$
18*) $\left\|\left\|\left\|x+1\right\|+2\right\|-1\right\|+1\right\| = 2$.
19**) При каких значениях a уравнение $\left\|\log_3\|x\|\right\| - a = 2 + (x-3)^0$ будет иметь ровно три различных корня?
20*) При каких значениях a уравнение $\left\|2^{\|x\|} - 4\right\| - 2 = a$ будет иметь ровно три различных корня?
21*) Сколько корней имеет уравнение $\left\|\dfrac{x-2}{x+1}\right\| - a = 0$ при $a \in (0;1)$?
22*) Сколько корней при $a \in (-2;-1)$ имеет уравнение $a - \left\|\dfrac{x+3}{x+2}\right\| = -2$?

4.3. Уравнения 7, 8 и 9 могут быть решены на основе использования известного метода оценки. Для примера разберем решение уравнения 9*:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left|\log_2(x-1)\right| = 1.$$

Для начала преобразуем уравнение так, чтобы функции синус и логарифм были в разных частях уравнения.

Получим $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \left|\log_2(x-1)\right| + 1.$

Обозначим функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, через $f(x)$ и $g(x)$, то есть пусть $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$, а $g(x) = \left|\log_2(x-1)\right| + 1$. Оценим их: $E(f) = [-1;1]$, а так как $E(\log_a) = R$, то $E(g(x)) = [1;\infty)$.

Таким образом, эти функции имеют только одно общее значение: $y = 1$, причем $g(x)=1$ *только* при $x=2$, то есть $g(2)=1$. Проверим, будет ли $f(2)=1$.

Для этого найдем: $f(2)=\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Так как $f(2)=g(2)=1$, то $x=2$ – корень уравнения, причем единственный. Ответ: $x=2$.

4.4. Решим неравенство 11**:

$$\log_2 \sin x - 3\log_{\sin x} 2 \geq 2$$

$$\log_2 \sin x - \frac{3}{\log_2 \sin x} \geq 2.$$

Пусть $\log_2 \sin x = t$, тогда получим $t-\frac{3}{t}\geq 2$. А так как $E(\sin)=[-1;1]$, а из ограничений на область определения функции $y=\log_a x$ имеем: $0<\sin x<1$, то $\log_2 \sin x<0$, то есть $t<0$.

Умножим обе части неравенства на $t<0$, получим:

$$t-\frac{3}{t}\geq 2 \Leftrightarrow t^2-2t-3\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq t\leq 3 \Leftrightarrow$$

$$-1\leq \log_2 \sin x\leq 3 \Leftrightarrow 0{,}5\leq \sin x\leq 8 \Leftrightarrow \sin x\geq 0{,}5.$$

Учитывая ограничения на функцию синус, в частности $\sin x\neq 1$, окончательно имеем:

$$x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z.$$

4.5. Не менее сложными являются и неравенства 14** и 15**.

Например, решим неравенство 14**:

$$\log_{x+2} 4 > \log_x 2.$$

Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Но $x>0 \Leftrightarrow x+2>2$, тогда $\log_2(x+2)>1>0$.

Выполним преобразования:

$$\log_{x+2}4>\log_x 2$$

$$\frac{2}{\log_2(x+2)}>\frac{1}{\log_2 x}$$

$$\frac{2\log_2 x-\log_2(x+2)}{\log_2 x}>0$$

$$\frac{\log_2 x^2-\log_2(x+2)}{\log_2 x-\log_2 1}>0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases}$$

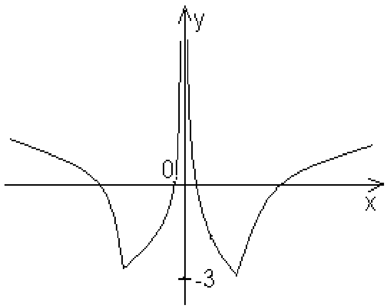
Ответ: $x\in(0;1)\cup(2;\infty)$.

Примечание. При решении неравенства мы опять использовали метод рационализации, рассмотренный в пункте 2 §5даного пособия, связанный в данном примере со свойством монотонности функции $y=\log_2 t$. При письменном решении этот переход необходимо пояснить, например, следующим образом: так как функция $y=\log_2 t$ возрастает, то знак разности при переходе от значений функции к значениям аргумента не меняется.

4.6. Последние четыре задания несколько другого плана. Это задания с параметром, требующие знания преобразований графиков функций, содержащих модуль. Более сложные задания такого типа разберем несколько позднее в §8. А здесь рассмотрим только решение задания № 19* из выше приведенной таблицы.

19**. При каких значениях a уравнение $\left|\log_3|x|\right| - a = 2 + (x-3)^0$ имеет ровно три различных корня?

Начать лучше с нахождения ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$ Затем, уединив параметр, приведем уравнение к виду: $\left|\log_3|x|\right| - 3 = a$.



Используя знание основных преобразований графиков функций, о которых мы говорили в §3 главы 2, изобразим схематически график функции $f(x) = \left|\log_3|x|\right| - 3$. Поскольку $x \neq 3$ (см. ОДЗ), а $3 \in D(f)$, то найдем значение функции при $x = 3$: $f(3) = \left|\log_3|3|\right| - 3 = -2$. Это значение a при дальнейшем решении мы должны будем изъять из искомого множества, если оно войдет в него. Именно это обстоятельство повышает уровень сложности задания, включая его в задания *высокого* уровня сложности.

По свойствам графика логарифмической функции, имеем: при $a < -3$ прямая $y = a$ не пересекает график функции $f(x)$, значит, уравнение корней не имеет; при $a = -3$ имеет два корня, а при всех остальных значениях a имеет четыре корня, исключая $a = -2$, при котором один из корней ($x = 3$) является посторонним, т.к. не входит в ОДЗ, поэтому именно при $a = -2$ уравнение имеет ровно три корня.

Ответ: при $a = -2$.

Глава 8**. Решение заданий высокого уровня сложности и нестандартных заданий

§1. Задания, связанные с прогрессиями

1.1. Приведем только два задания.

1) Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, если первыми ее тремя членами являются выражения

$$\log_4(5-5^x),\ \log_{16}(1+3\cdot 5^x-25^x) \text{ и } \log_4(3-5^x).$$

2) Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, если первыми ее тремя членами являются выражения

$$\log_2(3^x-1),\ \log_{16}(9+9^x-7\cdot 3^x) \text{ и } \log_2(3-3^x).$$

1.2. Пусть $a_1=\log_4(5-5^x)$, $a_2=\log_{16}(1+3\cdot 5^x-25^x)$ и $a_3=\log_4(3-5^x)$. Тогда по основному свойству арифметической прогрессии имеем: $2a_2=a_1+a_3$, то есть $2\log_{16}(1+3\cdot 5^x-25^x)=\log_4(5-5^x)+\log_4(3-5^x)$.

Найдем ограничения на ОДЗ:

$$\begin{cases}5-5^x>0;\\ 3-5^x>0,\\ 1+3\cdot 5^x-25^x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5^x<3,\\ \left(5^x\right)^2-3\cdot 5^x-1<0\end{cases}.$$

Теперь преобразуем исходное уравнение и решим его:

$$\log_4(1+3\cdot 5^x-25^x)=\log_4\big((5-5^x)(3-5^x)\big)$$

$$1+3\cdot 5^x-25^x=(5-5^x)(3-5^x)$$

$$1+3\cdot 5^x-(5^x)^2=15-8\cdot 5^x+(5^x)^2$$

$$2\cdot(5^x)^2-11\cdot 5^x+14=0$$

$$\left[\begin{aligned}&5^x=2\\ &5^x=3{,}5.\end{aligned}\right.$$

Второе из полученных значений не удовлетворяет ОДЗ, а из первого имеем: $x=\log_5 2$. Тогда $a_1=\log_4 3$, $a_2=\log_{16}3$, $a_3=\log_4 1=0$. Найдем разность арифметической прогрессии:

$$d=\log_{16}3-\log_4 3=\log_{16}3-\log_{16}9=\log_{16}1/3=-\log_{16}3.$$

Тогда искомая сумма

$$S_5=\frac{2\log_4 3-\log_{16}3\cdot 4}{2}\cdot 5=\frac{\log_4 9-\log_4 9}{2}\cdot 5=0.$$

Ответ: $S_5=0$.

<u>Примечание</u>. При нахождении S_5 выше указанным способом a_3 можно было не находить. Зато, зная, что $a_3=0$, можно было из свойств арифметической прогрессии сразу сделать вывод:

$$a_1+a_5=a_2+a_4=a_3+a_3=0,$$

а значит, $S_5=0$.

§2. Задания, связанные с теорией многочленов

2.1. Здесь мы тоже приведем только два задания.

1) Решите уравнение

$$\log_x(x\cdot\sqrt[5]{x}-9^x+92\cdot 3^{x-1}-101+2\cdot 3^{3-x})=1{,}2.$$

2) Решите уравнение

$$\log_x(2^{x+2}+25\cdot 2^{1-x}-3\cdot 0{,}25^{x-1{,}5}-27+x\cdot\sqrt[3]{x})=\frac{4}{3}.$$

2.2. Что касается этих заданий, то высокая сложность их решения заключается в том, что здесь опять необходимо использовать элементы теории многочленов, которые были рассмотрены в параграфе №1 главы №5 (в данном случае при решении уравнения третьей степени).

Решим уравнение

$$\log_x(x\cdot\sqrt[5]{x}-9^x+92\cdot 3^{x-1}-101+2\cdot 3^{3-x})=1{,}2.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1, \\ x \cdot \sqrt[5]{x} - 9^x + 92 \cdot 3^{x-1} - 101 + 2 \cdot 3^{3-x} > 0. \end{cases}$$

Тогда по определению логарифма:

$$\log_x (x \cdot \sqrt[5]{x} - 9^x + 92 \cdot 3^{x-1} - 101 + 2 \cdot 3^{3-x}) = 1{,}2$$

$$x^{1,2} - 9^x + 92 \cdot 3^{x-1} - 101 + 2 \cdot 3^{3-x} = x^{1,2}$$

$$(3^x)^2 - 92 \cdot 3^{x-1} + 101 - 2 \cdot 3^{3-x} = 0\,.$$

Умножив обе части на $3^x \neq 0$, получим:

$$(3^x)^3 - \frac{92}{3} \cdot (3^x)^2 + 101 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^3 = 0$$

$$3 \cdot (3^x)^3 - 92 \cdot (3^x)^2 + 303 \cdot 3^x - 162 = 0\,.$$

Выполним замену $t = 3^x$ и решим уравнение $3t^3 - 92t^2 + 303t - 162 = 0$ с помощью теорем из теории многочленов.

Среди делителей свободного члена найдем $t = 3$ – корень уравнения. Разделим по схеме Горнера:

	3	–92	303	–162
3	3	–83	54	0

В результате получим квадратное уравнение $3t^2 - 83t + 54 = 0$, корнями которого являются числа $t = 27$ и $t = 2/3$. Выполним обратную подстановку, получим: $3^x = 3$, $3^x = 27$ и $3^x = 2/3$, откуда $x = 1$, $x = 3$ и $x = \log_3 2/3$. Но $x = 1$ не удовлетворяет ОДЗ, а $\log_3 2/3 < 0$, поэтому ОДЗ удовлетворяет только $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

§3. Задания, связанные с системами неравенств

3.1. Здесь мы тоже приведем только два задания.

1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{5-x}\dfrac{x+9}{(x-5)^4} \le -4, \\ x^3+7x^2-\dfrac{11x^2-x+3}{x-3} \ge 1. \end{cases}$$

2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{5-x}\dfrac{x+9}{(x-5)^4} \le -4, \\ x^3+7x^2-\dfrac{11x^2-x+3}{x-3} \ge 1. \end{cases}$$

3.2. Системы неравенств сложны тем, что, кроме решения самих неравенств, необходимо правильно найти общее решение, совместив полученные решения этих неравенств на числовой прямой. При этом могут встретиться отдельные (изолированные) решения, не входящие ни в один из полученных промежутков. Вторая проблема, которая встречается при решении систем неравенств, имеющих ограничения на область допустимых значений переменной, заключается в том, что не всегда удобно находить ОДЗ всей системы. Лучше решить каждое неравенство до конца, то есть на своей ОДЗ, а потом найти общее решение путем пересечения множеств найденных решений.

Если владеть набором всех приемов и методов, описанных выше, то системы в приведенных в этом параграфе заданиях нельзя считать нестандартными. Например, первое неравенство при использовании метода рационализации (§5, п.2) становится довольно простым. И второе неравенство при аккуратных преобразованиях и использовании метода интервалов тоже является довольно несложным. Наконец графическая интерпретация в конце решения, если не притупится внимание ученика, должна выявить изолированное решение системы. Других проблем в этой системе нет.

В то же время, если совместить все эти проблемы, то уровень сложности таких заданий будет довольно высоким, поэтому такие системы, как и задания №№ 1-4, рекомендуется решать только в классах с углубленным изучением математики. Если же преподавание математики в классе идет на повышенном уровне, то такие системы можно рекомендовать в качестве домашнего задания для наиболее продвинутых в своем математическом образовании учащихся.

3.3. Приведем краткое решение первой системы:

$$\begin{cases} \log_{5-x}\dfrac{x+9}{(x-5)^4} \le -4, & (1), \\ x^3+7x^2-\dfrac{11x^2-x+3}{x-3} \ge 1 & (2). \end{cases}$$

Так как $5-x>0$ и $x+9>0$, то неравенство (1) после небольших, но не очень простых преобразований примет вид $\log_{5-x}(x+9) \le 0$. Тогда с помощью метода рационализации, а затем метода интервалов имеем:

$$\log_{5-x}(x+9) \le 0,$$

$$\frac{\log_2(x+9)-\log_2 1}{\log_2(5-x)-\log_2 1} \le 0,$$

$$\frac{x+9-1}{5-x-1} \le 0,$$

$$\frac{x+8}{x-4} \ge 0,$$

$$x \in (-\infty;-8] \cup (4;\infty).$$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (-9;-8] \cup (4;5)$.

Если неравенство (2) преобразовать, то его можно свести к виду:

$$\frac{x^2(x+8)(x-4)}{x-3} \ge 0.$$

С помощью метода интервалов получим, что его решением будет: $x \in [-8; 3) \cup [4; +\infty)$. Тогда, объединив оба решения на числовой прямой, получим итоговое решение системы:

$$x \in (4; 5) \cup \{-8\}.$$

§4**. Решение показательных уравнений с параметром (задания на количество корней уравнения). Использование элементов теории в курсе углублённого изучение биологии

4.1. Задания с параметром традиционно считаются сложными, поскольку требуют от ученика:

- *досконального понимания алгоритмов* решения соответствующих заданий без параметров (например, прежде, чем решать квадратные уравнения с параметром, необходимо хорошо знать и понимать суть всех возможных случаев, которые встречаются при решении квадратного уравнения без параметров);
- *исследовательских навыков* (то есть умения находить и исследовать все возможные варианты, делая соответствующие выводы);
- *творческого подхода* (поскольку часто приходится строить свой собственный алгоритм решения конкретном задания на основе имеющегося арсенала знаний по предмету);
- *глубоких знаний и умений* использовать функционально-графический метод решения со всеми возможными его частными случаями.

Чаще всего встречаются задания на нахождение значений параметра по заданному количеству корней уравнения.

4.2. В качестве первого типа заданий возьмем те, которые связаны с решением показательных уравнений с параметром. Они имеют в принципе определенный алгоритм решения и с точки зрения человека, владеющего этим алгоритмом, являются стандартными. Но технически они представляют немалую трудность.

В них с помощью замены необходимо переменных перейти к уравнению с новой переменной (как правило, к квадратному уравнению). При этом надо учитывать, что наличие коней квадратного уравнения не означает наличие соответствующих корней исходного уравнения, поскольку не каждый корень этого квадратного уравнения соответствует условию положительности новой переменной. В результате приходится рассматривать все возможные случаи решения квадратного уравнения, исследуя каждый из них.

Приведем шесть уравнений этого вида заданий (по два на каждый тип задания).

1) При каких значениях a уравнение $4^x - (a+3)\cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень?

2) При каких значениях a уравнение $9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

3) При каких значениях a уравнение $36^x + (a-1)\cdot 6^x + a - 2a^2 = 0$ имеет два корня?

4) При каких значениях a уравнение $16^x - (5-a)\cdot 4^x + 6 - 2a = 0$ имеет два корня?

5) При каких значениях a уравнение $25^x - (a-4)\cdot 5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$ не имеет корней?

6) При каких значениях a уравнение $49^x + (a-1)\cdot 7^x - 2a^2 + 4a - 2 = 0$ не имеет корней?

4.3. Решим первое из этих заданий.

Выполним замену: $2^x = t$. При этом отметим, что нас интересуют только положительные значения переменной t, т.к. $E(a^x) = R_+$, то есть $t > 0$. В результате получим квадратное уравнение

$$t^2 - (a+3)\cdot t + 4a - 4 = 0, \qquad (1)$$

в котором будем брать только положительные корни. Квадратное уравнение может в зависимости от дискриминанта иметь один корень, два корня или не иметь корней совсем. Понятно, что последний случай нас не интересует, и мы его отбросим. А первые два случая следует разобрать по отдельности.

Найдем дискриминант:

$$D=(a+3)^2-4\cdot(4a-4)=a^2-10a+25=(a-5)^2\geq 0$$

для любого значения a. Поскольку $D\geq 0$, то возможны именно те 2 случая, которые нас интересуют по условию.

1-й случай. Если при $D=0$, корень, полученный по формуле $t=-\dfrac{b}{2a}$, окажется положительным, то он будет удовлетворять условию $t>0$, а значит, исходное уравнение тоже будет иметь корень, что соответствует условию задания. Проверим: $D=0$ при $a=5$. Подставив $a=5$ в формулу для корня, получим $t=4$. Так как корень получился положительный, то при $a=5$ исходное уравнение тоже имеет один корень, что удовлетворяет условию.

2 случай. Рассмотрим ситуацию, когда $D>0$, то есть $(a-5)^2>0$. Это утверждение верно при всех значениях a, кроме $a=5$. Тогда уравнение (1) имеет два корня. Чтобы исходное уравнение имело только один корень, необходимо, чтобы один из корней квадратного уравнения (1) был положительный, а другой либо отрицательный, либо равный нулю.

Итак, пусть $D>0$, то есть $a\neq 5$. Воспользуемся теоремой Виета: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=4a-4, \\ x_1+x_2=a+3 \end{cases}$.

2а: Чтобы корни имели разные знаки, достаточно выполнение условия $x_1\cdot x_2<0$, то есть $4a-4<0\Leftrightarrow a<1$, что удовлетворяет условию для дискриминанта $a\neq 5$. В этом случае получим, что уравнение (1) имеет только один положительный корень, то есть при $a<1$ исходное уравнение будет иметь один корень.

<u>2б</u>: Рассмотрим случай, когда один корень положительный, а другой равен нулю. Это произойдет, если $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-4=0, \\ a+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ a>-3 \end{cases}$, то есть при $a=1$, что удовлетворяет условию для дискриминанта: $a \neq 5$. Таким образом, получим, что и в этом случае исходное уравнение будет иметь один корень.

Объединяя полученные результаты, получим $a \leq 1, a=5$.

Ответ: $a \in (-\infty; 1] \cup a = 5$.

Аналогично можно рассмотреть и остальные пять заданий.

4.4. Решение уравнений повышенного и высокого уровней сложности по рассматриваемой теме успешно используются при изучении прикладных тем из курса углублённого изучения *биологии*. В частности при изучении темы «Распределение видового обилия» широко используется степени, логарифмы, а также показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Разберём некоторые вопросы в рамках этой темы. Рассмотрим ситуацию, при которой некий вид-доминант захватывает часть k некоторого ограниченного ресурса, второй по обилию вид захватывает такую же долю k остатка этого ресурса, затем третий по обилию – k от остатка и так далее, пока ресурс не будет распределён между всеми S видами. Если условие выполнено и обилие видов пропорционально используемой долей ресурса, то распределение этих обилий будет описываться геометрическим рядом.

Пример такого ряда: наиболее обильный вид в два раза многочисленнее следующего за ним по обилию, а второй в два раза многочисленнее следующего и так далее. В этом случае доминирующий вид занимает половину доступного пространства ниш, второй – половину оставшегося пространства и так далее.

Модель геометрического распределения в биологии была предложена Мотомурой. Она имеет два параметра: n_i – численность самого обильного вида и k – константу геометрической прогрессии. При этом получается формула Мотомура: $n_i = NC_k k(1-k)^{i-1}$, где n_i – число особей i-го вида, N – общее число особей, $C_k = [1-(1-k)^s]^{-1}$ – константа, при которой $\sum n_i = N$.

Логарифмическое распределение имеет два параметра: a и x. Для выборки объёмом N и числом видов S существует только одно возможное распределение частот видов по их обилию, так как a и x – функции N и S, которые связаны зависимостью $S = a\ln(1+N/\alpha)$, где α – индекс разнообразия, который можно получить из уравнения $\alpha = \frac{N(1-x)}{x}$, где сумма всех особей N, принадлежащих S видам, находится по формуле, связанной с логарифмами: $S = S_1 + S_2 + \cdots = -\alpha\ln(1-x)$.

При логарифмически нормальном распределении распределение частот записывается в форме:

$$S_R = S_{mo}e^{-R^2},$$

где S_R – теоретическое число видов в октаве, расположенной в R октавах от модальной октавы; S_{mo} – число видов в модальной октаве; s – стандартное отклонение теоретической логнормальной кривой, выраженное в числе октав.

Понятно, что приведенный выше фрагмент из теории по теме «Распределение видового обилия» из курса углублённого изучения биологии довольно сложен для понимания, как учителей математики, так и большинства учителей биологии. Осилить эту теорию может лишь учитель, который имеет глубокие знания по биологии и неплохо разбирается в математике.

Глава 9**. Решение заданий с модулями и параметрами из подготовительных и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ

9.1. Наибольший интерес, а вместе с тем и наибольшую трудность у учащихся и учителей вызывает решение различных заданий с модулями и параметрами. В отличие от заданий предыдущих пунктов они не имеют четкого определенного алгоритма решения, поэтому никоим образом не могут считаться стандартными. Поэтому уровень заданий этой главы еще более высокий, и их можно рассматривать только в классах с углубленным изучением математики. Большинство из них взяты из подготовительных или контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике. Практически все они решаются с помощью функционально-графического метода, для которого совершенно необходимо умение пользоваться преобразованием графиков.

9.2. Приведем примеры таких заданий.

1**) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \frac{2x^2+3}{1+x^2}$ и $\log_a \frac{5+4x^2}{x^2+1}$ будет меньше единицы при всех значениях x?

2**) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \frac{3|x|+4}{1+|x|}$ и $\log_a \frac{6+5|x|}{|x|+1}$ будет больше единицы при всех значениях x?

3**) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \frac{2\sqrt{x}+3}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ не равна единицы ни при каких значениях x?

4**) При каких значениях a неравенство $\frac{2^x-(2^a+2^{4-a}+6)}{2^x-\sin a} \leq 0$ не выполняется ни при одном значении x из промежутка $[4; 5)$.

5**) Найдите все положительные значения a, при которых неравенство $\frac{\log_3 x-(a^2+2a^{-2})}{\log_3 x+1-\sin a} < 0$ не выполняется хотя бы для одного значения $x \in [9; 27)$.

6**) При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\log_5(\sin x)-a^2}$ больше $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_a 7}$ при всех допустимых значениях x?

7**) При каких значениях a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

8**) Найдите все положительные, не равные единице, значения a, при которых область определения функции $f(x)$ содержит не более двух целых чисел, если $f(x) = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1} + \sqrt{x}\cdot a^3 - x^{0,5+x\log_x a} - \left(\sqrt{a}\right)^7\right)^{0,5}$.

9**) Найдите все положительные, не равные единице, значения a, при которых область определения функции $f(x)$ не содержит двузначных натуральных чисел, если $f(x) = \left((a)^{x+3}\cdot a^2 + a^{4+5\log_a x} - x^{5+x\log_x a} - \left(\sqrt[3]{a}\right)^{27}\right)^{0,5}$.

10**) Из области определения функции

$$y = \log_3\left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

11**) Из области определения функции

$$y = \ln\left(a^a - a^{\frac{6x+1}{x+1}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 4, но меньше 7.

12**) Найдите все значения a, при которых система уравнений имеет единственное решение: $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1$ и $5\cdot 2^{|x|}+6|\boldsymbol{x}|+7=5\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{a}$.

9.3. Приведем решение некоторых заданий.

2**. При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a\frac{3|x|+4}{1+|x|}$ и $\log_a\frac{6+5|x|}{|x|+1}$ будет больше единицы при всех значениях x? Алгебраической моделью этого задания будет неравенство:

$$\log_a\frac{3|x|+4}{1+|x|}+\log_a\frac{6+5|x|}{|x|+1}>1.$$

Переформулируем задачу на языке неравенства: при каких значениях a неравенство

$$\log_a\frac{3|x|+4}{1+|x|}+\log_a\frac{6+5|x|}{|x|+1}>1$$

верно при всех значениях x?

Очевидно, что ОДЗ – множество всех действительных чисел. Выделим целые части в дробях:

$$\frac{3|x|+4}{1+|x|}=\frac{3(1+|x|)+1}{1+|x|}=3+\frac{1}{1+|x|}.$$

Аналогично для второй дроби:

$$\frac{6+5|x|}{|x|+1}=5+\frac{1}{|x|+1}.$$

Тогда введем новую переменную $t=3+\frac{1}{1+|x|}$ и, выразив через нее обе дроби, приведем наше неравенство к более простому виду: $\log_a t+\log_a(t+2)>1$. Найдем соответствующие ограничения для t:

$$0\le|x|<\infty\Leftrightarrow 1\le|x|+1<\infty\Leftrightarrow 0<\frac{1}{|x|+1}\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3<3+\frac{1}{|x|+1}\le 4,\text{ то есть } t\in(3;4].$$

Таким образом, наше задание свелось к следующему: при каких значениях a неравенство

$$\log_a t + \log_a(t+2) > 1$$

верно при всех $t \in (3; 4]$? Преобразуем неравенство: $\log_a(t^2 + 2t) > \log_a a$. По определению логарифма следует рассмотреть только случаи, когда

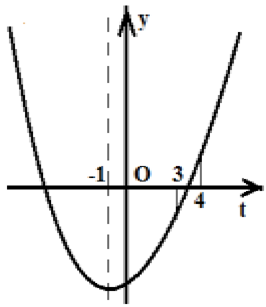
$$a > 1 \text{ и } 0 < a < 1.$$

<u>1-й случай</u>. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, поэтому получим

$$t^2 + 2t > a \text{ или } t^2 + 2t - a > 0.$$

Обозначим $f(t) = t^2 + 2t - a$.

График функции $f(t)$ – парабола, ветви направлены вверх, абсцисса вершины: $t = -1$. По условию нас интересует та часть графика, которая целиком расположена выше оси t на промежутке $(3; 4]$. Если график пересекает ось абсцисс на этом промежутке (см. рисунок), то часть его лежит выше, а часть ниже оси.



Условие задания будет выполняться, если $f(3) \geq 0$, тогда получим:

$$9 + 6 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 15,$$

а так как по условию случая $a > 1$, то в результате имеем: $a \in (1; 15]$.

<u>2-й случай.</u> Аналогично при $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, поэтому получим $t^2 + 2t < a$ или $t^2 + 2t - a < 0$. Условие задачи будет выполняться, если $f(4) < 0$. В результате преобразований получим: $a > 24$, что противоречит условию случая.

Ответ: при $a \in (1; 15]$.

9.4. 4**) При каких значениях a неравенство

$$\frac{2^x - (2^a + 2^{4-a} + 6)}{2^x - \sin a} \le 0$$

не выполняется ни при одном значении x из промежутка $[4;5)$.

Очевидно, что для любого значения a верны следующие соотношения:

$$-1 \le \sin a \le 1 \text{ и } 2^a + 2^{4-a} + 6 > 6,$$

значит $\sin a < 2^a + 2^{4-a} + 6$.

Рассмотрим несколько случаев.

<u>1-й случай</u>. Пусть

$$2^x < \sin a, \text{ тогда } 2^x < 2^a + 2^{4-a} + 6,$$

следовательно числитель и знаменатель дроби одновременно отрицательные, а вся дробь соответственно положительная, то есть неравенство не выполняется ни при каких значениях x, а не только при заданных, что не удовлетворяет условию задания.

<u>2-й случай</u>. Пусть $2^x > 2^a + 2^{4-a} + 6$, а значит, $2^x > \sin a$, то есть числитель и знаменатель дроби одновременно положительные, что также не удовлетворяет условию.

<u>3-й случай.</u> Так как $2^x \ne \sin a$ (ОДЗ), то остается только один случай, когда

$$\sin a < 2^x \le 2^a + 2^{4-a} + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > \sin a, & (1) \\ 2^x \le 2^a + 2^{4-a} + 6. & (2) \end{cases}$$

Так как по условию $x \in [4;5)$, то, в силу того, что показательная функция непрерывная и возрастающая, получим: $2^x \in [16;32)$. А это значит, что неравенство (1) верно. Чтобы неравенство (2) не выполнялось при всех $x \in [4;5)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство $2^a + 2^{4-a} + 6 < 16$.

Решим его:

$2^a + \frac{16}{2^a} < 10 \Leftrightarrow (2^a)^2 - 10 \cdot 2^a + 16 < 0 \Leftrightarrow 2 < 2^a < 8$,

откуда $a \in (1; 3)$.

9.5. 7**) При каких значениях a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

Во-первых, $1-|x|>0$, то есть $0 \le |x| < 1$; тогда $0 < 1-|x| \le 1$ и соответственно $\log_5(1-|x|) \le 0$.

Во-вторых, $1+x^2-2|x| = (1-|x|)^2$, а, учитывая, что $1-|x|>0$, получим:

$$\log_{25}(1+x^2-2|x|) = \log_5(1-|x|).$$

Прологарифмируем обе части неравенства, которое составим по условию:

$$\log_5(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} > \log_5 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}.$$

Тогда:

$$(\log_5(1-|x|)-|a-1|)\cdot\log_5(1-|x|) >$$
$$> (4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|))\cdot(-1).$$

Обозначив $t = \log_5(1-|x|)$, получим

$$(t-|a-1|)\cdot t > (4-a^2-t)\cdot(-1)$$

или

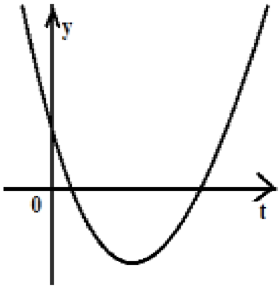
$$t^2 - (|a-1|+1)t + 4 - a^2 > 0.$$

Нам известно (смотри выше), что $t<0$.

Введем функцию

$$f(t) = t^2 - (|a-1|+1)t + 4 - a^2.$$

Ее график – парабола, ветви вверх, абсцисса вершины в точке $x = \frac{(|a-1|+1)}{2} > 0$. Тогда условие задачи будет выглядеть следующим образом: при каких значениях a



парабола слева от оси ординат (так как $t < 0$) будет расположена выше оси абсцисс? Для этого достаточно выполнение условия $f(0) > 0$, то есть $4 - a^2 > 0$, а значит, $|a| < 2 \Leftrightarrow -2 < a < 2$.

Ответ: $a \in (-2; 2)$.

9.6. 12**. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a$$

имеет единственное решение.

Нетрудно заметить, что оба уравнения – четные, то есть их графики симметричны относительно оси ординат. Это значит, что, если графики пересекаются справа от нее, то они пересекаются и слева в симметричной относительно этой оси точке. Таким образом, все точки, в которых графики пересекаются расположены парами, кроме тех, которые находятся на оси ординат. Поэтому единственное решение система может иметь только в случае, если графики пересекаются на самой оси и других общих точек не имеют. Но график первого уравнения пересекает ось ординат только в точках (0; 1) и (0; –1), поэтому, подставив координаты этих точек во второе уравнение, соответственно получим $a = 1{,}75$ и $a = 4{,}25$.

Проверим, нет ли других точек пересечения графиков при найденных значениях a. Учитывая, что уравнения *четные* и для первого уравнения должны выполняться условия $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$, причем случай, когда $x = 0$ уже рассмотрен, то, подставляя найденные значения a во второе уравнение, исследуем его только при $x \in (0;1]$. Подставим $a = 1{,}75$ во второе уравнение и выразим y: $y = 2^x + 1{,}2(x - x^2)$. Так как $x \in (0;1]$, то $x \ge x^2$ (то есть второй член больше или равен 0), а $2^x \ge 1$, но тогда получим $y \geq 1$, что не удовлетворяет первому уравнению. Значит, других решений при $a = 1{,}75$ система не имеет.

Подставим $a = 4{,}25$ во второе уравнение и выразим y. Тогда имеем: $y = (2^x - 2) + 1{,}2(x - x^2)$. Очевидно, что при $x = 1$ получим $y = 0$, то есть точка (1; 0), а значит, и точка (–1; 0), удовлетворяют системе, тогда система имеет не единственное, а, по крайней мере, три решения.

Ответ: $a = 1{,}75$.

9.7. Что касается составления самостоятельных и контрольных работ по теме, то об их структуре и примерном содержании мы уже говорили в первой части пособия (смотри главу 5, §3).

Список литературы

1. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2012. – 336 с.

2. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 11 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2012. – 288 с.

3. *Галицкий М. Л.* Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Методические рекомендации и дидактические материалы / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1986. – 352 с.

4. *Иванов А.А* Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: Физматкнига, 2011. – 52 с.

5. *Иванов А. А* Тематические тесты для систематизации знаний по математике: Ч.2 / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: МФТИ, 2002. – 176 с.

6. *Иванов А. А* Тесты и контрольные работы по математике / А. А. Иванов, А. П. Иванов. – М.: МФТИ, 2010. – 304 с.

7. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 17 мая 2012 г. N 413 г. Москва <Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования> // Российская газета от 21 июня 2012 г. Url: http://www.rg.ru/2012/06/21/obrstandart-dok.html (Дата обращения: 30.11.2015).

8. *Рисберг В. Г.* Курсы по выбору/ В. Г. Рисберг. – Пермь: ПКИПКРО, 2008. – 44 с.

9. *Рисберг В. Г.* Решение показательных, логарифмических, степенных и степенно-показательных уравнений, неравенств и систем уравнений / В. Г. Рисберг. – Пермь: ПКИПКРО, 2011. – 52 с.

10. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под редакцией М. И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1988. – 516 с.

Приложение №1

Решение более сложных заданий с использование специфических алгоритмов

1) $\log_{x-1}(x^2-3)\geq 2$,

2) $\log_{4-x}(x^2-2)\leq 1$,

3) $(7-4\sqrt{3})^x=7+4\sqrt{3}$,

4) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$,

5) $(2\sin x)^{\cos x}=1$,

6) $x^{1,25-2\cos 3x}=\sqrt[4]{x}$,

7) $(\sqrt{3}-1)^x=4-2\sqrt{3}$,

8) $(7-4\sqrt{3})^x=97+56\sqrt{3}$,

9) $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$,

10) $4^{3+2\cos 2x}-7\cdot 4^{1+\cos 2x}=16^{0,25}$,

11) $\log_{x^2-3}(4x+7)\geq 0$,

12) $\log_{x^2-2}(10+7x)>0$,

13) $\log_{x+2}4>\log_x 2$,

14) $\log_x 3\geq \log_{x+2}9$,

15) $2^{|x|}=\sin x^2$,

16) $\sqrt{x^2+9}=3\cos\pi x$,

17) $|\log_3 x-2|+1=\cos(\pi x-\pi)$;

18) $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)-|\log_2(x-1)|=1$,

19) $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$;

20) $\left|\left|\left|x+1\right|+2\right|-1\right|+1\right| = 2$,

21) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$,

22) $8^x + 4^x = 24 + 7 \cdot 2^{x+1}$,

23) $\dfrac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5$,

24) $\dfrac{15 \cdot 3^x + 27}{9^x} = 11 - 3^x$,

25) $27^x - 13 \cdot 3^x + 12 = 0$,

26) $\log_2 \sin x - 3\log_{\sin x} 2 \geq 2$,

27) $4\log_{\cos x} 3 - \log_3 \cos x \leq 3$,

28) $\log_x 2x \geq 2$,

29) $\log_x 3 \cdot \log_9 x > \dfrac{1}{\log_x 2 + 1}$,

30) $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$,

31) $\log_{0,3} \log_6 \dfrac{x^2 + x}{x+4} < 0$,

32) $(2+\sqrt{3})^{x+3} \geq (2-\sqrt{3})^{-\frac{5x+3}{x-2}}$,

33) $\log_x \log_2 \left(4^x - 12\right) \leq 1$,

34) $\dfrac{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{3x}}{\sqrt{x} - 1} \geq 0$,

35) $\dfrac{\sqrt{27-3x^2} - x}{\sqrt{x-2} - 3} \geq 0$,

36) $\dfrac{4\log_3(x^2+2x)}{\log_3 x^2} \leq 2$,

37) $\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geq 1$,

38) $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0$,

39) $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x = 1 + \log_2 y, \end{cases}$

40) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y-x-12) = \log_5(y-x) + \log_5(y+x) \end{cases}$,

41) $\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4 \end{cases}$,

42) $\log_4(5-5^x), \log_{16}(1+3\cdot 5^x - 25^x), \log_4(3-5^x)$,

43) $\log_2(3^x-1), \log_{16}(9+9^x-7\cdot 3^x), \log_2(3-3^x)$,

44) $\log_x(x\cdot\sqrt[5]{x} - 9^x + 92\cdot 3^{x-1} - 101 + 2\cdot 3^{3-x}) = 1{,}2$,

45) $\log_x(2^{x+2} + 25\cdot 2^{1-x} - 3\cdot 0{,}25^{x-1{,}5} - 27 + x\cdot\sqrt[3]{x}) = \frac{4}{3}$,

46) $\begin{cases} \log_{5-x}\frac{x+9}{(x-5)^4} \leq -4, \\ x^3 + 7x^2 - \frac{11x^2-x+3}{x-3} \geq 1. \end{cases}$

47) $\begin{cases} \log_{5-x}\frac{x+9}{(x-5)^4} \leq -4, \\ x^3 + 7x^2 - \frac{11x^2-x+3}{x-3} \geq 1. \end{cases}$

Приложение №2

Решение заданий с параметрами

1) При каких значениях a уравнение имеет ровно три корня $\left|\log_3|x|\right| - a = 2 + (x-3)^0$?

2) При каких значениях a уравнение $\left|2^{|x|} - 4\right| - 2 = a$ имеет ровно три корня?

3) Сколько корней имеет уравнение $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| - a = 0$ при $a \in (0; 1)$?

4) Сколько корней при $a \in (-2; -1)$ имеет уравнение $a - \left|\dfrac{x+3}{x+2}\right| = -2$?

5) При каких значениях a уравнение $4^x - (a+3)\cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень?

6) При каких значениях a уравнение $9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

7) При каких значениях a уравнение $36^x + (a-1)\cdot 6^x + a - 2a^2 = 0$ имеет два корня?

8) При каких значениях a уравнение $16^x - (5-a)\cdot 4^x + 6 - 2a = 0$ имеет два корня?

9) При каких значениях a уравнение $25^x - (a-4)\cdot 5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$ не имеет корней?

10) При каких значениях a уравнение $49^x + (a-1)\cdot 7^x - 2a^2 + 4a - 2 = 0$ не имеет корней?

11) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \dfrac{2x^2+3}{1+x^2}$ и $\log_a \dfrac{5+4x^2}{x^2+1}$ будет меньше единицы при всех значениях x?

12) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \frac{3|x|+4}{1+|x|}$ и $\log_a \frac{6+5|x|}{|x|+1}$ будет больше единицы при всех значениях x?

13) При каких значениях a сумма логарифмов $\log_a \frac{2\sqrt{x}+3}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ не равна единицы ни при каких значениях x?

14) При каких значениях a неравенство $\frac{2^x-\left(2^a+2^{4-a}+6\right)}{2^x-\sin a} \leq 0$ не выполняется ни при одном значении x из промежутка $[4;5)$.

15) Найдите все положительные значения a, при которых неравенство $\frac{\log_3 x-\left(a^2+2a^{-2}\right)}{\log_3 x+1-\sin a}<0$ не выполняется хотя бы для одного значения $x\in[9;27)$.

16) При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\log_5(\sin x)-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_a 7}$ при всех допустимых значениях x?

17) При каких значениях a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

18) Найдите все положительные, не равные единице, значения a, при которых область определения функции $f(x)$ содержит не более двух целых чисел, если $f(x)=\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1}+\sqrt{x}\cdot a^3-x^{0{,}5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^7\right)^{0{,}5}$.

19) Найдите все положительные, не равные единице, значения a, при которых область определения функции $f(x)$ не содержит двузначных натуральных чисел, если

$$f(x)=\left((a)^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{27}\right)^{0{,}5}.$$

20) Из области определения функции

$$y = \log_3\left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

21) Из области определения функции

$$y = \ln\left(a^a - a^{\frac{6x+1}{x+1}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 4, но меньше 7.

22) Найдите все значения a, при которых система уравнений имеет единственное решение:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a.$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Владислав Григорьевич Рисберг

Ирина Юрьевна Черникова

Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности (Часть II)

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 15.12. 2015. Формат 60х90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 4,0. Тираж 300 экз. Заказ № 97917
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86